

# 超音波の基礎

改訂版

機能材料工学科 阿部 洋

# 目次

<b>1. 音響振動と音場</b>	
§ 1.1 音圧	3
§ 1.2 速度ポテンシャル	4
§ 1.3 音響インピーダンス	5
§ 1.4 超音波の反射と透過	6
<b>2. 液浸法（パルス超音波透過）</b>	
§ 2.1 超音波吸収	8
§ 2.2 減衰定数	8
§ 2.3 音速測定	9
§ 2.4 測定例	9
<b>3. 横波反射法を用いたずりインピーダンス測定</b>	
§ 3.1 弾性	10
§ 3.2 粘性	10
§ 3.3 粘弾性	11
§ 3.4 音波の緩和現象	15
<b>付録A 弾性論</b>	17

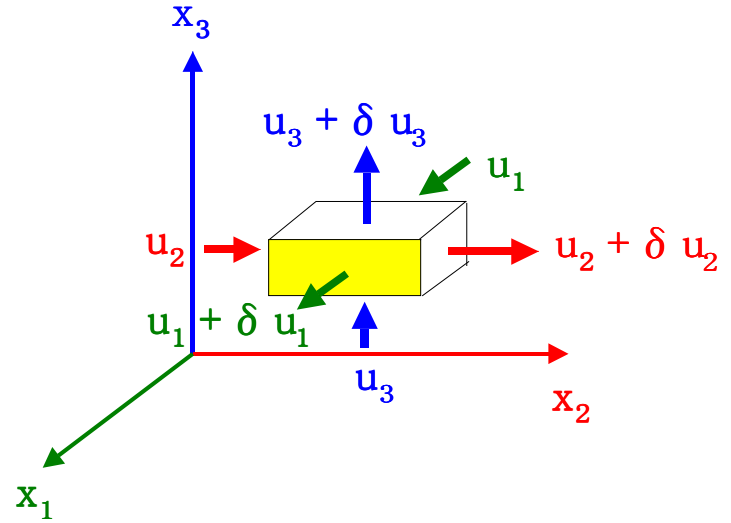
## 参考文献

# 1. 音響振動と音場

## § 1.1 音圧

$\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ :	微小体積
$\rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ :	微小体積の質量
$u_1, u_2, u_3$ :	$x_1, x_2, x_3$ 方向の変位

$x_1$  方向の音圧  $p$  によって受ける力は図 1・1 のように



$$F_1 = p \delta x_2 \delta x_3$$

$$F_1 + \frac{\delta F_1}{\delta x_1} = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \delta x_2 \delta x_3$$

$$\delta F_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

となる。

図 1・1 音場におかれた微小六面体の変位

微小体積は音圧の逆方向に反作用するので、

$$-\delta F_1 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \ddot{u}_1$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho \ddot{u}_1 \quad , \quad -\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho \ddot{u}_2 \quad , \quad -\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho \ddot{u}_3 \quad (1 \cdot 1)$$

ここで  $\rho$  は密度である。

体積変化  $\delta V$  は、

$$V + \delta V = V \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \approx V \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\delta V \approx V \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$$

となるので、『体積弾性率』を  $K$  とすると、 $\delta p = -K \frac{\delta V}{V}$  の

関係 (図 1・2) から、

$$\delta p = -K \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (1 \cdot 2)$$

が求められる。付録 A の弾性論では応力  $\sigma$  と歪  $\varepsilon$  を使って

$$\sigma = K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

と表せる。

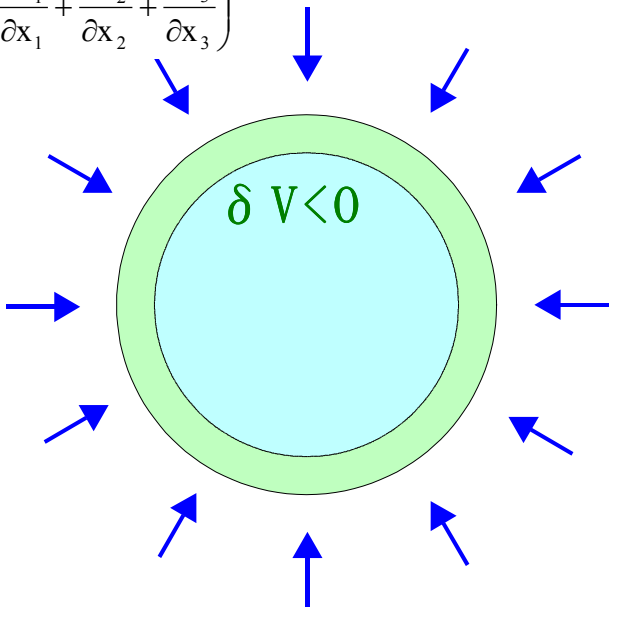


図 1・2 体積弾性率

## § 1.2 速度ポテンシャル

電磁気学の電位（電気ポテンシャル）と電場の関係と同様に、変位速度は『速度ポテンシャル』を用いて表現できる。点電荷  $q$  があるときの電位  $V$  と電場  $E$  の関係は

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

となる。同様に、速度ポテンシャルを  $\phi$  とすると、 $\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi$  に従うように速度ポテンシャルから速度場ができる  
と考える。速度ポテンシャル  $\phi$  の定義は、

$$\dot{u}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \quad \dot{u}_2 \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \quad \dot{u}_3 \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial x_3} \quad (1 \cdot 3)$$

(1・1) 式と (1・3) 式を時間で偏微分した  $\ddot{u}_1 = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_1}$  より、

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho\ddot{u}_1 = -\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\partial t} \quad \text{となり、} x_1 \text{ で積分すると、}$$

$$p = \rho\dot{\phi} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad (1 \cdot 4)$$

$C$  を大気圧とすると、超音波による圧力変化は  $\delta p = \rho\dot{\phi}$  となる。

(1・2) 式を時間で微分して、(1・3) 式を位置で偏微分した  $\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_1} \equiv -\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}$  を代入すると、

$$\delta\dot{p} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} = -K\left(\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\dot{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\dot{u}_3}{\partial x_3}\right) = K\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right) = K\Delta\phi \quad (1 \cdot 5)$$

(1・4) 式と (1・5) 式より、 $p$  を消去すると、 $\rho\ddot{\phi} = K\Delta\phi$  となり、

$$\Delta\phi - \frac{\rho}{K}\ddot{\phi} = 0 \quad (1 \cdot 6)$$

$\phi^* = \phi_0 e^{i\omega t}$  とすると、(1・6) 式は、

$$\left(\Delta + \omega^2 \frac{\rho}{K}\right)\phi^* = (\Delta + k^2)\phi^* = 0 \quad (1 \cdot 7)$$

$x_1$  方向に伝播する平面は、 $\left(\frac{d^2}{dx_1^2} + k^2\right)\phi^* = 0$  となるので、この方程式の一般解は、

$$\phi^* = \xi_+ e^{i(\omega t - kx_1)} + \xi_- e^{i(\omega t + kx_1)} \quad (1 \cdot 8)$$

$\xi_+$ ,  $\xi_-$  は、正方向、負方向に伝播する波の振幅を表す。 $k$  は波数ベクトル。

### § 1.3 音響インピーダンス

音波の伝播速度  $c$  は、正方向 ( $x_1$  方向) に伝播する波を考えると、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1 \cdot 9)$$

$$(1 \cdot 4) \text{ 式の } p = \rho \dot{\phi} + C \text{ から、 } p = \xi_+ i \omega \rho e^{i(\omega t - kx_1)} \quad (1 \cdot 10)$$

$$(1 \cdot 3) \text{ 式の } \dot{u}_1 \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \text{ から、 } \dot{u}_1 = \xi_+ i k e^{i(\omega t - kx_1)} \quad (1 \cdot 11)$$

電磁気学のインピーダンス (抵抗) と同様に『音響インピーダンス』  $z$  を定義する。

$$z \equiv \frac{p}{\dot{u}_1} = \frac{\omega \rho}{k} = \rho c \quad (1 \cdot 12)$$

電気回路 (交流) で、電流・電圧の波が伝わる場合に (電圧/電流) の比を特性インピーダンスと呼ぶので、平面音波の伝播に対しても同じように、(音圧 / 変位速度) の比を『固有音響インピーダンス』と呼ぶ。

	外場	応答	インピーダンス
電磁気学	電圧	電流	$R = V / I$
音響学	音圧	変位速度	$z = p / v$

平面音波が減衰すると変位  $u$  は、

$$u = u_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)} = u_0 e^{-\alpha x} e^{i\omega(t - x/c)} = u_0 e^{i\omega(t - x/c + i\alpha x/\omega)} = u_0 e^{i\omega(t - x/c^*)} \quad (1 \cdot 13)$$

『減衰定数』を  $\alpha$  [dB / cm] とすると、減衰のある音波の音速度は複素音速度  $c^*$  で表される。超音波周波数による音速の分散が見られる。

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} - i \frac{\alpha}{\omega}, \quad k^* = \frac{\omega}{c} - i\alpha \quad (1 \cdot 14)$$

### § 1.4 超音波の反射と透過

図 1・3 のように異なる媒体 1 と媒体 2 として、平面波の入射 (Incident)、反射 (Reflection)、透過 (Transmission) を考える。

境界条件は、境界 ( $x_1=0$ ) の両側で粒子速度が等しい、境界の両側で音圧が等しい、ということである。

(1・3) 式より、粒子速度は、 $\dot{u} \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x}$  となるので、

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_i + \dot{u}_r = -ik_1 \left\{ -\xi_{1+} e^{i(\omega t - k_1 x)} + \xi_{1-} e^{i(\omega t + k_1 x)} \right\}$$

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_t = ik_2 \xi_{2+} e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

$x_1=0$  のとき、 $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$  となるので、

$$k_1 \{ \xi_{1+} - \xi_{1-} \} = k_2 \xi_{2+} \quad (1 \cdot 15)$$

(1・4) 式より、音圧  $p = \rho \dot{\phi} + C$  となるので、

$$p_1 = p_i + p_r = i\omega \rho_1 \{ \xi_{1+} e^{i(\omega t - k_1 x)} + \xi_{1-} e^{i(\omega t + k_1 x)} \}$$

$$p_2 = p_t = i\omega \rho_2 \xi_{2+} e^{i(\omega t - k_2 x)}$$

$x_1=0$  のとき、 $p_1=p_2$  となるので、

$$\rho_1 \{ \xi_{1+} + \xi_{1-} \} = \rho_2 \xi_{2+} \quad (1 \cdot 16)$$

(1・15) 式を (1・16) 式で割ると、

$$\frac{k_1}{\rho_1} \cdot \frac{\xi_{1+} - \xi_{1-}}{\xi_{1+} + \xi_{1-}} = \frac{k_2}{\rho_2} \quad , \quad \frac{\omega}{\rho_1 c_1} \cdot \frac{\xi_{1+} - \xi_{1-}}{\xi_{1+} + \xi_{1-}} = \frac{\omega}{\rho_2 c_2} \quad , \quad z_2 (\xi_{1+} - \xi_{1-}) = z_1 (\xi_{1+} + \xi_{1-})$$

反射率 R は、

$$R = \frac{\xi_{1-}}{\xi_{1+}} = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} \quad (1 \cdot 17)$$

(1・15) 式から  $\xi_{1-} = \xi_{1+} - \frac{k_2}{k_1} \xi_{2+}$  となり、(1・16) 式に代入すると、

$$2\rho_1 \xi_{1+} = \xi_{2+} \left( \rho_1 \frac{k_2}{k_1} + \rho_2 \right)$$

$k_1 = \omega / c_1, k_2 = \omega / c_2$  なので、透過率 T は、

$$T = \frac{\xi_{2+}}{\xi_{1+}} = \frac{2\rho_1 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \quad (1 \cdot 18)$$

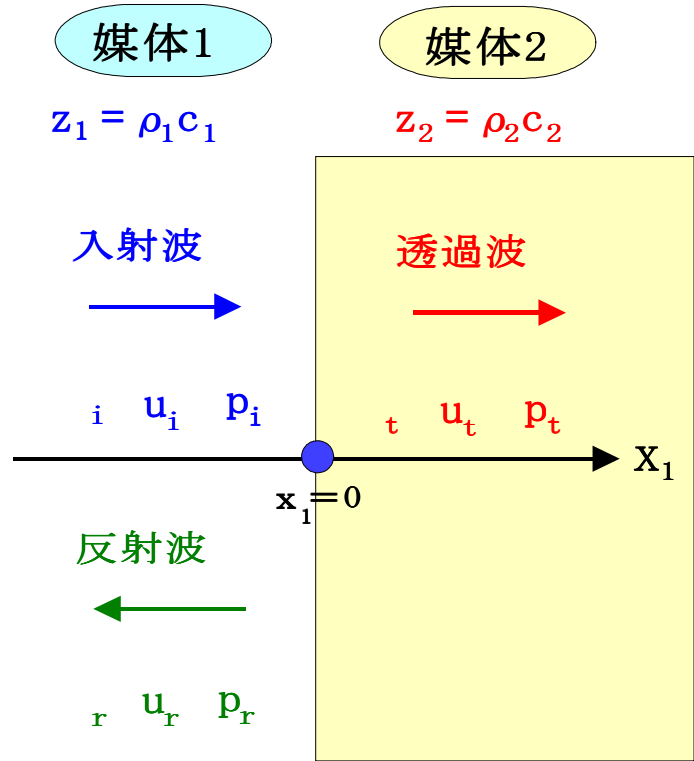


図 1・3 異媒質境界面への垂直入射

電気回路でのインピーダンスと音響インピーダンスの対応で、

(電圧 → 音圧), (電流 → 変位速度)

となるので電気エネルギー  $P = IV$  から、単位時間に単位面積を通過する『エネルギー音響密度』は、

$\dot{u}p$

となる。

超音波強度の  $R_I$  は、(1・10) 式、(1・11) 式を考慮すると、

$$p_i = i\omega\rho_1\xi_{1+}e^{i(\omega t - k_1x)}, \quad p_r = i\omega\rho_1\xi_{1-}e^{i(\omega t + k_1x)}, \quad p_t = i\omega\rho_2\xi_{2+}e^{i(\omega t - k_2x)}$$

$$\dot{u}_i = ik_1\xi_{1+}e^{i(\omega t - k_1x)}, \quad \dot{u}_r = -ik_1\xi_{1-}e^{i(\omega t + k_1x)}, \quad \dot{u}_t = ik_2\xi_{2+}e^{i(\omega t - k_2x)}$$

が求められる。

(1・17) 式を用いて、

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{\xi_{1-}}{\xi_{1+}} = R = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2},$$

$$\frac{\dot{u}_r}{\dot{u}_i} = -\frac{\xi_{1-}}{\xi_{1+}} = -R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

従って、音響エネルギー(Intensity)の反射率  $R_I(>0)$  は、

$$R_I = \frac{\dot{u}_r p_r}{\dot{u}_i p_i} = \left( \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \right)^2 \quad (1 \cdot 19)$$

同様に (1・18) を用いて、

$$\frac{p_t}{p_i} = \frac{\rho_2 \xi_{2+}}{\rho_1 \xi_{1+}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} T = \frac{2\rho_2 c_2}{z_1 + z_2}$$

$$\frac{\dot{u}_t}{\dot{u}_i} = \frac{k_2 \xi_{2+}}{k_1 \xi_{1+}} = \frac{c_1 \xi_{2+}}{c_2 \xi_{1+}} = \frac{c_1}{c_2} T = \frac{2\rho_1 c_1}{z_1 + z_2}$$

従って、音響エネルギーの透過率  $T_I$  は、

$$T_I = \frac{\dot{u}_t p_t}{\dot{u}_i p_i} = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2} \quad (1 \cdot 20)$$

## 2. 液浸法（パルス超音波透過）

### § 2.1 超音波吸収

強度損失を表すデシベル[dB]は、入射強度と透過強度の比の常用対数を10倍したものである。

損失  $L_0$  [dB] は、

$$L_0 = 10 \cdot \log_{10} \frac{I_i}{I_t} = 20 \cdot \log_{10} \frac{\xi_i}{\xi_t} \quad (2 \cdot 1)$$

$L_0$  には、界面での反射による損失  $L_r$  も含まれている。試料の吸収が大きく、試料中の多重反射の影響が無視できるときは、(1・19)式より

$$L_r = -10 \cdot \log_{10} \{1 - R_1\} = 10 \cdot \log_{10} \frac{(z_1 + z_2)^2}{4z_1 z_2}$$

液体の密度  $\rho_0$ 、液体の音速  $c$ 、試料の密度  $\rho$ 、試料の音速  $v$  として、 $r_{12} = \frac{\rho v}{\rho_0 c}$  を用いると、

$$L_r = 10 \cdot \log_{10} \frac{(1 + r_{12})^2}{4r_{12}} \quad (2 \cdot 2)$$

図 2.1 のように、液浸法では2回反射が起きるので、

$$L = L_0 - 2L_r = 20 \cdot \log_{10} \frac{\xi_i}{\xi_t} - 20 \cdot \log_{10} \frac{(1 + r_{12})^2}{4r_{12}} \quad (2 \cdot 3)$$

試料の厚さを  $d$  [cm] として1cmあたりの減衰  $\bar{L}$  [dB/cm]は、

$$\bar{L} = \frac{L}{d} \quad (2 \cdot 4)$$

となる。

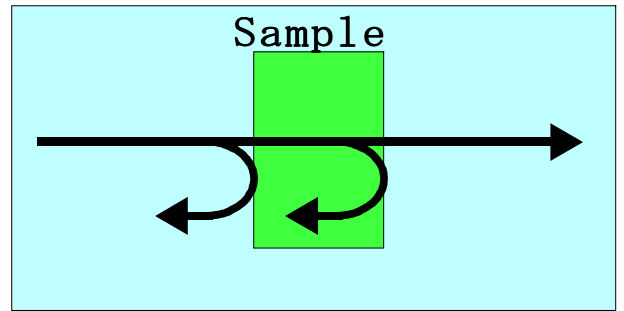


図 2.1 超音波の反射

### § 2.2 減衰定数

(1・14) 式から、『減衰定数』  $\alpha$  [dB/cm]が導出されたが、実験では(2・3)式の超音波吸収のデータを用いて計算することができる。 $d$  [cm] 進んだときのエネルギー損失  $L$  は、

$$L = 20 \cdot \log_{10} \frac{e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha(x+d)}} = 20\alpha d \cdot \log_{10} e = 8.686 \cdot \alpha d$$

となるので、(2・4)式を用いて、

$$\bar{L} = 8.686 \cdot \alpha \quad (2 \cdot 5)$$

減衰定数  $\alpha$  [neper/cm] が実験的に求められる。

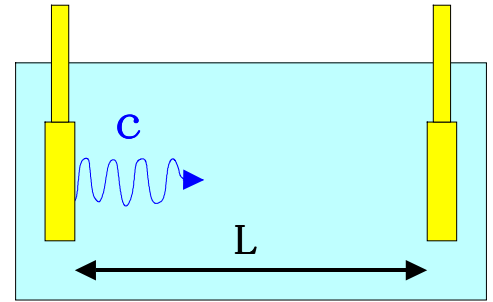


### § 2.3 音速測定

音速は、図 2・2 のように試料があるときと試料がないときの測定により求められる。

試料がないときの時間： $t_1 = \frac{L}{c}$ 試料があるときの時間： $t_2 = \frac{L-d}{c} + \frac{d}{v}$
--

(2・4)



$$\Delta t = t_2 - t_1 = -\frac{d}{c} + \frac{d}{v} = d\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{v} = \frac{\Delta t}{d} + \frac{1}{c} = \frac{c\Delta t + d}{cd}$$

$$v = \frac{cd}{c\Delta t + d}$$

(2・5)

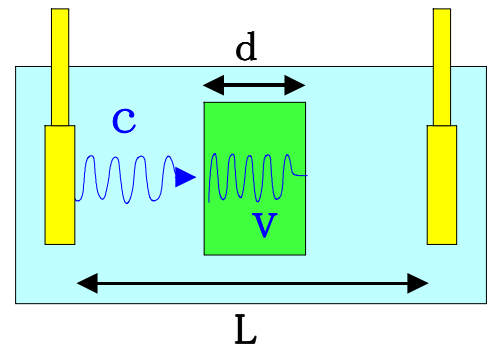


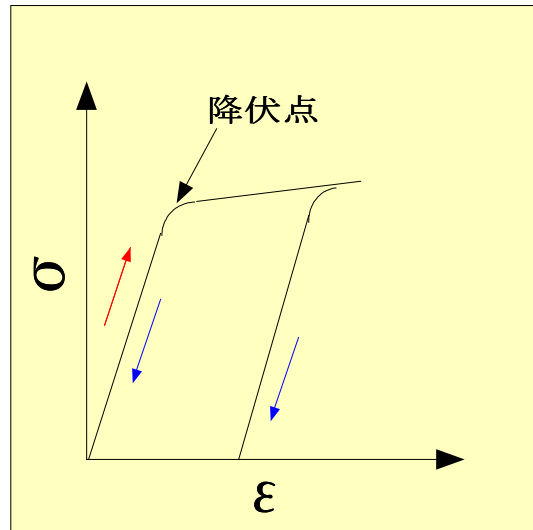
図 2・2 液浸法による音速測定

### § 2.4 測定例

### 3. 横波反射法を用いたずりインピーダンス測定

#### §3.1 弾性

固体の場合、図 3・1 の応力( $\sigma$ )-ひずみ( $\epsilon$ )曲線に見られるように、『降伏点』を超えないとき、除荷するとひずみが 0 に戻る。これを『弾性変形』という。これに対して、降伏点を越えて除荷し、ひずみが残る変形を『塑性変形』と呼ぶ。



弾性理論から(付録 A を参照) 等方弾性体では体積弾性率  $K$  は『ラーメ定数』( $\lambda, \mu$ ) を用いて、

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3 \cdot 1)$$

とあらわせる。また、 $\mu$  は、『ずり弾性率』 $G$  (shear modulus)、『剛性率』 $G$  (rigidity) とも呼ばれ、 $\mu = G$  となる。縦波 (longitudinal) の音速  $c_l$  と横波 (transverse) の音速  $c_t$  は、体積弾性率  $K$  と剛性率  $G$  を用いて、付録 A の(10.16)式より、

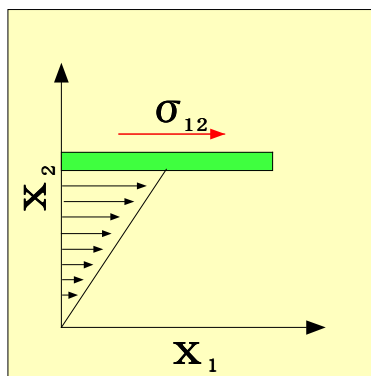
図 3・1 応力( $\sigma$ )-ひずみ( $\epsilon$ )曲線

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( K + \frac{4G}{3} \right)} \quad (3 \cdot 2)$$

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3 \cdot 3)$$

#### §3.2 粘性

液体に『ずり応力(せん断応力)』(shear stress)  $\tau (= \sigma_{12})$  を作用すると図 3.2 のように速度勾配が生じる。流速  $v=(v_1, v_2, v_3)$  とする。



$$\tau = \sigma_{12} = 2\eta_s \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$\tau = 2\eta_s \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \quad (3 \cdot 4)$$

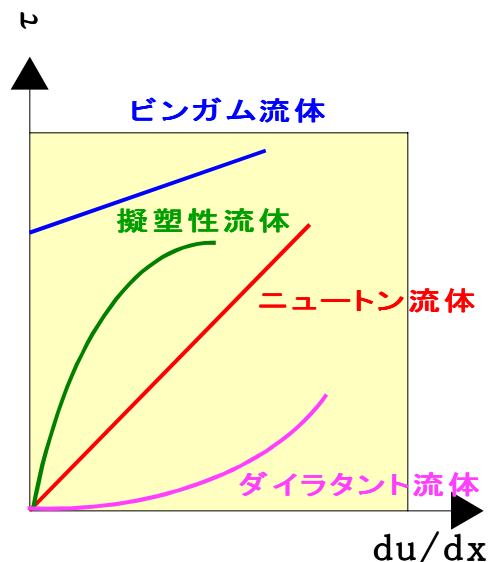


図3・2 せん断応力と応力-速度勾配曲線

これに対し、固体では、せん断応力  $\tau$  は歪  $\epsilon$  を用いて次の式になる(付録A)。

$$\tau = \sigma_{12} = 2\mu\epsilon_{12} = 2\mu \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

但し、 $\eta_s$  は『**ずり粘性係数**』(shear viscosity coefficient)、あるいは流体の『**第1粘性**』と呼ぶ。 $\eta$  が速度勾配に無関係のとき、『**ニュートン流体**』(Newtonian fluid) という。これに対して  $\eta$  が速度勾配に依存する流体を『**非ニュートン流体**』(Non-newtonian fluid) という。

せん断応力  $\sigma_{ij} (i \neq j)$  を考えたが、液体は外圧による体積変化に対しても粘性抵抗を示す。体積変化がある時間で平衡状態になる場合である。また、法線応力  $\sigma_{ii}$  は等方弾性体ではスカラーとなる。体積ひずみ速度を  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div}(\mathbf{v})$

とする。膨張する方向を正とすると、

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + \eta'(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\eta_s \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \sigma_{22} &= -p + \eta'(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\eta_s \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \sigma_{33} &= -p + \eta'(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\eta_s \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (3 \cdot 5)$$

となる ( $\eta'$  は『**第2粘性**』でラーメ定数の  $\lambda$  に相当し、 $\eta_s$  は  $\mu$  に相当する)。固体の場合は、ラーメ定数と歪を使って、

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{33}$$

となる (付録 A)。

$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$  を考慮して、これらの3式を足すと、

$$-\frac{\sigma_{ii}}{3} = p - \eta_v (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (3 \cdot 6)$$

$$\eta_v = \eta' + \frac{2}{3} \eta_s \quad (3 \cdot 7)$$

となる。但し、 $\eta_v$  は、『**体積粘性率**』(volume viscosity, bulk viscosity) と呼ばれる。

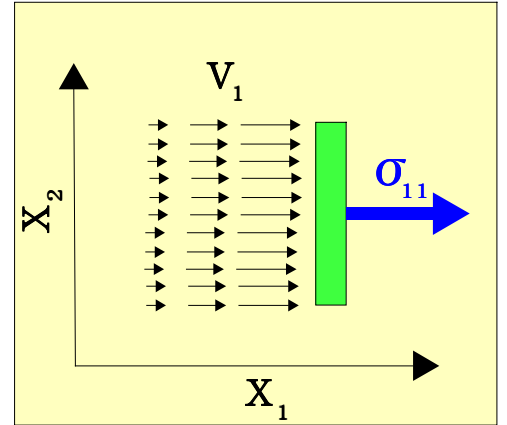


図 3・3 法線応力

### §3.3 粘弾性

粘弾性とは『**短い観測時間**』の時には**弾性的**に振る舞い、『**長い観測時間**』のときに**粘性**として振舞う性質である。まず、 $x_1$  方向に進む縦波について考える。変位  $u$  は

$$\begin{cases} u_1 = A e^{i(\omega t - kx_1)} \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

となる。等方弾性体として  $x_1 - x_2$  平面で考えると付録 A の

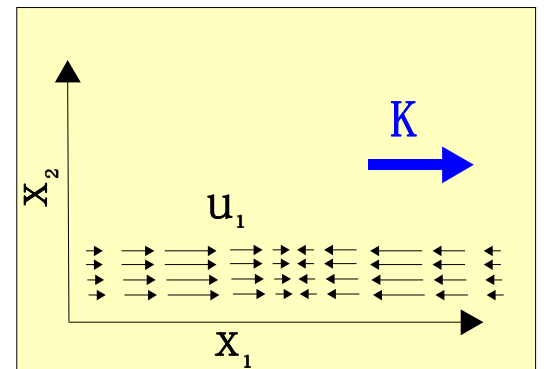


図 3・4 縦波の変位

(10・13) 式の運動方程式 (縦波) は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}$$

となる。

最初に『弾性』の寄与を考える。また、(10・12)式の $\sigma_{11}$ を $x_1$ で偏微分して、(10・16)式を考慮すると、

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} = 0 \\ \rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial x_1} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\end{aligned}\quad (3\cdot 8)$$

となる。

次に『粘性』の寄与を考慮する。(3・5)式を $x_1$ で偏微分すると、 $u_2=0, u_3=0$ なので、

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = \eta'_v \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + 2\eta_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = \eta'_v \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + 2\eta_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} = \eta'_v \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 2\eta_s \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = \left(\eta'_v + \frac{4}{3}\eta_s\right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x_1^2}$$

(3.4)式より、

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = \eta_s \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0$$

となる。結局、

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \rho\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = \left(\eta'_v + \frac{4}{3}\eta_s\right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x_1^2}\quad (3\cdot 9)$$

が求まり、弾性項(3・8)式と粘性項(3・9)式の和、つまり、縦波の運動方程式は、

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \left(\eta'_v + \frac{4}{3}\eta_s\right) \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x_1^2}\quad (3\cdot 10)$$

となる。

次に、 $x_1$  方向に進む横波について考える。

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = Ae^{i(\omega t - kx_1)} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

等方弾性体として  $x_1 - x_2$  平面で考えると付録 A の (10・13) 式の運動方程式 (横波) は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}$$

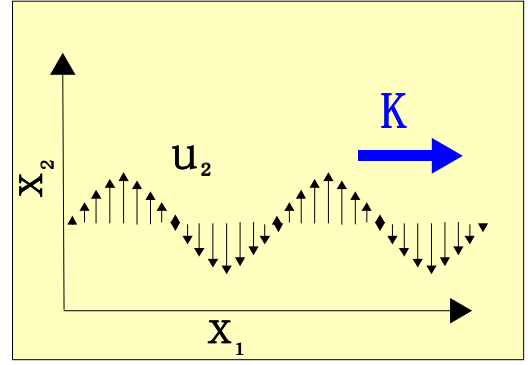


図 3・5 横波の変位

となる。縦波のときと同様に、まず、弾性項を考える。

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (2\mu \epsilon_{12}) = \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \{ \lambda \epsilon_{11} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{22} + \lambda \epsilon_{33} \} = 0$$

運動方程式 (横波) の弾性項は、 $\mu = G$  なので

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \tag{3・11}$$

となる。一方、運動方程式 (横波) の粘性項は、

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} = 2\eta_s \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \eta_s \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \eta_s \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = \eta' \frac{\partial}{\partial x_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + 2\eta_s \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = \eta' \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + 2\eta_s \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \eta_s \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} = \eta_s \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x_1^2} \tag{3・12}$$

弾性項 (3・11) 式と粘性項 (3・12) 式の和、つまり、横波の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \eta_s \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x_1^2} \tag{3・13}$$

となる。縦波・横波の弾性項と粘性項を表にまとめると、

	弾性率 M	粘性係数 $\eta$
縦波	$K + \frac{4}{3}G$	$\eta_v + \frac{4}{3}\eta_s$
横波	G	$\eta_s$

複素縦波弾性率  $M^* (= M' + iM'')$  を導入して、複素体積弾性率  $K^* = K' + iK''$ 、複素剛性率  $G^* = G' + iG''$  は次のような関係がある。

$$M^* = K^* + \frac{4}{3}G^* \quad (3 \cdot 14)$$

(3・10) 式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = M' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \eta \frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x_1^2}$$

となる。一般に波動方程式は、 $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$  とすると、 $\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  が成り立つので、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (M' + i\omega\eta) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = M^* \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}$$

$$M^* = M' + iM'' = M' + i\omega\eta \quad (3 \cdot 15)$$

$k^* c^* = \omega$  から、 $\rho (c^*)^2 = M^*$  となる。

$$\frac{1}{(c^*)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c^*)^2 = \frac{M^*}{\rho} \quad (3 \cdot 16)$$

(1・14) 式から、 $\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} - i \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\omega - i\alpha c}{c\omega}$  となり、

$$c^* = c' + ic'' = \frac{c\omega(\omega + i\alpha c)}{\omega^2 + \alpha^2 c^2} = c \frac{1 + i \frac{\alpha c}{\omega}}{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}$$

$$c' = \frac{c}{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}, \quad c'' = \frac{\alpha c^2}{\omega} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2} \quad (3 \cdot 17)$$

$$\frac{c''}{c'} = \frac{\alpha c}{\omega} \quad (3 \cdot 18)$$

$$M^* = \rho (c^*)^2 = \rho c^2 \left[ \frac{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}{\left\{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2\right\}^2} + i \frac{2 \frac{\alpha c}{\omega}}{\left\{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2\right\}^2} \right] \quad (3 \cdot 19)$$

### §3.4 音波の緩和現象

ずり応力に関する緩和時間を求めるために、反射法を用いて音響インピーダンスを測定する。『複素ずり速度』を  $c_s^*$  とする。

$$c_s^* = c_s' + i c_s'' \quad (3 \cdot 20)$$

横波では、(3・13) 式より

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \eta_s \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x_1^2} = (G + i\omega\eta_s) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = G^* \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \quad (3 \cdot 21)$$

$\rho (c^*)^2 = G^*$  と (3・19) 式から、

$$G' = \rho c^2 \frac{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}{\left\{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2\right\}^2} \quad G'' = \rho c^2 \frac{2 \frac{\alpha c}{\omega}}{\left\{1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2\right\}^2} \quad (3 \cdot 22)$$

$$\frac{G''}{G'} = \frac{2 \frac{\alpha c}{\omega}}{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2} = \frac{2\alpha c\omega}{\omega^2 - \alpha^2 c^2}$$

$$1 + \left(\frac{G''}{G'}\right)^2 = 1 + \frac{4(\alpha c\omega)^2}{(\omega^2 - \alpha^2 c^2)^2} = \frac{(\omega^2 + \alpha^2 c^2)^2}{(\omega^2 - \alpha^2 c^2)^2} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{G''}{G'}\right)^2} = \frac{\omega^2 + \alpha^2 c^2}{\omega^2 - \alpha^2 c^2}$$

$$1 + \sqrt{1 + \left(\frac{G''}{G'}\right)^2} = \frac{2\omega^2}{\omega^2 - \alpha^2 c^2} = \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2} \quad (3 \cdot 23)$$

(3・17) 式から、 $1 + \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2 = \frac{c}{c'}$  となる。これを (3・22) 式に代入すると、

$$G' = \rho c^2 \frac{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2}{\left\{\frac{c}{c'}\right\}^2} = \rho (c')^2 \left\{1 - \left(\frac{\alpha c}{\omega}\right)^2\right\} \quad (3 \cdot 24)$$

(3・23) 式と (3・24) 式から、

$$\rho (c_s')^2 = \frac{G'}{2} \left\{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{G''}{G'}\right)^2}\right\} \quad (3 \cdot 25)$$

$$\rho (c_s'')^2 = \frac{G'}{2} \left\{\sqrt{1 + \left(\frac{G''}{G'}\right)^2} - 1\right\} \quad (3 \cdot 26)$$

(1・17) 式より、反射率 R を水晶 (quartz) 振動子、液体 (liquid) 試料の音響インピーダンスを  $z_q, z_L$  とすると、  
 $z_L = \rho c_s^*$

$$R = \frac{z_q - z_L}{z_L + z_q}$$

$$z_L = \frac{1-R}{1+R} z_q$$

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{1-R}{1+R} \times \frac{R^{-1/2}}{R^{-1/2}} = \frac{1/\sqrt{R} - \sqrt{R}}{1/\sqrt{R} + \sqrt{R}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\ln R} - e^{\frac{1}{2}\ln R}}{e^{-\frac{1}{2}\ln R} + e^{\frac{1}{2}\ln R}} = -\tanh\left[\frac{1}{2}\ln R\right] = -\tanh\left[\frac{1}{2}\frac{\log_{10} R}{\log_{10} e}\right]$$

試料を入れたときと入れないときで、1 エコー当たりの吸収の差を  $D_\omega(T)$  とすると、

$$D_\omega(T) = 20 \log_{10} R$$

$$z_L^2 = z_q^2 \tanh^2\left[\frac{D_\omega(T)}{40 \log_{10} e}\right]$$

$$\rho(c_s')^2 = \frac{z_q^2}{\rho} \tanh^2\left[\frac{D_\omega(T)}{40 \log_{10} e}\right] \quad (3 \cdot 27)$$

ここで、(3・17) 式と比べて、G'に関する情報が得られる。

Litovitz<sup>6)</sup> 波反射法により、ずりインピーダンスの測定法を説明する。直径 2 cm、長さ 2 cm の AC カットの水晶棒に高周波パルスを印加すると、AC 軸方向に横波が発生して多重反射によるエコーを観測する。

AC カット  $Z_q = 8.78 \times 10^5 \text{ g/cm}^2 \cdot \text{sec}$

BC カット  $Z_q = 1.27 \times 10^6 \text{ g/cm}^2 \cdot \text{sec}$



## 付録 A 弾性論

通常、図 A・1 のように、位置  $\mathbf{x}$  によって変位は異なるので、変形勾配を (10・1) 式とすると、ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (strain) と回転  $\boldsymbol{\omega}$  (rotation) は、

$$\mathbf{u}_{i,j} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \quad (10 \cdot 1)$$

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10 \cdot 2)$$

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{j,i}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (10 \cdot 3)$$

となる。また、 $\sigma_{ij}$  を  $\mathbf{x}_j$  方向に垂直な面に作用する  $\mathbf{x}_i$  方向の応力 (図 A・2) とすると、対称性から

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (10 \cdot 4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (10 \cdot 5)$$

となる。フックの法則  $\mathbf{F} = k\mathbf{x}$ 、弾性定数 (elastic constant)  $C_{ijkl}$  を考慮すると

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \equiv C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (10 \cdot 6)$$

となる。(10・4) 式と (10・5) 式の対称性から、 $C_{ijkl} = C_{jikl}$ ,  $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ , の対称性を持っている。また、添え字を次のように置き換えると、 $\sigma_i$  は次のようになる。

11→1, 22→2, 33→3
23→4, 31→5, 12→6

$$\sigma_i = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{13} \varepsilon_3 + C_{14} \varepsilon_4 + C_{15} \varepsilon_5 + C_{16} \varepsilon_6$$

さらに、fcc(面心立方)やbcc(対心立方)などの立方晶系は3個の独立な弾性定数( $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ )で表される。(10・6)式は、

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & & & \\ & C_{11} & C_{12} & & & \\ & & C_{11} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{44} & \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (10 \cdot 7)$$

となる。(詳しくは Kittel の「固体物理入門」に書いてあります。) 単位体積当たりの弾性エネルギー  $U$  は、

$$\sigma_i = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i} \quad (10 \cdot 8)$$

という関係があるので、

$$U = \frac{1}{2} C_{11} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + C_{12} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1) + C_{44} (\varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2) \quad (10 \cdot 9)$$

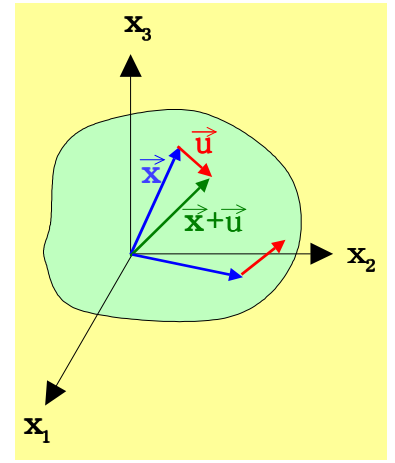


図 A・1

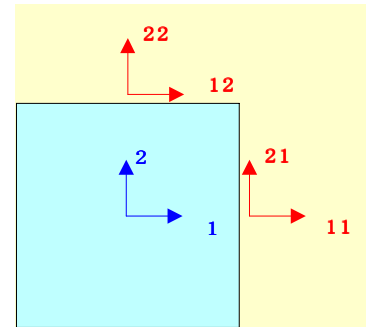


図 A・2

$C_{44} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$  のときに弾性等方体になるので、ラーメ定数 (Lame's constant)  $\lambda = C_{12}$ ,  $\mu = C_{44}$  とすると、

$$C_{11} = 2\mu + \lambda \quad (10 \cdot 10)$$

となる。(10・9) 式は、『ラーメ定数』で表すと、

$$U = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2) \quad (10 \cdot 11)$$

弾性等方体では (10・7) 式は、

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (10 \cdot 12)$$

となる。弾性等方体では  $\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$  となるので、(1・2) 式と (10・12) 式は、

$$\sigma = K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = 3K\varepsilon_{11}$$

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11}$$

と変形でき、この2式から  $\sigma$  消去すると

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (3 \cdot 1)$$

となり、(3・1) 式が証明された。

次に、変位  $u$  に対する運動方程式を考える。図 A・3 のように  $x_1$  方向に働く応力変化は、

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \cong \frac{\sigma_{11}(x_1 + \delta x_1) - \sigma_{11}(x_1)}{\delta x_1} = \frac{\delta \sigma_{11}}{\delta x_1}$$

となるので、両辺に  $\delta x_2 \cdot \delta x_3$  をかけて、

$$\delta \sigma_{11} \cdot \delta x_2 \delta x_3 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta x_1 \cdot \delta x_2 \delta x_3$$

同様に、

$$\delta \sigma_{12} \cdot \delta x_1 \delta x_3 = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} \delta x_2 \cdot \delta x_1 \delta x_3$$

$$\delta \sigma_{13} \cdot \delta x_1 \delta x_2 = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \delta x_3 \cdot \delta x_1 \delta x_2$$

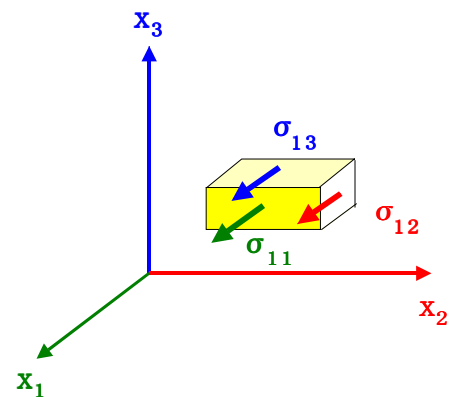


図 A・3

$x_1$  方向の力  $F_1$  はこれらの和になるので

$$F_1 = \left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \right) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = \rho \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

結局、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (10 \cdot 13)$$

弾性等方体なので、 $x_1 - x_2$  平面で考える。(10・12) 式から

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

となり、それぞれ  $x_1$ 、 $x_2$  で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \end{aligned}$$

が求まる。これらを (10・13) 式に代入すると、

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (10 \cdot 14)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) \quad (10 \cdot 15)$$

が導かれる。

$x_1$  方向に伝播する縦波は  $k \parallel u_1$  なので、 $u_1 = Ae^{i(\omega t - kx_1)}$  と表せて、(10・14) 式に代入すると

$$\rho \omega^2 = (\lambda + 2\mu) k^2$$

縦波の音速を  $c_\ell$  とし、(3・1) 式を代入すると、(3・2) 式が証明される。

$$\rho c_\ell^2 = \lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu \quad (10.16)$$

$x_1$  方向に伝播する横波は  $k \perp u_2$  なので、 $u_2 = Ae^{i(\omega t - kx_1)}$  と表せて、(10・15) 式に代入すると

$$\rho \omega^2 = \mu k^2$$

横波の音速を  $c_t$  とすると、

$$\rho c_t^2 = \mu$$

(10・17)

## 参考文献

### 弾性論

- 1) 第8版『固体物理学入門』 キittel 丸善
- 2) 『転位論入門』 鈴木秀次 アグネ
- 3) 『弾性理論』 ランダウ・リフシッツ 東京図書

### 粘弾性

- 4) 『高分子物理学』 斉藤信彦 裳華房

### 超音波

- 5) 『液体および溶液の音波物性』 野村浩康・川泉文男・香田忍 名古屋大学出版
- 6) R. Meister, C. J. Mariani, R. Sciamanda, L. Cotter and T. A. Litovitz: J. Appl. Phys. **31** (1960) 854.
- 7) A. E. Clark and T. A. Litovitz: J. Acoust. Soc. Am. **32** (1960) 1221.