

水面衝撃問題の境界要素解析法について

木原 一

防衛大学校システム工学群機械システム工学科

Email : hkihara@nda.ac.jp

1 緒言

境界要素法を用いた水面衝撃問題の解析では、任意形状の物体を取り扱うことができ、また非線形理論により局所的な波面の盛り上がりを考慮した合理的な流体解析が可能である。こうしたアプローチによる2次元楔に関する解析は Lin 等¹⁾, Greenhow & Lin²⁾, Yim³⁾, Takagi & Naito⁴⁾ 等によって行われた。実際の流体挙動をリアルにシミュレートできることが示されたが、同時に物体と波面の交点における特異性による様々な影響がしばしば数値解析上の支障となることも明らかになった。物理現象としてはジェット流の発生が対応するものと考えられ、これをどのように取扱うかという点が境界要素解析の成否を決めると言える。Zhao & Faltinsen⁵⁾ はスプレアの根元から上の流体領域を計算から取除く、いわゆる”cut-off”モデルを導入し、広範囲の楔角で衝撃圧が計算できることを示した。Fontaine & Cointe⁶⁾, Lu 等⁷⁾, Battistin & Iafrati⁸⁾ 等の研究も cut-off モデルを応用した研究例である。近年、このジェット流を含む流体領域を合理的にモデル化する研究が行われている。Mei 等⁹⁾, Iafrati & Battistin¹⁰⁾ 等の研究は手法は異なるが共にジェット領域の流れをテイラー展開によって記述すること試みたものであり、流れの1次元性に着目したものと言える。著者¹¹⁾ も同様な視点から Zhao 等の計算モデルを拡張し、衝撃圧の推定とジェット領域の流れの解析が可能であることを示した。一方、任意形状の物体に応用された境界要素解析の研究例は2次元問題の場合でも極めて少ない。その意味において Zhao 等¹²⁾ の研究は先駆的なものと言える。また、Zhao 等と同様にナックル形状を有する楔の着水シミュレーションは Song 等¹³⁾ によっても示されている。しかしながら、より詳細な検討は十分には行われておらず、著者¹⁴⁾ の調査によると時間領域解法による衝撃圧の計算では初期条件が最大圧力の推定に大きく影響すること、また楔の問題の場合でもデッドライズ角が小さい場合には適切な初期攪乱を考慮しないとジェット領域の影響でシミュレーションが正しく行えないことがわかっている。

本報告では任意形状物体の2次元水面衝撃問題の実用的な境界要素解析法を提案することを目的としており、そのための手法と計算例を示す。具体的には楔の自己相似解を初期条件に適用し任意形状物体に関する水面衝撃問題を時間領域で解くシミュレーション法である。従って、物理平面上での境界要素解析と相似平面上での境界要素解析という2つの計算プログラムの開発が必要になるが、双方の欠点を互いに補うことができ、結果的には広い範囲で衝撃圧の実用的推定と自由表面流れの解析が可能になる。Korobkin & Iafrati¹⁵⁾ は水面衝撃時における水の圧縮性を考慮する必要性について述べており、本手法の初期攪乱の選択を理論的に裏付けるものである。物理平面上での境界要素解析法(時間領域解法)¹⁷⁾ は今年のシンポジウムでも述べたので、計算法については今回は相似平面上での境界要素解析法についてのみ述べることにする。なお、楔の自己相似流れの境界要素解析は谷澤¹⁶⁾, 大坪・福村¹⁸⁾, Wu 等¹⁹⁾ によって行われているが、境界値問題やジェット領域の取り扱い方等の点で異なっている。

2 楔の自己相似解

2.1 問題の定式化

半頂角 α の左右対称な楔形状をもつ2次元物体が静止水面上に一定速度 V で着水する問題を考える。流体は非粘性、非圧縮、渦なし流れを仮定する。着水時の水面衝撃現象は短い時間スケールで生じ、その間の重力

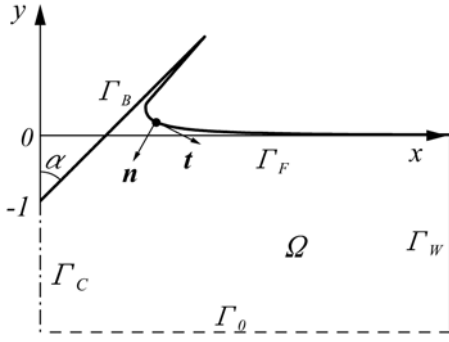


Fig. 1: Definition of coordinate system.

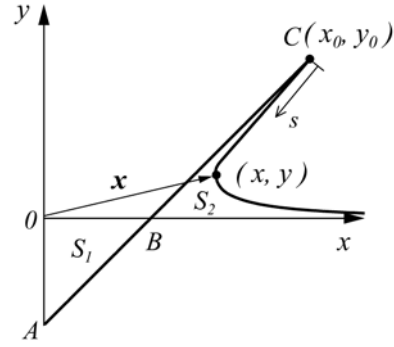


Fig. 2: Sketch of self-similarity flow.

影響は小さいと考えられるため解析上は無視することにする。このとき楔まわりの流れは自己相似流れになることが知られている。自己相似流れを記述する相似平面は、物理平面上的流れを記述する位置変数 \mathbf{x}^* および時間変数 t を用いて以下のような無次元変数 \mathbf{x} で定義される。

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{Vt} \quad (1)$$

これに対応して相似平面上的速度ポテンシャル ϕ と物理平面上的速度ポテンシャル ϕ^* は次式の関係がある。

$$\phi = \frac{\phi^*}{V^2 t} \quad (2)$$

楔の対称軸を y 軸にとり、問題の対称性を考慮して Fig.1 に示すような $x \geq 0$ なる半平面を取り扱うことにする。楔の着水問題は相似平面上的境界値問題として以下のように定式化される。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -n_y = \sin \alpha \quad \text{on } \Gamma_B \quad (4)$$

$$\phi - \mathbf{x} \cdot \nabla \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_W, \Gamma_0, (\Gamma_C) \quad (7)$$

運動学的自由表面条件 (6) 式は $\mathbf{n} \cdot (\nabla \phi - \mathbf{x}) = 0$ だから実数パラメータ ℓ を用いると

$$\nabla \phi = \mathbf{x} + \ell \mathbf{t} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (8)$$

と書ける。ここで \mathbf{t} は単位接線ベクトルを表す。一方、力学的自由表面条件 (5) 式の勾配をとると

$$\nabla \left\{ \phi - (\mathbf{x} \cdot \nabla \phi) + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right\} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (9)$$

上式の左辺は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \nabla \phi - \nabla (\mathbf{x} \cdot \nabla \phi) + \nabla \left(\frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \right) \\ &= \nabla \phi - \left\{ \nabla \phi \times (\nabla \times \mathbf{x}) + (\phi \cdot \nabla) \mathbf{x} + \mathbf{x} \times (\nabla \times \nabla \phi) + (\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla \phi \right\} \\ & \quad + \left\{ \nabla \phi \times (\nabla \times \nabla \phi) + (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$= -(\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla \phi + (\nabla \phi \cdot \nabla) \nabla \phi \quad (11)$$

$$= \left\{ (\nabla \phi - \mathbf{x}) \cdot \nabla \right\} \nabla \phi \quad (12)$$

(12) 式は (9) 式より $\mathbf{0}$ に等しく, (8) 式を用いると次式を得る.

$$\mathbf{t} \cdot \nabla(\mathbf{x} + \ell \mathbf{t}) = \mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \nabla \ell) \mathbf{t} = \mathbf{t} + \frac{d\ell}{ds} \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (13)$$

接線ベクトルの向きは Fig.1 に示すとおりで, 自由表面長さを s で表すと (13) 式よりパラメータ ℓ は s_0 を定数として $\ell = -s + s_0$ と書くことができる. Fig.2 に示すように特に物体と自由表面の交点 $C(x_0, y_0)$ を基準 ($s_0 = 0$) にとると (8) 式は

$$\nabla \phi = \mathbf{x} - s \mathbf{t} \quad (s \geq 0) \quad \text{on } \Gamma_F \quad (14)$$

と書き直すことができる. すなわち $s = 0$ のとき

$$\nabla \phi = \mathbf{x}_0 \quad \text{at } C(x_0, y_0) \quad (15)$$

となる. 上式の両辺に \mathbf{t} との内積をとると自由表面上の接線方向速度は

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} - s \quad \text{on } \Gamma_F \quad (16)$$

で与えられる. さらに (14) 式を力学的自由表面条件 (5) 式に代入すると自由表面上の速度ポテンシャルは次式で与えられる.

$$\phi = \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - s^2) = \frac{1}{2}(r^2 - s^2) \quad \text{on } \Gamma_F \quad (17)$$

r は原点からの距離で $r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と表される. また (17) 式は (16) 式を s について積分することで得ることもできる. ここで (14), (16), (17) 式は全て自由表面条件 (5), (6) 式の組合せによって得られている点に注意すべきである. 以上の考察より問題は (3)(4)(6)(7) 式から構成されるノイマン型境界値問題として, あるいは (3)(4) (7)(17) 式から構成される混合型境界値問題として定式化できる.

2.2 繰返し計算による求解

境界値問題の解法には MEL スキームによる時間領域解法が応用できる. すなわち, 自由表面の初期形状が与えられると境界条件が決まるので境界要素法により問題を解くことができ, 得られた解が収束するまで繰返し計算を行えば良い. ただし, ノイマン型境界値問題の場合には速度ポテンシャルが定数分だけ不定となるため, 解を確定するためには付加条件が必要になる. その際, (17) 式は交点での速度ポテンシャルを与えるのに利用できる. しかし, 交点の位置は物体表面上の速度ポテンシャルの計算値に対して敏感であるため, 解の収束判定を行う際には注意が必要である. 従って, 本報告では混合型境界値問題として解くことを推奨する.

先ず収束解を得るまでの相似平面上の計算過程には物理的な意味はないが, できるだけ早く収束解が得られるように自由表面の初期形状を与えることが望ましい. 本報告ではワグナー理論から得られる以下の水面上昇量を初期形状として採用している.

$$y = \frac{x}{c} \sin^{-1} \left(\frac{c}{x} \right) - 1, \quad x \geq c \quad (18)$$

ここで $c = (\pi/2) \tan \alpha$. 相似平面では時間という変数は存在しないがタイム・ステッピング法と同様にして, 以下のように自由表面形状を修正していく.

$$\mathbf{x}_j(t + \Delta t) = \mathbf{x}_j(t) + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{t} \frac{\partial \phi(\tau)}{\partial s} d\tau \quad (19)$$

ここで t は繰返し量を表す擬似時間変数である. その刻み幅 Δt は形状の修正量を調節する量であるが, その設定値は物理平面のタイム・ステッピング法のように敏感ではない. 積分する値は (16) 式によって計算される. 自由表面上の計算点を接線方向にシフトすることにより自由表面形状は自由表面条件を満足するように修正さ

れていく．物体表面との交点はスリップ条件を与えている．解がある程度収束すると今度は運動学的自由表面条件を満足するように次式を用いて自由表面形状を修正していく．

$$\mathbf{x}_j(t + \Delta t) = \mathbf{x}_j(t) + \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \phi(\tau)}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \right) d\tau \quad (20)$$

(19) 式および (20) 式の積分にはルンゲ・クッタ法を用いている．自由表面上形状が修正されると，速度ポテンシャルは (17) 式によって計算することができる．

2.3 ジェット流の取扱い

水面衝撃ではジェットの発生により物体表面に沿った薄い流体層が形成される．このようなスプラッシュ部を表す流場は物体表面との交点 \mathbf{x}_0 まわりにテーラー展開すると以下のように書ける．

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla \}^2 \phi(\mathbf{x}_0) + \dots \quad (21)$$

ジェット領域の流れが一次元的であると考えたと交点近傍の流場は第 2 項までの近似で表現できると仮定する．さらに自己相似解の場合，重力影響による流れの変形を考慮する必要がないためジェット領域としてスプレアの根元付近までの近似が可能と考えられる．このとき $\nabla \phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ を第 2 項までの展開式に代入すると

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0 \\ &= \frac{1}{2} \{ |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \} \end{aligned} \quad (22)$$

を得る．この関係式は仮定の範囲で自由表面条件 (17) 式を満足している．さらに (22) 式を運動学的自由表面条件 (6) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &\mathbf{n} \cdot \nabla \left\{ \frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2 - \frac{1}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \right\} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \\ &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_F \end{aligned} \quad (23)$$

を得る．ここで \mathbf{n} はジェット領域内の自由表面 \mathbf{x} における単位法線ベクトルを表している．(23) 式の幾何学的意味はジェット領域の波面形状が 2 点 \mathbf{x}_0 , \mathbf{x} を結ぶ直線と与えられるということである．

2.4 解の収束判定

流体領域内では流量について保存則が成り立つ．特に自己相似流れの場合には Fig.2 において $S_1 = S_2$ なる関係が成り立つことが知られている¹⁶⁾．また自由表面の境界条件として (17) 式より速度ポテンシャルを与える場合，自由表面の力学的条件は満たされていると考えられるので，運動学的条件の成立を解の収束判定として利用できる．よって，計算例では以下の 2 つの条件式

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| 1 - \frac{S_1}{S_2} \right| < \varepsilon, \\ \frac{1}{N_F} \left| \sum_{j=1}^{N_F} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{x}_j \right) \right| < \varepsilon \end{array} \right. \quad (24)$$

を用いて解の収束を判定している．ここで j は自由表面上の計算点番号， N_F は自由表面上の計算点の総数を表し， ε は繰返し計算の打ち切り値である．

2.5 流体力の計算

収束解が得られると楔面状の圧力はベルヌーイの式を用いて以下のように計算できる。

$$\frac{p}{\rho V^2} = -\phi + \mathbf{x} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 \quad (25)$$

このように自己相似流れの場合、圧力は1階微分までの値のみを用いて計算できる点に注意したい。

3 計算結果

先ず、前節で述べた計算法により楔まわりの自己相似解を計算した。計算に使用した総節点数は約290~370点で、楔面上に約50~90点、自由表面上に約200~240点を使用している。繰返し計算の打ち切り値 ε は楔の半頂角 α の大きさに依らず0.001の一定値とした。約300回程程度の繰返し計算という短い計算時間で実用的な解が得られている。30° ≤ α ≤ 80°の範囲の楔面の圧力分布の計算結果をFig.3に示す。図中には物理平面で計算した時間領域解法による計算結果、また $\alpha \geq 70^\circ$ についてはワグナー理論による解が比較のために示されている。いずれも非常に良い一致を示しており、時間領域解法ではジェット領域の形状を近似せずに計算した結果であるにも関わらず安定した値が得られていることがわかる。ただし、 $\alpha \geq 70^\circ$ の時間領域解法の結果は初期条件として自己相似解を適用した場合の結果である。初期攪乱を0とした時間領域のシミュレーションでは、半頂角 α が大きくなるにつれて非常に短い時間で発達する局所的に高曲率な波面を表現しなければならない。結果的に接水端部付近の波面と物体表面の間に非物理的な窪みが形成され、 $\alpha \geq 70^\circ$ の場合には定常解を得るまでのシミュレーションを行うことが困難である。適切な初期攪乱を初期条件に使用してシミュレーションを行うとこれらの問題は解消できる事がわかった。

次に物体表面が曲率をもった任意形状の場合を例題にとる。水面衝撃におけるジェット領域は実際には飛沫等を含む連続した流体とは言い難い領域であり、境界要素解析を行うにはモデル化²⁰⁾が必要と考えられる。ジェット領域の性質を考慮すると衝撃時の任意形状物体まわりの流れは、瞬間的には楔まわりの流れで近似できると仮定すると、自己相似解を初期条件とする時間領域シミュレーションができる。このとき任意形状物体の初期条件はFig.4に示すようにcut-offモデルを用いて設定できる。半径 $a = 1.0m$ の円筒物体が速度 $V = 4.0m/s$ で落下する場合の水面衝撃シミュレーションの計算結果をFig.5に示す。図中の点線は初期状態を表している。2種類の結果はジェット領域を考慮する範囲を変えた場合の結果である。楔の場合と異なり常に非定常な流れをシミュレーションする場合には物体表面に沿ってできる流体層を考慮しすぎると圧力値の計算精度に良い結果を与えない。Fig.6は物体表面上の点に働く圧力の時系列を推定したものである。

4 結言

本報告では、境界要素解析による楔の自己相似流れの数値解法について述べ、2次元物体の水面衝撃問題を境界要素解析するための実用的方法として楔の自己相似解を初期条件に用いて任意形状物体の水面衝撃をシミュレーションすることが可能であることを示した。

参考文献

- [1] Lin, W.M., Newman, J.N. and Yue, D.K. : Nonlinear Forced Motions of Floating Bodies, *Proc. 15th Symp. on Naval Hydrodynamics*, pp.33-49, 1984.
- [2] Greenhow, M and Lin, W.M. : Numerical Simulation of Nonlinear Free Surface Flows Generated by Wedge Entry and Wavemaker Motions, *Proc. 4th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, pp.94-106, 1985.

- [3] Yim, B. : Numerical Solution for Two-Dimensional Wedge Slamming with A Nonlinear Free-Surface Condition, *Proc. 4th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, pp.107-116, 1985
- [4] Takagi, K. and Naito, S. : An Application of Boundary Element Method to the Fluid-Body Interaction Problem *Proc. 18th International conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pp.504-516, 1989.
- [5] Zhao, R. and Faltinsen, O. : Water entry of two-dimensional bodies, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.246, pp.593-612, 1993.
- [6] Fontaine, A. and Cointe, R. : A slender approach to nonlinear bow waves, *Philosophical Trans. of the Royal Soc.*, Series A, Vol.335, pp.565-574, 1997.
- [7] Lu, C. H., He, Y. S. and Wu, G. X. : Coupled analysis of nonlinear interaction between fluid and structure during impact, *Journal of Fluid and Structures*, Vol.14, pp.127-146, 2000.
- [8] Battistin, D. and Iafrati, A. : Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies, *Journal of Fluid and Structures*, Vol.17, pp.643-664, 2003.
- [9] Mei, X., Liu, Y and Yue, D. K. P. : On the water impact of general two-dimensional sections, *Applied Ocean Research*, Vol.21, pp.1-15, 1999.
- [10] Iafrati, A. and Battistin, D. : Accurate description of the jet flow developing during water impact, *Proc. of 18th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, 2003.
- [11] Kihara, H. : Numerical modeling of jet flow due to water impact, *Proc. of 19th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, 2004.
- [12] Zhao, R. Faltinsen, O. and Aarsnes, J. : Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation, *Proc. 21th Symp.on Naval Hydrodynamics*, pp.408-423, 1996.
- [13] Song, W. S., Arai, M. and Maruo, H. : Numerical approach to water entry of a wedge, 第39回運動性能研究委員会講演資料 SK39-1, 平成8年2月.
- [14] Kihara, H. : Numerical modeling of water impact, *Proc. of 4th Intl. conference on High-Performance Marine Vehicles*, pp.200-214, 2004.
- [15] Korobkin, A. A. and Iafrati, A. : Jetting by floating wedge impact, *Proc. of 19th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, 2004.
- [16] 谷澤克治: 境界要素法による楔の着水問題の相似解, 関西造船協会, 第196号, pp.147-154, 昭和60年3月.
- [17] 木原 一: 水面衝撃圧の推定と噴流の計算モデル, 九大応力研シンポジウム 浮体の流体力学に関する数理解析, No.15 ME-S6, pp.10-14, 平成16年3月.
- [18] 大坪英臣, 福村 勝: スプラッシュを考慮した簡便な衝撃圧解析, 日本造船学会論文集, 第162号, pp.374-380, 昭和62年11月.
- [19] Wu, G. X.; Sun, H.; He, Y. S. : Numerical simulation and experimental study of water entry of a wedge in free fall motion, *Journal of Fluid and Structures*, Vol.19, pp.277-289, 2004.
- [20] 木原 一: 衝撃運動にともなう物体と波の非線形相互作用に関する一考察, 関西造船協会, 第242号掲載予定, 平成16年9月.

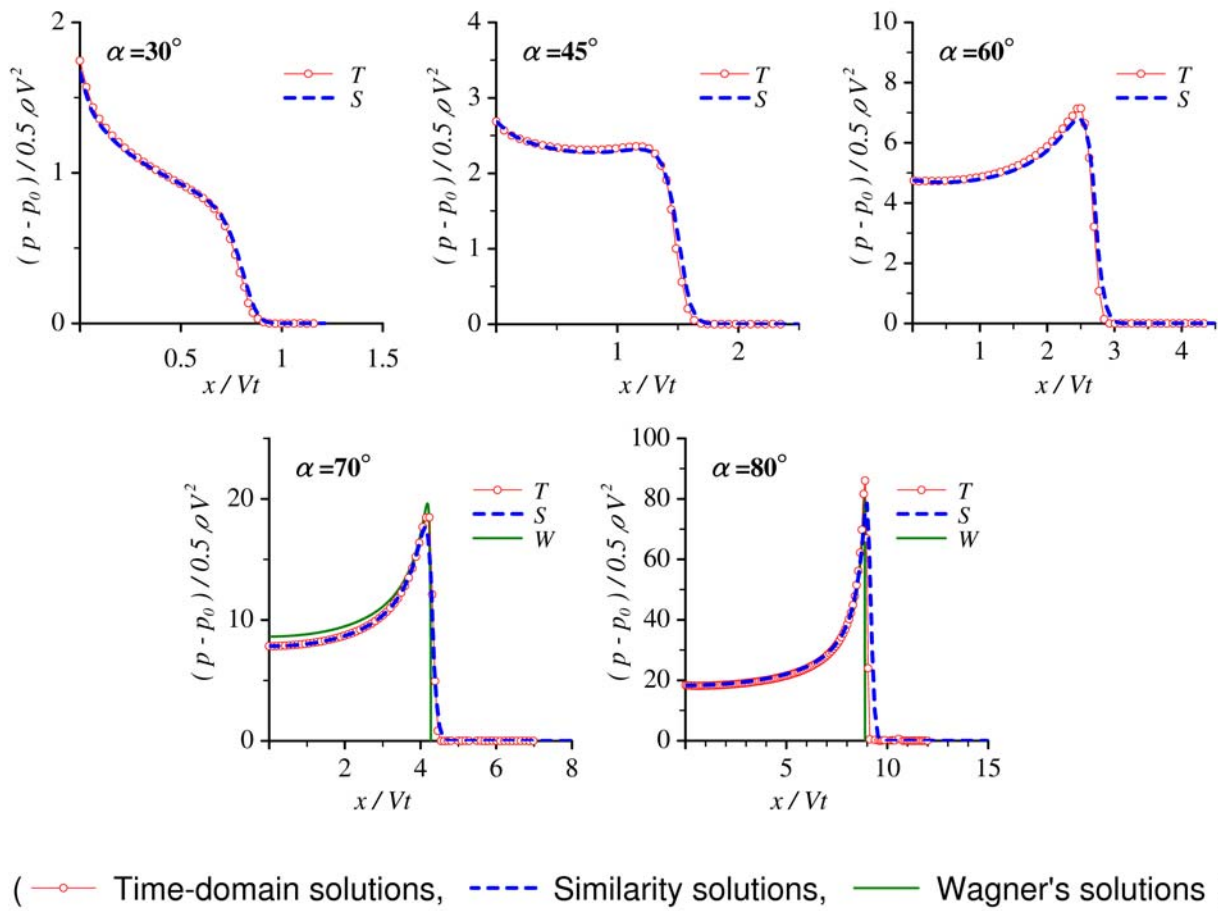


Fig. 3: Pressure distribution on a wedge under gravity free condition.

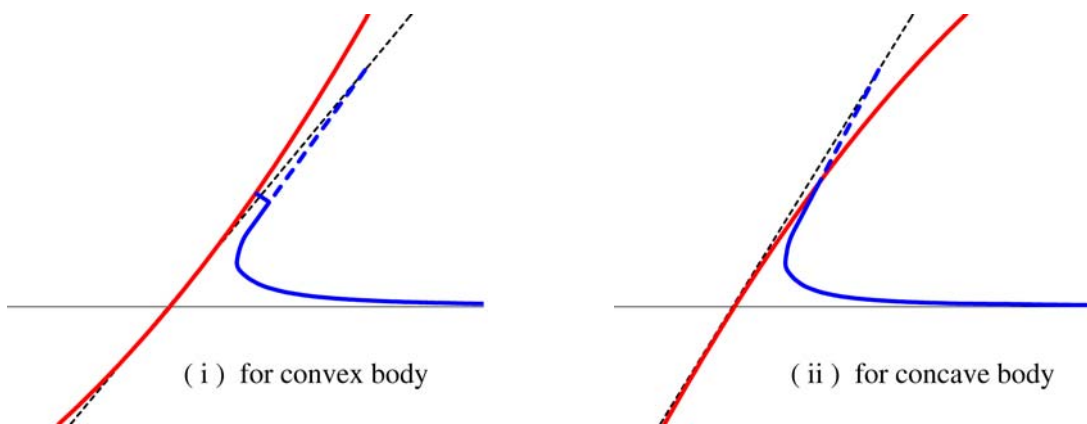


Fig. 4: Illustrative view for the introduction of similarity solutions.

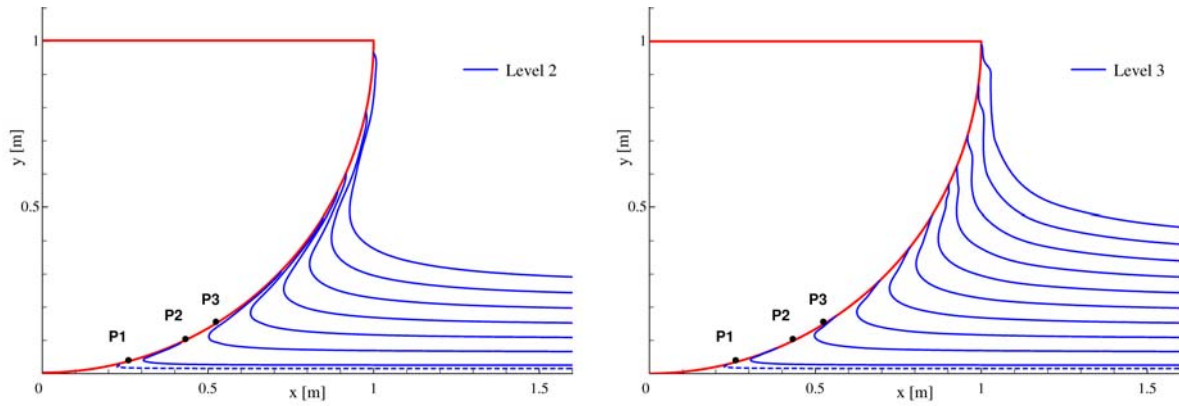


Fig. 5: Water entry of a circular cylinder with $a = 1.0m$ at $V = 4.0m/s$.

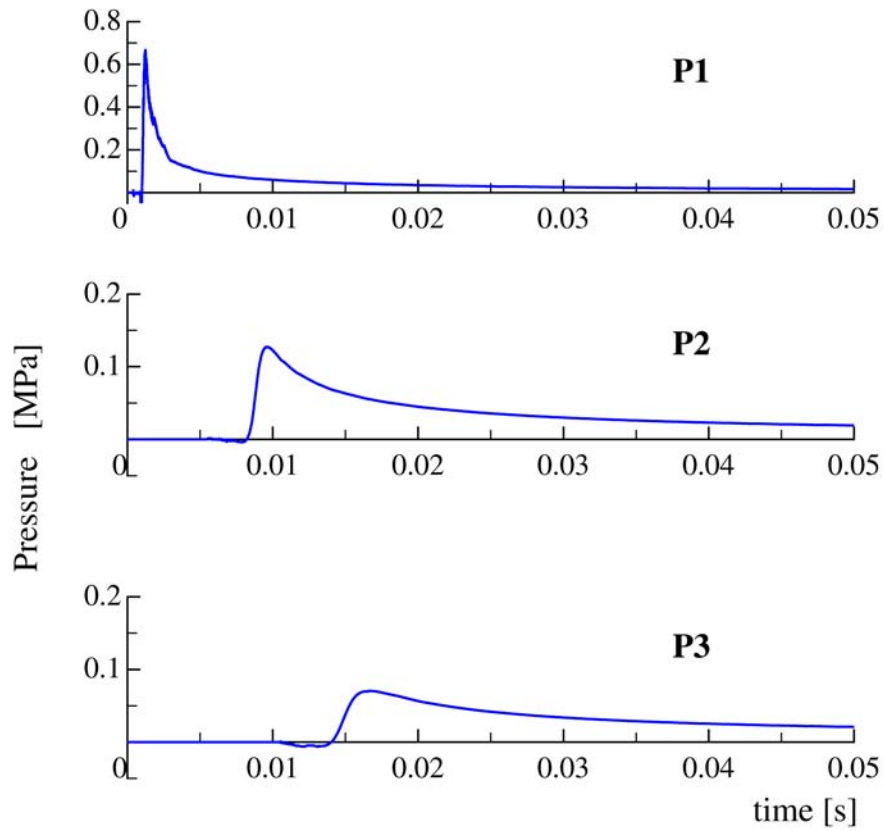


Fig. 6: Pressure time histories of a circular cylinder with $a = 1.0m$ at $V = 4.0m/s$ (Level3).