

# 平行平板コンデンサの極板間磁場の成因ならびに 電磁波の伝播機構と励起源の考察 — 変位電流の役割 —

丸山清志・難波竜平・菅原美結

防衛大学校地球海洋学科

2023年3月9日

## 要旨

クーロンゲージの下で電場は縦横の成分に分解できる。本論文では、まず準定常状態にある平行平板コンデンサの極板間磁場の成因をこのゲージの下で考察した。その結果、極板間電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化が、横成分の渦度の回転を介して、間接的に当該磁場の渦度を生成していることが明らかになった。次いで電磁波の伝播機構について検討し、以下の結論を得た。すなわち、電磁波は電場の横成分の渦度の回転が磁場の渦度を生成し、磁場の渦度の回転が電場の横成分の渦度を生成しながら伝わる波である。そのうえで電磁波の励起源を探ったところ、2種類の励起源の存在が浮かび上がった。1つは電流密度ならびに電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化であり、いま1つは電流密度の回転である。

## 1 はじめに

現在マクスウェルの方程式として知られている方程式系は4つの方程式から成り、そのうちの1つはアンペール・マクスウェルの法則と呼ばれている。このアンペール・マクスウェルの法則には、変位電流と呼ばれる項が含まれている (§2 参照)。この項は、定常電流と静磁場の関係を表すアンペールの法則を一般化する際に、電荷保存則との間に矛盾が生じないように、マクスウェルにより付加された項である (砂川 1977)。電磁波の存在にとって、この項が欠くべからざるものであることは、電磁気学における常識であろう。

変位電流は当初、通常の電流と同様に、電流の作る磁場に関するビオ・サバルの法則に従う磁場を作るものと想定された (朝永 2010)。しかし、以下で説明するように、話はそう単純ではなかったのである。

そもそも変位電流は、電場の時間的変化によって生じるが、その電場は縦成分と横成分とに分解することが可能である (§3 参照)。これら成分による変位電流のうち、少なくとも縦成分の緩慢な時間的変化によって生じる変位電流は、ビオ・サバルの法則に従う磁場を作らないことが容易に示される (§4 参照)。

この事実は20世紀初頭に著された教科書でも指摘されており (プランク 1977, §84)、1960年代の米国において高校の物理教育現代化を議論する過程で再認識された。その結果、議論に参加した人々の間では「変位電流は磁場を作らない」との結論が共有されたという (兵頭 2012)。

ところで、ビオ・サバルの法則は、定常状態を含めて場の時間的変化が緩慢な場合に限り適用可能である。他方、これを一般化したジェフィメンコの式と呼ばれる公式が存在する (斎藤 2015)。実はこの公式にも、現れるのは通常の電流のみで、変位電流は電場の成分の縦横を問わず一切現れないのである (§4 参照)。この事実もまた「変位電流は磁場を作らない」ことを示すものと解釈されている (兵頭 2012)。

さて、我々はこの「変位電流は磁場を作らない」という驚くべき命題を、字義のままに一旦受け入れること

にしよう。このとき、以下のような疑問が湧き上がってくるのは当然であろう。

交流回路に繋がれた平行平板コンデンサを考えよう。このコンデンサの極板間に通常の電流が存在しないことは言を俟たない。しかるにコンデンサの極板間の磁場は、アンペール・マクスウェルの法則を用いれば、極板間の変位電流から容易に計算し得る（砂川 1977）。通常の電流が存在しないにも関わらずコンデンサの極板間に存在するこの磁場は、何者により如何にして生み出されたものであろうか。

次いで真空中を伝播する電磁波を考える。この電磁波は一般に「電場の変動が磁場を生じ、磁場の変動が電場を生じ」つつ伝播するものと理解されている（兵頭 2012）。変位電流、従って電場の時間的変化が磁場を生まないのであれば、この電磁波は如何にして伝播してゆくのであろうか。さらに、コンデンサの極板間の変位電流の如きものは、磁場を生み出さない以上、電磁波の励起源とはなり得ないのであろうか。

本論文の目的はこれらの疑問に答えることである。§2 から §4 では、研究背景の説明を兼ねて議論に必要な理論面での準備を行なう。そのうえで §5 では平行平板コンデンサの極板間磁場の成因について検討する。それを踏まえて §6 では電磁波の伝播機構と励起源を明らかにする。結論は §7 において述べられる。

## 2 マクスウェルの方程式と電磁ポテンシャル

### 2.1 マクスウェルの方程式

真空中のマクスウェルの方程式は、電場  $\mathbf{E}$ 、磁場（磁束密度） $\mathbf{B}$ 、電束密度  $\mathbf{D}$ 、磁場の強さ  $\mathbf{H}$  を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2)$$

と表される（砂川 1973）。ここに、 $\rho$  は電荷密度、 $\mathbf{i}$  は電流密度であり、 $\mathbf{D}$  および  $\mathbf{H}$  は、 $\mathbf{E}$  および  $\mathbf{B}$  と

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \quad (3)$$

なる関係式で結ばれている。ただし、 $\varepsilon_0$  は真空の誘電率、 $\mu_0$  は真空の透磁率で

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4)$$

が真空中の光速を与える。なお、(2) の第 2 式、すなわちアンペール・マクスウェルの法則に現れる

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5)$$

は変位電流密度、あるいは単に変位電流と呼ばれている。

### 2.2 電磁ポテンシャル

マクスウェルの方程式は、以下の方程式系と等価である（砂川 1973）。

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi_{Lo} - \frac{\partial \mathbf{A}_{Lo}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Lo} \quad (6)$$

$$\square \phi_{Lo} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square \mathbf{A}_{Lo} = -\mu_0 \mathbf{i} \quad (7)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{Lo}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_{Lo} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $\square$  はダランベール演算子と呼ばれる演算子で、ラプラス演算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9)$$

を用いて次式で定義される。

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (10)$$

また  $\phi_{Lo}$  はローレンツゲージにおけるスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}_{Lo}$  はローレンツゲージにおけるベクトルポテンシャルと呼ばれ、これらを併せてローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルという。なお (8) はローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルが満たすべき条件を与えるもので、ローレンツ条件と称される。

一方、以下の方程式系もまたマクスウェルの方程式と等価である (砂川 1973)。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_{Co} - \frac{\partial\mathbf{A}_{Co}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Co} \quad (11)$$

$$\Delta\phi_{Co} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square\mathbf{A}_{Co} = -\mu_0\mathbf{i} + \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_{Co}}{\partial t}\right) \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{Co} = 0 \quad (13)$$

ここで  $\phi_{Co}$  および  $\mathbf{A}_{Co}$  は、それぞれクーロンゲージにおけるスカラーポテンシャルおよびクーロンゲージにおけるベクトルポテンシャルと呼ばれ、後者の満たすべき条件が (13) により与えられている。

なお、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルを用いても、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルを用いても、結果として得られる観測可能な電場  $\mathbf{E}$  および磁場  $\mathbf{B}$  に違いは生じない (砂川 1973)。

### 3 電場の縦成分と横成分

任意のベクトル場  $\mathbf{v}$  は、ヘルムホルツの定理により、以下のように分解可能である (安達 1961)。

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_L + \mathbf{v}_T \quad (14)$$

ここに、 $\mathbf{v}_L$  は  $\mathbf{v}$  の縦成分、 $\mathbf{v}_T$  は横成分と呼ばれ、それぞれ以下に示す式を満足する。

$$\nabla \times \mathbf{v}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_T = 0 \quad (15)$$

さてここで、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルに関して、次式が成立することに注目する。

$$\nabla \times (-\nabla\phi_{Co}) = -\nabla \times (\nabla\phi_{Co}) = 0, \quad \nabla \cdot \left(-\frac{\partial\mathbf{A}_{Co}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A}_{Co})}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

よって (11) の第 1 式から、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルを用いれば、電場  $\mathbf{E}$  を  $\nabla \times \mathbf{E}_L = 0$  を満足する縦成分  $\mathbf{E}_L$  と  $\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$  を満足する横成分  $\mathbf{E}_T$  に分解できることが分かる。ただし

$$\mathbf{E}_L = -\nabla\phi_{Co}, \quad \mathbf{E}_T = -\frac{\partial\mathbf{A}_{Co}}{\partial t} \quad (17)$$

一方、磁場  $\mathbf{B}$  は  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  を満たすので、横成分のみで構成されることに注意しよう。

かくして、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Co} \quad (18)$$

$$\Delta\phi_{Co} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \square\mathbf{A}_{Co} = -\mu_0\left(\mathbf{i} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}_L}{\partial t}\right) \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{Co} = 0 \quad (20)$$

と書き直せる。ここで (19) の第 2 式に現れる

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \quad (21)$$

は電場の縦成分による変位電流密度である。

## 4 変位電流は磁場を作らない

### 4.1 定常状態でのビオ・サバールの法則

物理量が時間的に変化しない定常状態で、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系は

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_{Lo}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Lo} \quad (22)$$

$$\Delta\phi_{Lo} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\mathbf{A}_{Lo} = -\mu_0\mathbf{i} \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{Lo} = 0 \quad (24)$$

となる。クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルも全く同じ方程式系を満たすので、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルとクーロンゲージにおける電磁ポテンシャルは定常状態では一致することが分かる。

さて今、上記方程式系からベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{Lo}$  を求め、それをを用いて磁場  $\mathbf{B}$  を計算すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (25)$$

が得られる (砂川 1973)。この公式は、ビオ・サバールの法則として広く知られるものである。

### 4.2 準定常状態でのビオ・サバールの法則

次いで時間的に緩慢に変化する現象を考える。この現象を特徴付ける時間スケールを  $\tau$  で、空間スケールを  $\lambda$  で表すとき、以下の条件が成立するならば、この現象は準定常状態にあるという (プランク 1977, § 89)。

$$\lambda/c\tau \ll 1 \quad (26)$$

物理的には、現象の時間的変化が緩慢で、光速  $c$  を無限大とみなし得るような状態が準定常状態である。

準定常状態にある現象に関する物理量の 1 つを  $f$  で表そう。これにダランベール演算子を作用させると

$$\square f = \Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (27)$$

を得る。このとき、 $f$  の変化のスケールを  $\delta f$  とし、右辺各項の大きさは

$$|\Delta f| = O(\delta f/\lambda^2), \quad \left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right| = O(\delta f/c^2\tau^2) \quad (28)$$

のように見積もられる。これを用いると、右辺各項の大きさの比は次のようになる。

$$\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right| / |\Delta f| = O(\lambda^2/c^2\tau^2) \quad (29)$$

かくして、(26) が成立する準定常状態では、ダランベール演算子はラプラス演算子に帰着することが分かる。

故に、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系は、準定常状態では

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_{Lo} - \frac{\partial\mathbf{A}_{Lo}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Lo} \quad (30)$$

$$\Delta\phi_{Lo} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\mathbf{A}_{Lo} = -\mu_0\mathbf{i} \quad (31)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi_{Lo}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}_{Lo} = 0 \quad (32)$$

により与えられることになる。この方程式系から、定常状態と同様に、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{Lo}$  をまず求め、それを用いて磁場  $\mathbf{B}$  を計算すると次式が得られる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (33)$$

これは緩慢な時間依存性はあるものの、ビオ・サバールの法則 (25) と形式的には全く同じ式になっている。

### 4.3 変位電流は磁場を作らない

他方、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルが準定常状態において従う方程式系は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{Co} \quad (34)$$

$$\Delta\phi_{Co} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\mathbf{A}_{Co} = -\mu_0 \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial\mathbf{E}_L}{\partial t} \right) \quad (35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{Co} = 0 \quad (36)$$

となる。ただし  $\mathbf{E}_L$  および  $\mathbf{E}_T$  は (17) で定義されている。この方程式系は、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系と非常によく似ているが、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{Co}$  の従うポアソン方程式の右辺には、電場の縦成分による変位電流密度が含まれていることに注意が必要である。

ここで再び、この方程式系からベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{Co}$  を求め、それを用いて磁場  $\mathbf{B}$  を計算するといかなる式が得られるであろうか。結果は、計算するまでもなく、(33) が得られることになる。その理由は、ローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルを用いても、クーロンゲージにおける電磁ポテンシャルを用いても、観測可能な物理量である磁場  $\mathbf{B}$  には違いが生じないからである。

以上で得られた結果をまとめると、次のように言うことができる。すなわち、ビオ・サバールの法則は準定常状態においても定常状態と同様に成立し、特に電流密度に変位電流密度を付け加える必要はない。この事実を簡単に「変位電流は磁場を作らない」と表現することがある (兵頭 2012)。

### 4.4 ジェフィメンコの式

ビオ・サバールの法則を一般の非定常状態に拡張したものは、ジェフィメンコの式と呼ばれ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial\mathbf{i}(\mathbf{r}', t_r)}{\partial t} \right] \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (37)$$

により与えられる (斎藤 2015)。ここで  $t_r$  は次式で定義される遅延時間である。

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (38)$$

ジェフィメンコの式 (37) は、§2.2 で示したローレンツゲージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系からベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{Lo}$  を求め、それを用いて磁場  $\mathbf{B}$  を計算することで導くことができる。言うまでもな

いが、クーロングージにおけるベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}_{C_0}$  を求め、それを用いて磁場  $\mathbf{B}$  を計算しても全く同じ式が得られる。どちらのゲージを採用しても結果として得られる磁場に違いは生じないからである。

このジェフィメンコの式にも、ビオ・サバルの法則と同様に、やはり変位電流密度は一切現れない。この事情もまた簡単に「変位電流は磁場を作らない」と表現されることがある（兵頭 2012）。

## 5 平行平板コンデンサの極板間磁場の成因

### 5.1 コンデンサの極板間では何がおきているか

以後、交流回路に繋がれた平行平板コンデンサの極板間の電磁場について考察する。ただし、回路を流れる交流の周期を  $\tau$ 、コンデンサの極板間隔を  $\lambda$  として、準定常状態の条件 (26) が成立しているものとする。

議論にあたっては、クーロングージを採用することにしよう。準定常状態を仮定しているのだから、クーロングージにおける電磁ポテンシャルの従う方程式系は (34)、(35)、および (36) により与えられる。

まず (34) の第 2 式の時間微分をとり、電場の横成分  $\mathbf{E}_T$  の定義 (17) を用いると、ファラデーの電磁誘導の法則が出てくる。その回転をとると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) \quad (39)$$

この式は、磁場の渦度が、電場の横成分の渦度の回転により生成されることを示している。

次に (35) の第 2 式の時間微分をとると、コンデンサの極板間には電流が存在しない ( $i = 0$ ) ので

$$\Delta \mathbf{E}_T = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_L}{\partial t^2} \quad (40)$$

を得る。ここで任意のベクトル  $\mathbf{v}$  について成立する公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \quad (41)$$

を利用し、 $\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$  が成り立つことに注意すると

$$\Delta \mathbf{E}_T = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) \quad (42)$$

であることが分かる。これを (40) に代入すれば

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_L}{\partial t^2} \quad (43)$$

という極板間電場の横成分と縦成分の間関係式が得られる。右辺が極板間電場の縦成分による変位電流密度  $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}_L / \partial t$  の時間微分に真空の透磁率  $\mu_0$  を乗じたものであることに注意しよう。

この関係式と上で得られた (39) を見比べると、我々は次のように結論することができる。すなわち、コンデンサの極板間電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化が、極板間電場の横成分の渦度の回転を介して、間接的にコンデンサの極板間磁場の渦度を生成している。

最後に (43) を (39) に代入したうえで、今度は時間について積分してみよう。結果は以下のとおりである。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_0(\mathbf{r}) \quad (44)$$

ここに、 $\mathbf{\Omega}_0(\mathbf{r})$  は極板間電場の縦成分による変位電流密度がゼロのときの極板間磁場の渦度を表している。一方、公式 (41) と (36) および (34) の第 2 式を用いると次式の成立することが分かる。

$$\Delta \mathbf{A}_{C_0} = -\nabla \times \mathbf{B} \quad (45)$$

これを (35) の第 2 式に代入し、極板間では  $\mathbf{i} = 0$  であることに注意すると、以下の関係式を得る。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \quad (46)$$

この極板間で成立するアンペール・マクスウェルの法則は  $\boldsymbol{\Omega}_0(\mathbf{r})$  がゼロであることを示している。つまり極板間磁場の渦度には、極板間電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化が、極板間電場の横成分の渦度の回転を介して間接的に生み出したもの以外は、一切含まれていないのである。

## 5.2 平行平板コンデンサの極板間磁場

前小節の結果は次のようにまとめることができる。すなわち、コンデンサの極板間電場の縦成分による変位電流密度は §4.3 で述べた意味では磁場を作らない。しかしながら、その時間的変化は、極板間電場の横成分の渦度の回転を介して、間接的にコンデンサの極板間磁場の渦度を生成する

こうして生成された極板間磁場の渦度に対応する磁場を、極板間で成立するアンペール・マクスウェルの法則 (46) に基づいて計算することは、どの教科書にも載っている簡単な練習問題である (付録 A 参照)。

## 5.3 電流密度とその回転

準定常状態において変位電流密度の果たす役割は、以上で明らかになった。電磁波の伝播機構とその励起源についての考察に移る前に、準定常状態における電流密度の役割を見ておきたい。

電流密度  $\mathbf{i}$  がゼロではない領域で §5.1 と同様の議論を繰り返せば、準定常状態における電流密度の役割は自ずと明らかになる。まず (35) の第 2 式の時間微分をとることで

$$\Delta \mathbf{E}_T = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \right) \quad (47)$$

が得られる。この式は (42) を利用すると、以下のように書き換えられる。

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \right) \quad (48)$$

これを再び (39) と見比べると、電流密度の時間的変化は、電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化と全く同様に、電場の横成分の渦度の回転を介して、磁場の渦度を生み出すということが分かる。

他方 (35) の第 2 式の回転をとり、その際 (34) の第 2 式に注意すると、磁場  $\mathbf{B}$  に関するポアソン方程式

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{i} \quad (49)$$

を得る。このポアソン方程式の解が、準定常状態におけるビオ・サバルの法則 (33) である。さらに、公式 (41) と  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  に注意して左辺を変形すれば、次式が従う。

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{i} \quad (50)$$

これは、準定常状態において磁場の渦度の回転と電流密度の回転との間に成立する関係式を与えている。右辺に電場の縦成分による変位電流密度が現れない理由は、その回転がゼロとなるためである。準定常状態におけるビオ・サバルの法則に当該変位電流密度が現れないのも同じ理由による。

## 6 電磁波の伝播機構と励起源

### 6.1 電磁波の伝播機構

電磁波の伝播機構について議論するため、まず電荷も電流も存在しない真空中を伝播する電磁波を考えることにする。電荷も電流も存在しない真空中でのマクスウェルの方程式は、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (51)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (52)$$

と表される。ここでクーロンゲージにおける電磁ポテンシャルを用いて、電場を (17) で定義される縦成分  $\mathbf{E}_L$  と横成分  $\mathbf{E}_T$  に分解しよう。このとき、上記マクスウェルの方程式は、次のように書き換えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (53)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \left( \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \right) \quad (54)$$

ところで、電場の縦成分  $\mathbf{E}_L$  はクーロンゲージにおけるスカラーポテンシャル  $\phi_{Co}$  を用いて  $\mathbf{E}_L = -\nabla \phi_{Co}$  と表されることを思い出そう。これを  $\nabla \cdot \mathbf{E}_L = 0$  に代入すると、次のラプラス方程式が得られる。

$$\Delta \phi_{Co} = 0 \quad (55)$$

無限遠方で  $\mathbf{E}_L = -\nabla \phi_{Co} = 0$  を要求すると、この方程式の解  $\phi_{Co}$  は定数となる。その結果、全領域で

$$\mathbf{E}_L = -\nabla \phi_{Co} = 0 \quad (56)$$

を得る。かくして、電荷も電流も存在しない真空中でのマクスウェルの方程式は、次式に帰着する。

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} \quad (57)$$

さてここで (57) の第 2 式の回転をとってみよう。その結果、次式が得られる。

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} \quad (58)$$

右辺に (57) の第 3 式を代入し、さらに公式 (41) と  $\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$  を用いると、次の波動方程式が得られる。

$$\left( \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_T = 0 \quad (59)$$

この方程式は、電場の横成分  $\mathbf{E}_T$  が波動として光速  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  で伝播することを示している。

一方で (57) の第 3 式の回転をとると、次式が得られる。

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}_T \quad (60)$$

この式と (57) の第 2 式から、上と同様にして磁場  $\mathbf{B}$  に対する波動方程式が従う。

$$\left( \Delta - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0 \quad (61)$$



以上の解析から分かることは、まず第一に、電磁波は電場の横成分  $\mathbf{E}_T$  と磁場  $\mathbf{B}$  により構成されることである (兵頭 2012)。電場の縦成分  $\mathbf{E}_L$  は電磁波の伝播には全く関与しない。

さらに (58) を見て我々は以下の事実に気付く。すなわち、電場の横成分の渦度の回転が、磁場の渦度を生成している。他方 (60) は、磁場の渦度の回転が、電場の横成分の渦度を生成することを示している。かくして我々は、電磁波の伝播機構について次のように結論することができる。電磁波は、電場の横成分の渦度の回転が、磁場の渦度を生成し、磁場の渦度の回転が、電場の横成分の渦度を生成しながら伝わる波である。

実際、この伝播機構に基づいて、平面進行電磁波の構造を議論することができる (付録 B 参照)。

## 6.2 電磁波の励起源

電荷や電流が存在する場合、電場の横成分に対する波動方程式は次式で与えられる。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}_T = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t}\right) \quad (62)$$

これは、クーロンゲージにおけるベクトルポテンシャルが従う (19) の第 2 式を時間で微分すれば直ちに得られる。他方、磁場に対する波動方程式は、(19) の第 2 式の回転をとり、電場の縦成分による変位電流密度の回転がゼロであることに注意すれば、以下のように表される。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \times \mathbf{i} \quad (63)$$

当然のことながら、この波動方程式の解がジェフィメンコの式 (37) である。この事実から、ジェフィメンコの式に電場の縦成分による変位電流密度が現れないのは、その回転がゼロであるためだと理解できよう。

これらの波動方程式から、電磁波の励起源には 2 種類あることが分かる。1 つ目は、電流密度および電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化である。準定常状態において成立する §5.3 の (48) を踏まえると、これらは電場の横成分の渦度の回転を介して電磁波を励起するものと解釈できる。いま 1 つは電流密度の回転であって、§5.3 の (50) は、これが磁場の渦度の回転を介して電磁波を励起することを示している。

## 6.3 電場に対する波動方程式

ところで、電荷や電流が存在する場合、電場の縦成分は以下のポアソン方程式を満足する。

$$\Delta \mathbf{E}_L = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho \quad (64)$$

この方程式は (19) の第 1 式の勾配をとることで得られる。これを (62) に加えると

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}_T + \Delta \mathbf{E}_L = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_L}{\partial t^2} \quad (65)$$

を得るが、右辺第 3 項を左辺に移項すると、電場  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T$  に対する次の波動方程式が従う。

$$\left(\Delta - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} \quad (66)$$

この波動方程式は、電場の変動が磁場の変動と同様に、電磁波の伝播速度  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  で伝わることを示している。これは当然期待されるべき結果であるが、この結果を導くためには、電場の横成分に対する波動方程式 (62) の右辺において、電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化を表す項の存在が不可欠であることに注意しよう。この事実、電磁波の励起源としての当該変位電流密度の重要性を物語っている。

## 7 結論

クーロンゲージの下で電場は縦横の成分に分解できる。本論文では、準定常状態にある平行平板コンデンサの極板間磁場の成因をこのゲージの下で考察した。その結果、極板間電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化が、横成分の渦度の回転を介して、間接的に当該磁場の渦度を生成していることが明らかになった。

次いで我々は、準定常状態における電流密度の時間的変化が、やはり電場の横成分の渦度の回転を介して、間接的に磁場の渦度を生み出しているという事実を見出した。この点において、電場の縦成分による変位電流密度と通常の電流密度の役割は同じであると言って差し支えない。

他方、電場の縦成分による変位電流密度と通常の電流密度の間には、前者の回転がゼロであるという明確な違いが存在する。準定常状態におけるビオ・サバルの法則に前者が現れないのは、この違いが原因である。さらにこの違いは、電磁波の励起機構における両者の役割の違いとして顕在化する。

これを見るのに先立って我々は、電荷も電流も存在しない真空中における電磁波の伝播機構について調査した。まず分かったことは、電磁波は電場の横成分と磁場から構成され、電場の縦成分はその伝播には全く関与しないという事実である。さらに、電磁波は電場の横成分の渦度の回転が磁場の渦度を生成し、磁場の渦度の回転が電場の横成分の渦度を生成しながら伝わる波であることが明らかになった。

そのうえで電磁波の励起源を探ったところ、2種類の励起源の存在が浮かび上がった。1つ目は、電流密度ならびに電場の縦成分による変位電流密度の時間的変化である。準定常状態での解析を踏まえて、これらは電場の横成分の渦度の回転を介して電磁波を励起するものと解釈された。2つ目は、電流密度の回転であり、これは磁場の渦度の回転を介して電磁波を励起する。電場の縦成分による変位電流密度は、既に指摘したとおりその回転がゼロであり、この機構による電磁波の励起には一切寄与しない。このことは、ビオ・サバルの法則を一般化したジェフィメンコの式に当該変位電流密度が現れない、という事実に反映されている。

以上の解析を通して浮き彫りになったのは、電場および磁場そのものではなく、それらの渦度の重要性である。ここで任意のベクトル場は、無限遠方でゼロになるという条件の下で、その発散と回転を与えれば一意的に決定されることを思い出そう（太田 2012, 付録 A.3）。特に磁場は、その回転、すなわち渦度のみを与えればその分布は決まってしまう。この事実に照らせば、変位電流の役割を考えるうえで本来議論すべきであったものは、磁場そのものの成因ではなく、その渦度の成因だったのである（北野 2021）。

## 謝辞

本論文は防衛大学校応用科学群地球海洋学科において本科第 67 期卒業研究として実施された研究の成果を丸山が再構成したものである。研究を遂行するにあたって地球海洋学科の大木道生先生との議論は極めて有益であった。特に変位電流の役割を考えるうえでのローレンツゲージとクーロンゲージの差異ならびに後者の重要性を筆者らに教示してくださったのは大木先生である。ここに記して深甚なる謝意を表したい。なお当然のことながら本論文に有り得べき誤謬の一切は筆者らの責任に帰するものである。

## 付録 A 準定常状態におけるコンデンサの極板間電磁場

導体に電荷を与えて帯電させたとき、定常状態において電荷は導体表面にのみ分布し導体内部には存在しない。このとき導体の表面付近の電場は導体表面に垂直で、その大きさ  $E_n$  はクーロンの法則

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{A.1})$$

により与えられる (砂川 1977)。ただし  $\sigma$  は電荷の表面密度である。

さて今、図 A.1 に示すような面積  $S$  の円盤状の極板を持つ平行平板コンデンサを考える。このコンデンサ

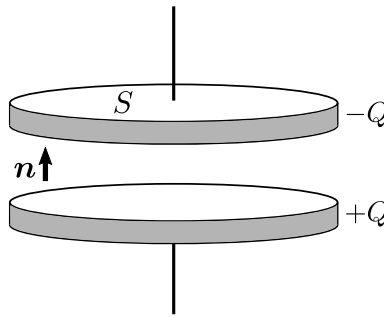


図 A.1 平行平板コンデンサ

に蓄えられる電荷量  $Q$  は  $Q = Q_0 \sin 2\pi\nu t$  に従って時間変化し、下側の極板には  $+Q$  の電荷が、上側の極板には  $-Q$  の電荷が一様に分布するものと仮定しよう。ただし、振動数  $\nu$  は十分に小さく、よってコンデンサの極板間で生じる現象は準定常状態にあるものとする。

導体の表面付近の電場に関するクーロンの法則 (A.1) が準定常状態においても成立すると仮定し、極板の端の影響を無視すると、極板間電場の縦成分  $\mathbf{E}_L$  は

$$\mathbf{E}_L = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} \sin 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.2})$$

により与えられる。ただし  $\mathbf{n}$  は下側の極板から上側の極板に向かう単位ベクトルである。このとき、極板間電場の縦成分による変位電流密度は

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} = \frac{(2\pi\nu)Q_0}{S} \cos 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.3})$$

となり、その時間微分に真空の透磁率  $\mu_0$  を乗じたものは次式で与えられることになる。

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_L}{\partial t^2} = -\frac{\mu_0 (2\pi\nu)^2 Q_0}{S} \sin 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

この表式を極板間電場の縦成分と横成分の間の関係式 (40) の右辺に代入すると

$$\Delta \mathbf{E}_T = -\frac{\mu_0 (2\pi\nu)^2 Q_0}{S} \sin 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.5})$$

が得られる。ここで  $A$  を定数、コンデンサの中心軸からの距離を  $\xi$  として

$$\mathbf{E}_T = A \xi^2 \sin 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.6})$$

のように仮定しよう。これを (A.5) の左辺に代入すると、次式が得られる。

$$A\Delta\xi^2 = -\frac{\mu_0(2\pi\nu)^2Q_0}{S} \quad (\text{A.7})$$

ラプラス演算子  $\Delta$  は、極板間に設置した円柱座標系  $(\xi, \theta, z)$  を採用すると

$$\Delta = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

と表現される (森口・宇田川・一松 1956)。これから  $\Delta\xi^2 = 4$  であることが分かるので、(A.7) より

$$A = -\frac{\mu_0(2\pi\nu)^2Q_0}{4S} \quad (\text{A.9})$$

を得る。結局、極板間電場の横成分  $\mathbf{E}_T$  は次式で与えられることになる。

$$\mathbf{E}_T = -\frac{\mu_0(2\pi\nu)^2Q_0}{4S} \xi^2 \sin 2\pi\nu t \mathbf{n} \quad (\text{A.10})$$

最後に、コンデンサの極板間に生じる磁場を、準定常状態におけるアンペール・マクスウェルの法則 (46) に基づいて計算しよう。そのために、まず (46) の両辺と  $\mathbf{n}$  との内積をとる。

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A.11})$$

次いで、極板間の水平面上にコンデンサの中心軸からの距離  $\xi$  が一定の円  $C$  を描き、その内部  $D$  にわたって上式の両辺を面積分してみる。その際、左辺にストークスの定理を適用すると、次式が得られる。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} ds = \int_D \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A.12})$$

ただし  $\mathbf{t}$  は円  $C$  の接線単位ベクトルで、その向きは  $C$  の内部  $D$  を左に見る向きであり、 $s$  は  $C$  に沿って同じ向きに測った弧長パラメタである。ここで、 $\mathbf{B}$  がコンデンサの中心軸のまわりに対称であることから

$$\mathbf{B} = B(\xi, t) \mathbf{t} \quad (\text{A.13})$$

と書けるものと仮定すると、(A.12) の左辺は以下のように計算できる。

$$\int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} ds = 2\pi\xi B(\xi, t) \quad (\text{A.14})$$

一方、(A.12) の右辺に (A.3) を代入すると

$$\int_D \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\mu_0(2\pi\nu)Q_0}{S} \pi\xi^2 \cos 2\pi\nu t \quad (\text{A.15})$$

を得る。かくして (A.12) より

$$B(\xi, t) = \frac{\mu_0(2\pi\nu)Q_0}{2S} \xi \cos 2\pi\nu t \quad (\text{A.16})$$

が従うので、極板間磁場の表式は以下のとおりとなる。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0(2\pi\nu)Q_0}{2S} \xi \cos 2\pi\nu t \mathbf{t} \quad (\text{A.17})$$

## 付録 B 平面進行電磁波の構造

以下では、次のような平面進行電磁波を仮定し、電磁波の伝播機構を表す (58) および (60) に基づいて、その構造を議論する。

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{b} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.1})$$

ただし  $\mathbf{a}$  および  $\mathbf{b}$  は一定のベクトルを表し、 $\mathbf{k}$  は波数ベクトル、 $\omega$  は角振動数である。

この平面進行電磁波の位相  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  が一定の面、すなわち等位相面が波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に直交する平面であることをまず確認しておこう。そのためには、一定時刻の等位相面上の相異なる任意の 2 点  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  について

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \omega t = \phi_0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \omega t = \phi_0 \quad (\text{B.2})$$

が成立することに注意すればよい。ただし  $\phi_0$  は定数である。第 1 式から第 2 式を引くと

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0 \quad (\text{B.3})$$

が得られる。これは等位相面上の任意の 2 点を結ぶベクトルが波数ベクトル  $\mathbf{k}$  に直交すること、従って等位相面が  $\mathbf{k}$  に直交する平面であることを示している。

次に平面進行電磁波の伝播速度について考察してみよう。そのためにまず、ある時刻  $t_0$  において位相値  $\phi_0$  を持つ等位相面を考える。この等位相面上にとった任意の 1 点  $\mathbf{r}_0$  について、明らかに次式が成立する。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0 - \omega t_0 = \phi_0 \quad (\text{B.4})$$

この等位相面が  $\delta t$  時間後に距離  $\delta l$  だけ伝播したとしよう。このとき、等位相面が  $\mathbf{k}$  に直交する平面であることから、 $k = |\mathbf{k}|$  として、点  $\mathbf{r}_0 + \delta l(\mathbf{k}/k)$  が伝播後の等位相面上に存在することが分かる。従って

$$\mathbf{k} \cdot \{\mathbf{r}_0 + \delta l(\mathbf{k}/k)\} - \omega(t_0 + \delta t) = \phi_0 \quad (\text{B.5})$$

が成立する。この式から (B.4) を引くと次式が従う。

$$k\delta l - \omega\delta t = 0 \quad (\text{B.6})$$

かくして等位相面の伝播速度  $c_p$  が次のとおりに求められる。

$$c_p = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta l}{\delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (\text{B.7})$$

以上より、平面進行電磁波は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の方向に速さ  $c_p = \omega/k$  で伝播することが分かった。

これ以降、座標  $x, y, z$  を  $x_1, x_2, x_3$  で、 $x, y, z$  各方向の単位ベクトルを  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  で表すことにする。さらに任意のベクトル  $\mathbf{v}$  について、その成分を  $v_1, v_2, v_3$  で示す。また添字  $i, j, \dots$  は、いずれも数字  $1, 2, 3$  を表し、2 度繰り返された添字については和をとるものと約束する (アインシュタインの総和の規約)。例えば

$$v_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{v} \quad (\text{B.8})$$

ここで  $\nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$  であったことを思い出そう。上で導入した記法では

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_j x_j \quad (\text{B.9})$$

と書けることに注意すると

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \mathbf{a} \sin(k_j x_j - \omega t) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a} \cos(k_j x_j - \omega t) \frac{\partial(k_j x_j)}{\partial x_i} \quad (\text{B.10})$$

を得る。ところが  $\delta_{ij}$  をクロネッカーのデルタ ( $i = j$  ならば  $\delta_{ij} = 1$ ,  $i \neq j$  ならば  $\delta_{ij} = 0$ ) として

$$\frac{\partial(k_j x_j)}{\partial x_i} = k_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = k_j \delta_{ij} = k_i \quad (\text{B.11})$$

が成立するから

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_T = k_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a} \cos(k_j x_j - \omega t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.12})$$

となる。これがゼロに等しいことから

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (\text{B.13})$$

であることが分かる。すなわち  $\mathbf{a}$  は波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と直交するのである。同様にして  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  から

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{B.14})$$

が従う。すなわち  $\mathbf{b}$  もまた波数ベクトル  $\mathbf{k}$  と直交することになる。以上より、電磁波はその振動方向が進行方向と直交する横波であることが分かった。

さて今、電磁波の伝播機構を表す2式、すなわち (58) および (60) のうちの前者に注目しよう。

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \mathbf{a} \sin(k_j x_j - \omega t) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{a} \cos(k_j x_j - \omega t) \frac{\partial(k_j x_j)}{\partial x_i} \quad (\text{B.15})$$

であるが、(B.11) を用いると

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = k_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{a} \cos(k_j x_j - \omega t) = \mathbf{k} \times \mathbf{a} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.16})$$

を得る。同様にして

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.17})$$

ところが、ベクトル三重積の公式と (B.13) により

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{a} = -k^2 \mathbf{a} \quad (\text{B.18})$$

であるから、結局

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_T) = -k^2 \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.19})$$

が得られる。一方で  $\nabla \times \mathbf{B}$  については

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{b} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.20})$$

が成立するので

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{b} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.21})$$

かくして (58) より、次の関係式の成立することが理解される。

$$k^2 \mathbf{a} = -\omega \mathbf{k} \times \mathbf{b} \quad (\text{B.22})$$

他方 (60) については、(B.20) の回転をとり、ベクトル三重積の公式と (B.14) とを用いて

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = k^2 \mathbf{b} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.23})$$

を得る。これと、(B.16) を時間に関して偏微分した

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}_T = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{a} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (\text{B.24})$$

に  $\varepsilon_0 \mu_0$  を乗じたものが等しいことから、次の関係式が従う。

$$k^2 \mathbf{b} = (\varepsilon_0 \mu_0) \omega \mathbf{k} \times \mathbf{a} \quad (\text{B.25})$$

ここで (B.22) と波数ベクトル方向の単位ベクトル  $\mathbf{k}/k$  との外積をとってみよう。左辺は

$$k^2 (\mathbf{k}/k) \times \mathbf{a} \quad (\text{B.26})$$

となり、右辺はベクトル三重積の公式と (B.14) により

$$-\omega (\mathbf{k}/k) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = -\omega \{(\mathbf{k}/k) \cdot \mathbf{b}\} \mathbf{k} + \omega \{(\mathbf{k}/k) \cdot \mathbf{k}\} \mathbf{b} = \omega k \mathbf{b} \quad (\text{B.27})$$

となる。かくして我々は

$$\mathbf{b} = (k/\omega) (\mathbf{k}/k) \times \mathbf{a} \quad (\text{B.28})$$

なる関係式を得る。他方 (B.25) は

$$\mathbf{b} = (\varepsilon_0 \mu_0) (\omega/k) (\mathbf{k}/k) \times \mathbf{a} \quad (\text{B.29})$$

と書けることに注意しよう。これら 2 式を見比べると

$$\omega = (1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) k = ck \quad (\text{B.30})$$

という分散関係式が得られる。ここに  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  は真空中の光速である。

以上より、平面進行電磁波の電場の振幅ベクトル  $\mathbf{a}$  と磁場の振幅ベクトル  $\mathbf{b}$  の間には

$$\mathbf{b} = (1/c) (\mathbf{k}/k) \times \mathbf{a} \quad (\text{B.31})$$

なる関係式が成立し、その伝播速度  $c_p = \omega/k$  は真空中の光速  $c$  に等しいという結果が導かれた。

## 参考文献

- [1] 安達忠次, “ベクトル解析 改訂版,” 培風館 (1961).
- [2] 兵頭俊夫, “変位電流は磁場を“作る”か,” 物理教育, 60 (2012), 44–51.
- [3] 北野正雄, “変位電流をめぐる混乱について,” 大学の物理教育, 27 (2021), 22–25.
- [4] 森口繁一・宇田川銑久・一松信, “岩波 数学公式 I,” 岩波書店 (1956).
- [5] 太田浩一, “電磁気学の基礎 I,” 東京大学出版会 (2012).
- [6] プランク, M., “理論物理学汎論 第三巻 理論電気磁気学,” 生産技術センター (1977).
- [7] 斎藤吉彦, “ジェフィメンコ式とマクスウェル方程式,” 物理教育, 63 (2015), 17–21.
- [8] 砂川重信, “理論電磁気学 第2版,” 紀伊國屋書店 (1973).
- [9] 砂川重信, “電磁気学,” 岩波書店 (1977).
- [10] 朝永振一郎 編, “物理の歴史,” 筑摩書房 (2010).