

電磁気学のための基礎数学

防衛大学校機能材料工学科

阿部 洋

目次

0. はじめに	3
1. 微分と勾配	4
2. 積分	6
3. 外積	8
4. 面積ベクトル	10
5. 発散	11
6. 回転	12
7. ガウスの発散定理	14
8. ストークスの定理	15
9. テイラー展開	19

0. はじめに (数学の記号の表記法)

スカラーとベクトルの違いを強調するために

スカラー	a
ベクトル	\vec{a}

とする。また、ベクトルの大きさは、 $|\vec{a}|$ で表す。

行列 \mathbf{A} の成分は $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とする。 $|\mathbf{A}|$ は \mathbf{A} 行列の行列式で、 $|\mathbf{A}| = ad - bc$ が成り立つ。

また、 $|\sin \theta|_0^\pi$ は定積分の計算である。このように記号 $|\cdot|$ はいろいろな意味で使われるので、注意すること！

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は、 x 方向、 y 方向、 z 方向の単位ベクトルで $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ を満たす。

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ の “ \cdot ” は内積を表す。

大文字の S は面積
小文字の s は線の長さ

Δ は微小な変化量

\propto は比例

\cong は近似

1. 微分と勾配

我々は3次元空間と時間軸の上で生きている。一般に時間と空間に対して、多くの物理量は変化する。例えば、一次元のx軸上の2点(A, B)を考える(図1-1)。二点を結ぶ直線の傾きは、

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1-1)$$

となる。Δxを0に近づけると、接点Aにおける傾き、すなわち、微分となる(図1-2)。微分は、

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (1-2)$$

で与えられる。

物理では厳密に解けない場合が多いので、近似計算をよく行う場合が多い。特に、Δxが非常に小さい場合、以下のような近似をする。

$$\frac{df(x)}{dx} \cong \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (1-3)$$

図1-2の場合はΔxが大きいので、二点間の傾きと“接線の傾き(微分係数)”の大きさがかなり違う。

誤差の伝播にも微分を使うので、二点間の変化率と微分係数の違いを理解しよう！

一次元の場合は、見通しもよく理解しやすいが、二次元空間(x-y座標)の変化率はどのようになるか？まず、図1-3の山の等高線で考える。A地点に雨が落とると水滴は矢印の方向へ流れていく。水は常に**勾配が最大**になる方向へ流れていく。場所によって流れる向きと流速が変化するのでベクトルになる。これを数式で表すと、

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \right) f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{j} \quad (1-4)$$

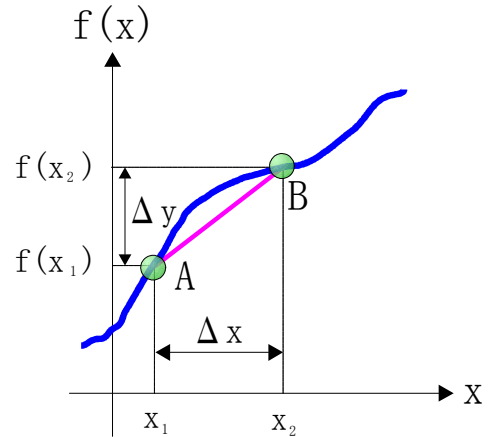


図 1-1

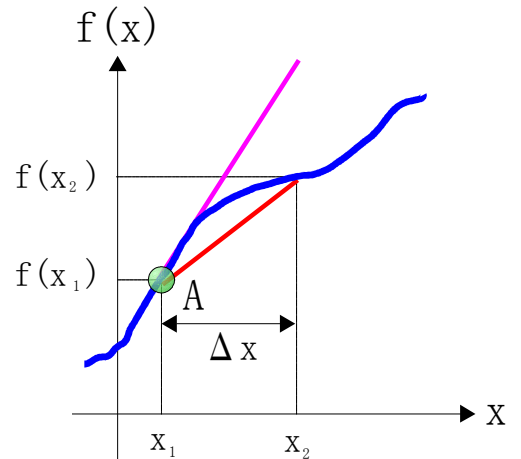


図 1-2

である。但し、 \vec{i} , \vec{j} は x 方向、y 方向の単位ベクトルである。 $\vec{\nabla} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ は、ナブラ(nabla)

と呼ぶ。山の等高線はスカラー場として考えることができる。
スカラー場の勾配(gradient)はベクトル場になる。

$$\text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi \quad (1-5)$$

と **grad** を用いる場合もある。

また、 $\frac{\partial}{\partial x}$ という記号は、x-y 平面上の関数 $f(x,y)$ の偏微分の定義である。連続条件など難しい概念を含んでいるが、ここでは詳しく説明しない。

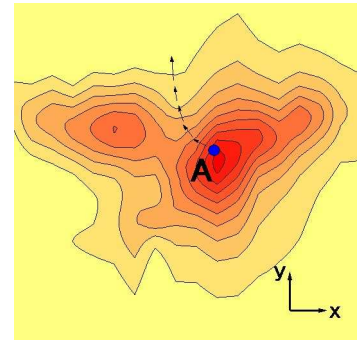


図 1-3

x 方向、y 方向の偏微分係数はそれぞれ、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (1-7)$$

で与えられる。x 方向の傾きの大きさが $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ で表される

(図 1-4)。つまり、2次元平面上の最大勾配の方向を図 1-5 のように x 方向、y 方向に分解して書き表したのが (1-4) 式である。

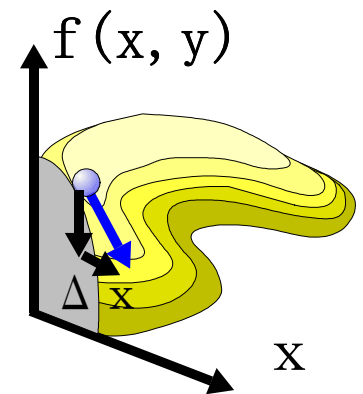


図 1-4

(1-4) 式を三次元に拡張すると、

$$\vec{\nabla}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (1-8)$$

となる。 \vec{k} は z 方向の単位ベクトルである。

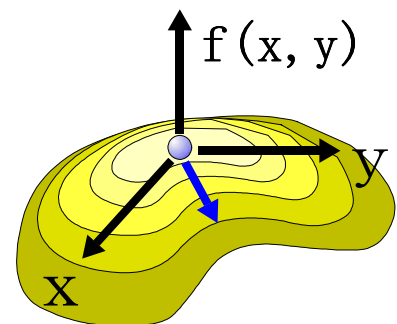


図 1-5

2. 積分

まず、定積分を考える。定積分は和で近似できる。

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x \quad (2-1)$$

但し、 $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ である。Nを大きくしていくと実際の積分値に近くなる。二年の『コンピュータ概論』の授業で、数値計算のプログラムを作って確かめる。

具体的に sin 関数の場合を考えると、図 2-1 (a) よりも図 2-1 (b) の方が積分値に近いことがわかる。

次に円の積分を考える。円の面積を S として、

$$S/4 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (2-2)$$

と書ける。x=at と置換すると、dx=adt となり (2-2) 式は

$$S/4 = \int_0^1 \sqrt{a^2 - a^2 t^2} \cdot a dt = a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$$

さらに、 $t = \sin \theta$ と置換すると、 $dt = \cos \theta d\theta$

t	0	→	1
θ	0	→	π/2

$$S/4 = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \cos \theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

と非常にややこしい計算になる！ここでは Δx と $f(x)$ の短冊 (図 2-2(a)) で考えたが、もともと 2次元の面積の計算なので、 $\Delta x \Delta y$ という小さな正方形 (図 2-2(b)) (面積素) へ拡張する。

$$S/4 = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy dx \quad (2-3)$$

という重積分に書き換えられる。

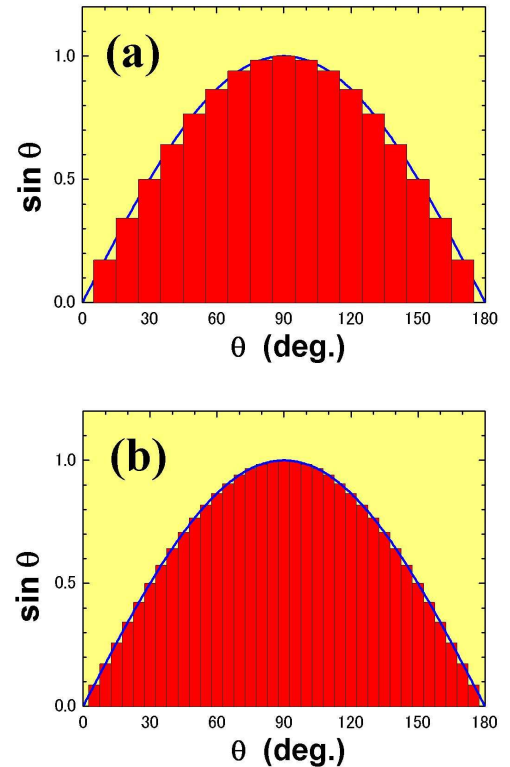


図 2-1

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad (2-3)$$

重積分とは、まず(2-3)式の枠の中を y について積分する (このとき、 x は定数!)。その後、 x について積分する。(2-3)式は、

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx = \int_0^a [y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$$

と変形できる。(2-2) 式と同じように見えるが、考え方が大きく異なる。この面積素の形を図 2-3 の扇型に変更すると、

$$\Delta x \Delta y \rightarrow \Delta r \cdot r \Delta \theta \quad (2-4)$$

と書き換えられる。但し、 Δx , Δy , Δr , $\Delta \theta$ が非常に小さい場合。(2-3)式は、

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx &= \int_0^a \int_0^{\pi/2} r dr d\theta = \int_0^a [\theta]_0^{\pi/2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^a r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4} \end{aligned}$$

となり、簡単に積分ができる。実は、 $x-y$ 座標から **極座標** ($r-\theta$ 座標) に変換して計算している (図 2.4)。座標間の関係は行列で説明できるが、ここでは述べない。物理では多くの現象を回転座標で考えるので極座標はマスターしておきたい! 極座標を 3 次元に拡張するとより一層理解が深まる。

図 2-5 に **$x-y-z$ 座標** と **$r-\theta-\phi$ 座標** の関係を示す。3 次元の極座標では、 θ は z 軸からのなす角、 ϕ は x 軸からのなす角として定義される。3 次元の微小な体積素 (図 2-6) の関係は、

$$\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow \Delta r \cdot r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \phi = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \phi \quad (2-5)$$

となる。

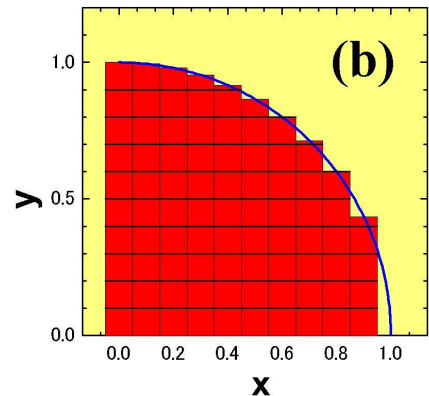
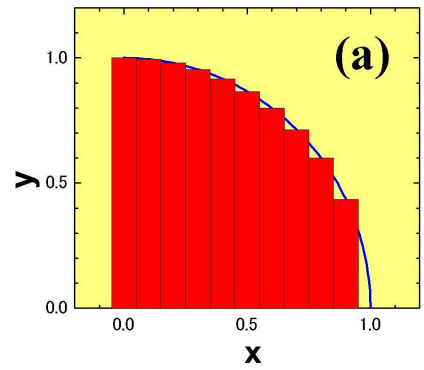


図 2-2

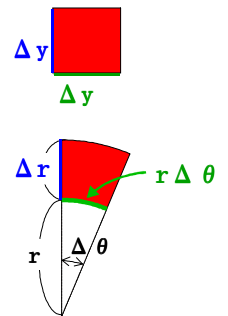


図 2-3

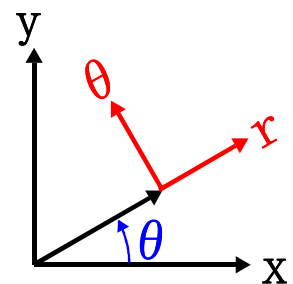


図 2-4

極座標を用いると球の表面積や体積の計算が非常に簡単になる。半径 a の球の場合、

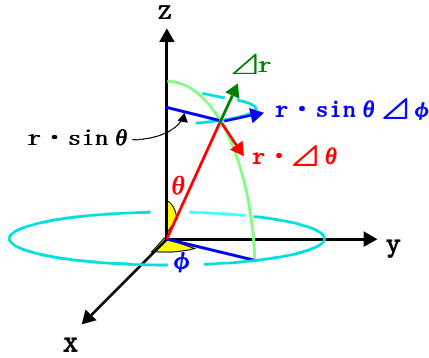


図 2-5

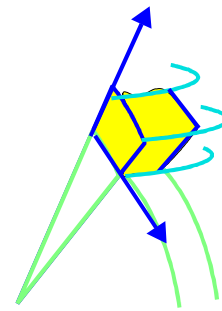


図 2-6

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a d\theta \cdot a \sin \theta d\phi = a^2 \int_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 2\pi a^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi a^2 \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\phi]_0^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \sin \theta d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned} \quad (2-7)$$

となる。

3. 外積

\vec{A} , \vec{B} ベクトルの外積は、

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad (3-1)$$

と表す。外積の大きさは \vec{A} , \vec{B} ベクトルが張

る平行四辺形の面積で、 \vec{A} , \vec{B} ベクトルに対

して垂直のベクトルである (図 3-1)。面に対し

て垂直な方向は 2 つあるが、外積の方向は **右ネジ**

の法則 (右回転でネジが進む方向) に対応している。外積の大きさは次式で表される。

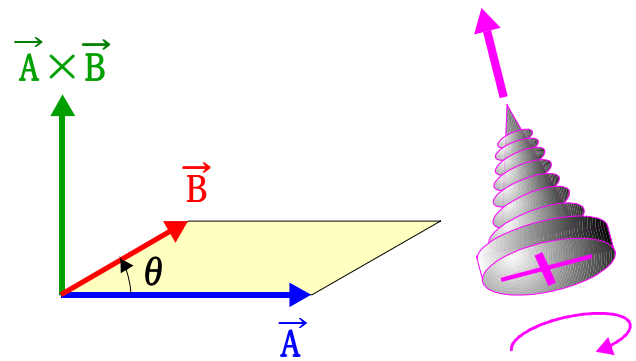


図 3.1

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \quad (3-2)$$

平行四辺形の面積の計算から、

$$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = \sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2(1-\cos^2\theta)} = \sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2} \quad (3-3)$$

の関係が求まる。二次元のベクトル成分で計算すると、

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = [x_1 \quad y_1] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (3-4)$$

$$|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \quad (3-5)$$

(3-4) 式と (3-5) 式を (3-3) 式に代入すると、平行四辺形の面積 S は、

$$S = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |x_1y_2 - x_2y_1| \quad (3-6)$$

が求まる。これらのことを考慮して外積を 3 次元に拡張すると、

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

となる。また、線形代数の余因子定理を用いると、

$$\begin{aligned} \vec{A}\times\vec{B} &= \begin{bmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3-8)$$

の関係が求まる。

4. 面積ベクトル

面積はスカラーなのに“面積ベクトル”とは一体どういうことなのか？まず図 4.1 のような単位法線ベクトル \vec{n} を導入する。単位法線ベクトルとは大きさが 1 で面に対して垂直なベクトルである。右ネジの法則にしたがってベクトルの向きが決まる。

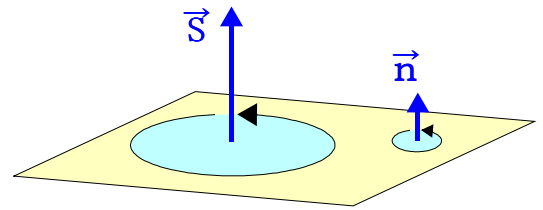


図 4.1

$$\vec{S} = |\vec{S}| \vec{n}$$

(4-1)

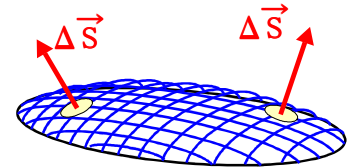


図 4.2

曲面でも図 4.2 の微小領域（平面） ΔS で近似できる。

次に面積ベクトルを応用して体積計算を行う。底面積 S をベクトル \vec{A} に平行移動させたとき（図 4.3）、 S が移動した体積は、

$$V = |\vec{S}| h = |\vec{S}| |\vec{A}| \cos \theta = \vec{S} \cdot \vec{A}$$

(4-2)

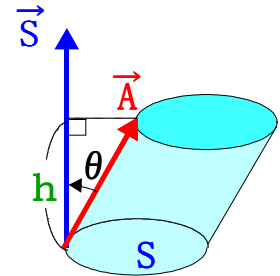


図 4.3

となる。高さ h がベクトル \vec{A} の射影である。面積ベクトルを用

体積が計算できる。さらに、平行六面体（図 4.4）の体積も面積いてベクトルを用いて計算できる。底面の面積を S とすると、

$$V = |\vec{S}| h = |\vec{S}| |\vec{A}| \cos \theta = \vec{A} \cdot \vec{S} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

(4-3)

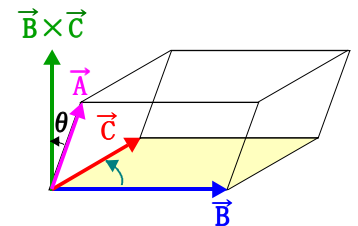


図 4.4

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ を三重積と呼ぶ。

$$\vec{A} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

(4-4)

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

(4-5)

式 (4-4) と式 (4-5) を用いて、三重積をベクトル成分で書き表すと、

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

(4-6)

となる。

5. 発散

ここでは電磁気で使うもう一つの重要な概念である『**発散 (divergent)**』を学ぶ。図 5.1 のようにホースから出る水の流は、図 1.3 のスカラー場に対してベクトル場にある。場所によって水の流速の向きと大きさが変化している。x 方向の流れ $F(x)$ が Δx 流れた時の流量増大の割合は、

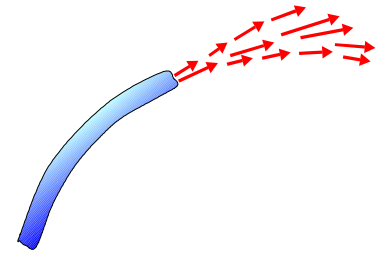


図 5.1

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial x} \quad (5-1)$$

と表せる。勾配の $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ と異なることに注意せよ！y 方向、z 方向には $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ だけ増大するので、全体の増大の割合（3次元の増加率）は、

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad (5-2)$$

となる。(5-2) 式は和と仮定して表した。実際に直方体の体積 V を考えて確かめる。

$$V = xyz \quad (5-3)$$

の体積が、 $x \rightarrow x + \Delta x$ 、 $y \rightarrow y + \Delta y$ 、 $z \rightarrow z + \Delta z$ に膨張すると考えると、膨張後の全体の体積 $V + \Delta V$ は、

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) = xyz \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) \left(1 + \frac{\Delta z}{z} \right) = V(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \\ &= V(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \dots) \end{aligned}$$

ε が小さいとき、 ε の 2 次以上の項は非常に小さくなり無視することができる。結局、

$$V + \Delta V \cong V(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = V + V(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\Delta V \cong V(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\frac{\Delta V}{V} \cong \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (5-4)$$

となり、体積の増大率は各方向の増大率の和に等しいことがわかる。

(5-2) 式は

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (5-5)$$

と **div** を使って角場合もある。図を使って発散をイメージしよう！まず定常状態（どこの場所でも流れが一定）の場合を考える（図 5.2）。y 方向への水の流れをベクトル \vec{A} で表す。ナブラ $\vec{\nabla}$ を x 方向にとると、なす角が 90° なので、

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

となり、発散は 0 となる。ホースから水が出たときは図 5.3 のようになり発散は $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} > 0$ となり、増大していることがわかる。逆に減少のときは $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} < 0$ となることも理解できる。

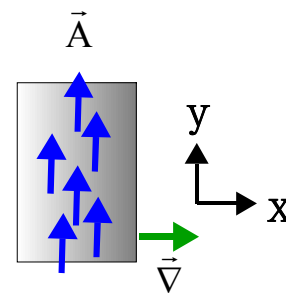


図 5.2

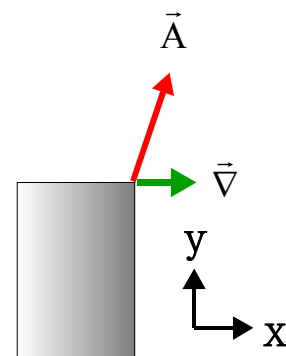


図 5.3

6. 回転

『勾配 (gradient)』、『発散 (divergent)』と並んで、電磁気で理解しにくい御三家の一つが『回転 (rotation)』である。物理では回転する現象が多い。どのように“回転の強さ”を数学で表すことができるだろうか？例えば流速の違う水の流れに葉っぱを浮かせると、葉っぱが回りながら流れる（図 6.1）。また、回転モーメントは Δx に反比例するので、回転は、

$$\frac{F_y(x + \Delta x) - F_y(x)}{\Delta x} \quad (6-1)$$

と書ける。 Δx の極限をとると、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_y(x + \Delta x) - F_y(x)}{\Delta x} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (6-2)$$

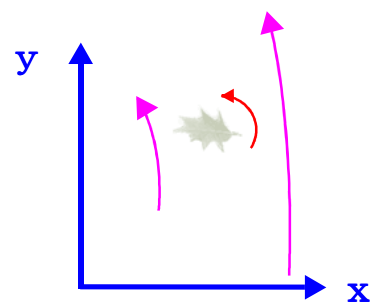


図 6.1

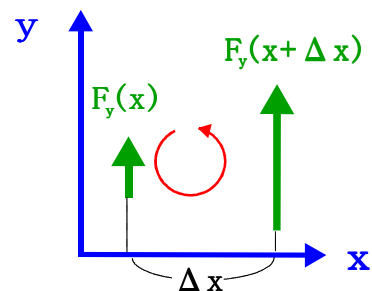


図 6.2

が求まる。同様に x 方向の流れは、

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_x(y + \Delta y) - F_x(y)}{\Delta y} = -\frac{\partial F_x}{\partial y} < 0 \quad (6-3)$$

図 6.2 と同じ方向に回転させるために偏微分係数が負になる (図 6.3)。発散のときも変化率の重ね合わせで 2 次元に拡張できたので、結局、 $x-y$ 平面の回転は、

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (6-4)$$

となる。(6-4) 式の意味は図 6.4 で表現できる。回転の向きは『**右ネジの法則**』で決まる。回転はベクトルになる。(6-4) 式は、

$$(\text{rot} \vec{F})_z = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (6-5)$$

となる。これを 3 次元に拡張すると、

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (6-6)$$

となる。ここで『勾配』、『発散』、『回転』をまとめる。

まとめ				
勾配:	スカラー	⇒	grad	⇒ ベクトル
発散:	ベクトル	⇒	div	⇒ スカラー
回転:	ベクトル	⇒	rot	⇒ ベクトル

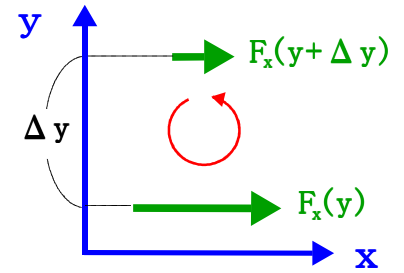


図 6.3

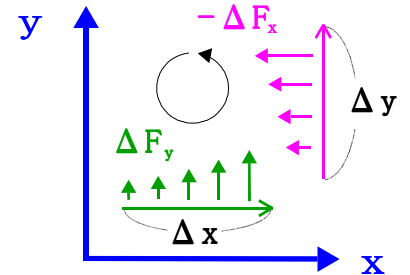


図 6.4

$$\text{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

7. ガウスの発散定理

発散の割合を div を用いて定義した。ここでは発散量 (体積) を求める。一般に、場所によって発散する割合が変化するので、積分をしなければならない。体積素を dV として体積 V だけ積分すると、

$$\text{発散量} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv \quad (7-1)$$

となる。一方、(4-2) 式のように面積ベクトルを用いた体積計算を考える。平面の場合の ΔS が作る体積は円柱状になり、水の流れていうと定常流であるといえる (図 7.1)。また、曲面で考えると、曲面の方が平面に比べて積分した S が大きくなる (図 7.2)。つまり、平面に対して曲面が作る体積の方が大きくなり、水の流れていうと発散している。結局、面積ベクトルを用いた 面積積分 で発散量を計算することができる。

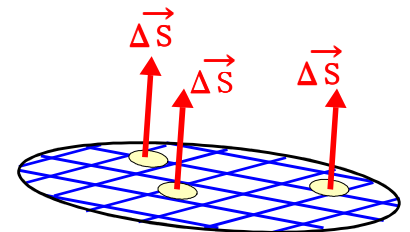


図 7.1

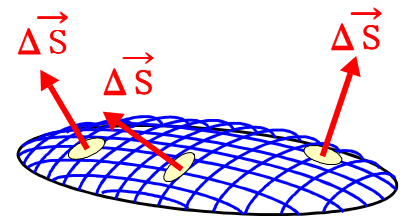


図 7.2

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (7-2)$$

これがガウスの発散定理である。厳密に数学的な証明をしなければならないがここでは述べない。図 7.3 から、曲面で発散を表現できることがわかる。

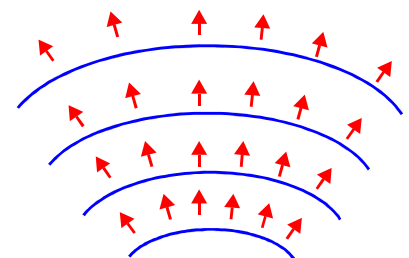
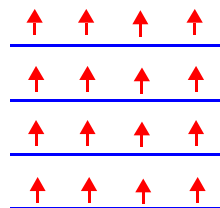


図 7.3

8. ストークスの定理

学生にとって最大の難関がストークスの定理である。まず、スカラー場 ϕ の線積分を考える。図 8.1 の経路 C (A 地点から B 地点まで) の長さは微小な線素 Δs の足し合わせとして考えられる。場所によって ϕ の大きさが変わるので、

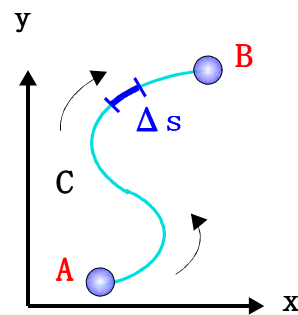


図 8.1

$$\int_C \phi(s) ds \quad (8-1)$$

と表される。太さのない理想的な金属ワイヤーを考える。場所によって合金の組成比が変化する場合、線密度 $\rho(s)$ [g/cm] が変化する。線密度が $\rho(s) = e^{-s/\pi a}$ で与えられるときの金属ワイヤー全体の質量を計算する。金属ワイヤーの形状は半径 a の半円で、角度 θ の弧の長さ s は $a\theta$ なので、 $\Delta s = a\Delta\theta$ となる。全質量 m は、

$$m = \int_C \rho(s) ds = \int_0^\pi e^{-s/\pi a} a d\theta = a \int_0^\pi e^{-\theta/\pi} d\theta = a [-\pi e^{-\theta/\pi}]_0^\pi = \pi a (1 - e^{-1}) \quad (8-2)$$

となる。ベクトル場の線積分は、

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad (8-3)$$

と書き換えられる。また、B 地点から A 地点の経路を $-C$ とすると、 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ なので (図 8.2)、

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot \vec{ds} = -\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds} \quad (8-4)$$

となることがわかる。これは非常に重要な性質で、閉回路の周積分のときに活躍する。

ベクトル場の線積分を閉回路 C の 1 周積分に応用する (図 8.3)。線積分を $\int_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ と表記したが、これと区別するために閉回路 C の周積分を $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{ds}$ とする。(8-4) 式を周積分に適用させると、図 8.4 のよ

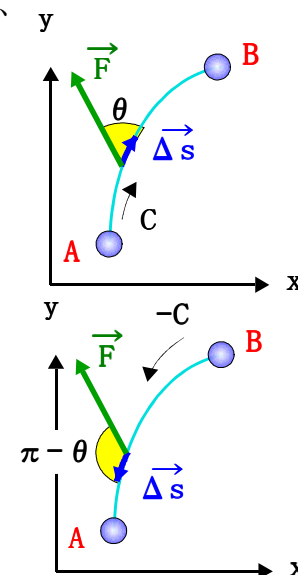


図 8.2

うに、隣り合う 経路 C₁ と 経路 C₂ の周積分は赤い矢印の部分で打ち消しあうので、経路 C₃ の周積分と同じになる。つまり、

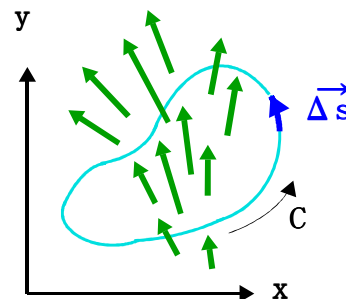
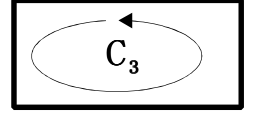
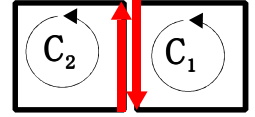


図 8.3

$$\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (8-5)$$



が成り立つ。

このアイデアを基に『[ストークスの定理](#)』にアプローチする。まず、微小な三角形 $P_1P_2P_3$ を考える (図 8.5)。この閉回路 C の周積分を行う。

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \cong \vec{A} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{P_2P_3} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{P_3P_1} \quad (8-6)$$

図 8.4

線分 P_1P_2 の中点の位置ベクトルは次のように近似できる。

$$\vec{A}\left(\mathbf{x} + \frac{\Delta\mathbf{x}}{2}\right) \cong \vec{A}(\mathbf{x}) + \frac{\Delta\mathbf{x}}{2} \frac{\partial \vec{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} A_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ A_y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

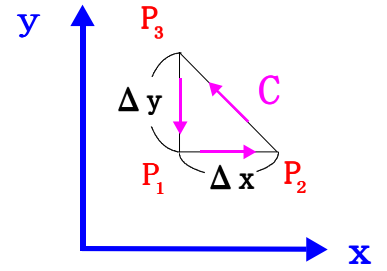


図 8.5

また、 $\overrightarrow{P_1P_2}$ は、

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-8)$$

となる。同様に、線分 P_3P_1 の中点ベクトルと $\overrightarrow{P_3P_1}$ は、

$$\vec{A}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cong \vec{A}(y) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \vec{A}(y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} A_x + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ A_y + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

$$\overrightarrow{P_3P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta y \end{bmatrix} \quad (8-10)$$

となる。線分 P_2P_3 は、

$$\vec{A}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}\right) \cong \vec{A}(x, y) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \vec{A}(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial \vec{A}(x, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} A_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ A_y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8-11)$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{bmatrix} -\Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (8-12)$$

となる。(8-6)式の右辺の内積をそれぞれ計算すると、

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = \left(A_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \Delta x \quad (8-13)$$

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{P_3 P_1} = - \left(A_y + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta y \quad (8-14)$$

$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{P_2 P_3} = - \left(A_x + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x + \left(A_y + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta y \quad (8-15)$$

が求まる。結局、(8-13), (8-14), (8-15) を足し合わせると、

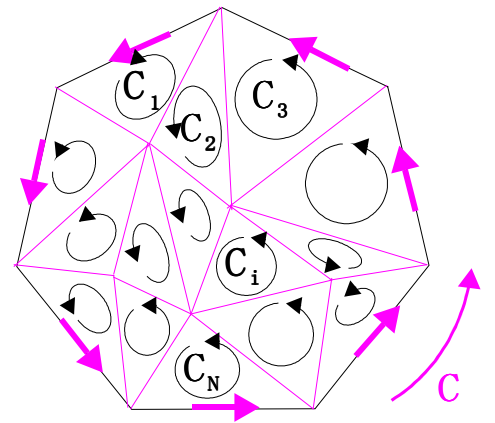
$$\vec{A} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{P_2 P_3} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{P_3 P_1} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \quad (8-16)$$

となる。微小三角形の面積 ΔS は、 $\frac{\Delta x \Delta y}{2}$ となるので、(8-6)式と (8-16) 式から、

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \cong \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta S = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z (\Delta S) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta S \end{bmatrix} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \Delta \vec{S} \quad (8-17)$$

が求まる。“微小三角形の周積分” = “ベクトル場の回転と微小面積ベクトルの内積” となる。ここで、図 8.6 の正七角形の周積分 C を考える。正七角形を N 個の三角形に分割して、(8-5) 式の関係を用いると、

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (8-18)$$



が計算される。また、(8-17) 式の右辺の面積 ΔS_i (微小三角形) を足し合わせる。正八角形の面積を S とすると、

図 8.6

$$\sum_{i=1}^N (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \Delta \vec{S}_i \cong \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (8-19)$$

が近似的に成り立つ。(8-17) 式、(8-18) 式、(8-19) 式をから、ストークスの定理

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (8-20)$$

が求められる。(8-20) 式の意味を考える。 $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ は単位面積あたりの回転の強さと回転の向き(右回り、左回り)を表したものである。一般に、回転と面が垂直とは限らない(図 8-7)。任意の曲面の面積分

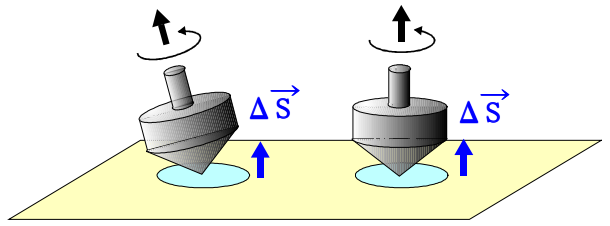


図 8.7

をするので、面積ベクトルの射影 $(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \Delta\vec{S}$ が必要になる。つまり、(8-20) 式の左辺は、任意の曲面の面積 S における回転量を計算している。実は面積ベクトルの射影の和なので、いかなる曲面の積分でも一定になる。例えば、図 8.8 のように $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ が y 軸方向に一定の場合を考える。図 8.8 は曲面 S を半球として、これを輪切りにしたものである。また、それぞれのベクトルは、

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta\vec{S} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

となる。(8-20) 式の左辺の積分をすると、

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi [0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} a \cdot d\theta$$

$$= a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = a[-\cos \theta]_0^\pi = 2a$$

となり、平面の場合の積分と同じになる。 $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ と面積ベクトルが平行の場合は $2a$ なので、半球の曲面と平面は同じ値になる。曲面の場合は S が大きくなる反面、射影成分が小さくなるのでトータルの積分は平面の場合と変わらない。

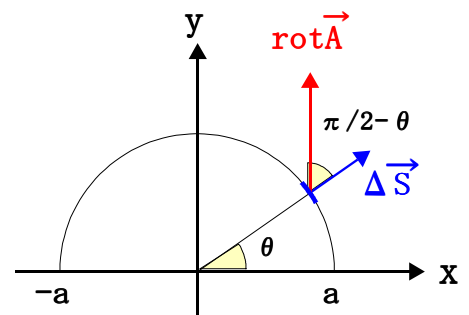


図 8.8

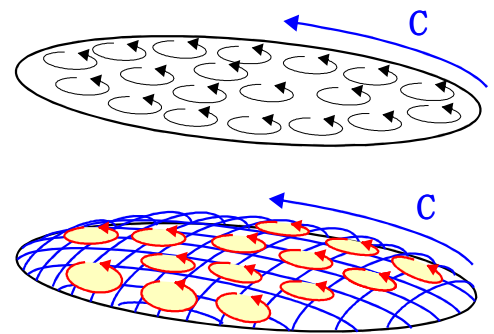


図 8.9

同じようなことが、閉回路の周積分((8-20) 式の右辺)でも起こる。図 8.9 のように、閉回路の中が平面でも曲面でも ΔS 微小領域の周積分は図 8.4 のようにお互いに打ち消し合う。その結果、周積分の積分値は同じになる。

つまり、ストークスの定理は、違うアプローチで閉回路における回転量は任意の曲面で成り立つことを示している。また、閉回路 C が決まれば、ベクトル場の回転量は曲面に依存しないでユニークに求められる。

9. テイラー展開

物理では解析的に解けない問題が多いのでいかに上手く近似できるかがポイントになる。高校数学では厳密に問題を解いてきたので、多少戸惑うかもしれない。しかし、思い切っ
て余分なものを切り落とすことによって“本質”が見えることもある。複雑な相互作用が働いている現象を取り扱うので、あまりに細かく厳密に考えると大切な全体像を見失うことが多々ある。

複雑な関数を多項式で近似しようという考えがテイラー展開である。多項式のメリットは微分、積分が簡単に行える点である。まず、ある関数 $f(x)$ が多項式で書けると仮定する。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (9-1)$$

(9-1) 式の 1 階微分、二階微分、三階微分、 n 階微分はそれぞれ、

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)!a_{n+1}x + \dots \quad (9-2)$$

となる。それぞれの $x=0$ のときの値は、

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2 \cdot 1a_2$$

$$f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3$$

$$f^{(n)}(0) = n!a_n \quad (9-3)$$

となる。(9-3) 式を (9-1) 式に代入すると、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \dots \quad (9-4)$$

が求まる。これがテイラー展開である。指数関数 e^x をテイラー展開すると、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \quad (9-5)$$

となる。一方、 $e^{i\theta}$ は、

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}i\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 \dots + \frac{1}{n!}i^n\theta^n + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots\right) \end{aligned} \quad (9-6)$$

と計算できる。また、 $\cos \theta$ のテイラー展開は、

$$\begin{aligned} (\cos \theta)' &= -\sin \theta \\ (\cos \theta)'' &= -\cos \theta \\ (\cos \theta)^{(3)} &= \sin \theta \\ (\cos \theta)^{(4)} &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(0) &= 0 \\ f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

から、

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \quad (9-7)$$

となり、同じように、 $\sin \theta$ は、

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \quad (9-8)$$

となる。(9-6) 式、(9-7) 式、(9-8) 式を比べると、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (9-9)$$

が求まる。この美しい式がオイラーの公式である。

次に、テイラー展開を用いた $\sin \theta$ の近似をグラフで確かめる (図 9-1)。 $\theta = 0$ の近傍で $\sin \theta$ とほとんど同じ値をとる。さらに n を大きくすると、 $\theta = 0$ 付近の近似度が上がることがわかる。

物理でよく使う近似は、 $x \doteq 0$ のとき、

$$(1+x)^n \cong 1+nx \quad (9-10)$$

$$\log_e(1+x) \cong x \quad (9-11)$$

である。各自、これらの関数のテイラー展開を計算して確かめよ！

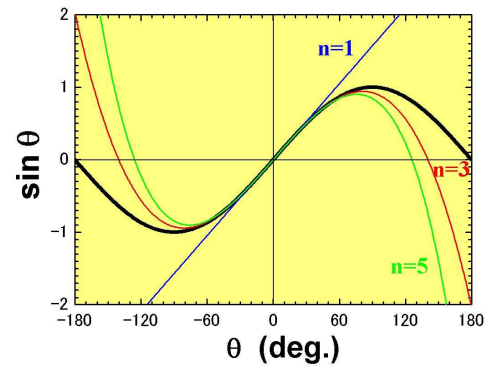


図 9.1

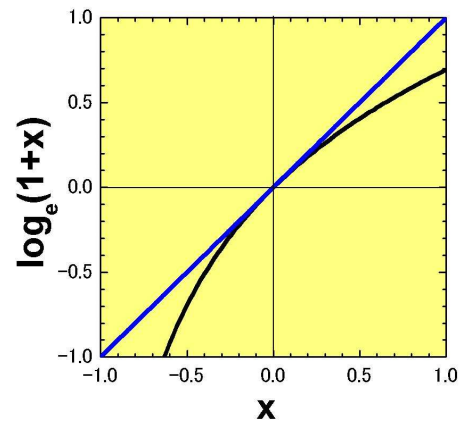


図 9.2