

# Sandström の定理について

丸山清志

防衛大学校地球海洋学科

2019 年 10 月 7 日

## 1 はじめに

Sandström の定理は、海洋中の子午面循環のエネルギー論をめぐる論争の理論的基盤の一つとなっている。本解説の目的は、この定理の物理的に妥当な解釈を明らかにすることである。

## 2 Sandström の定理の数式による表現

Defant(1961) によれば、Sandström の定理は以下のように表現することができる。

まず、図 1 に流線  $s$  で示されているように、鉛直面内に流体の反時計回りの定常循環が存在するものと仮定しよう。この定常循環は、流体の加熱・冷却に伴って生じているものとする。その強さを

$$C = \oint_s \mathbf{u} \cdot t ds$$

で表すことにすると、Bjerknes の循環定理から

$$\frac{dC}{dt} = - \oint_s \alpha dp - R$$

を得る。ただし  $\alpha$  は流体の単位質量あたりの体積、すなわち比容であり、 $p$  は圧力である; また  $R > 0$  は摩擦による循環の減衰を表現する項である。いま、循環は定常なので、 $dC/dt = 0$  である。よって上式は

$$- \oint_s \alpha dp = R$$

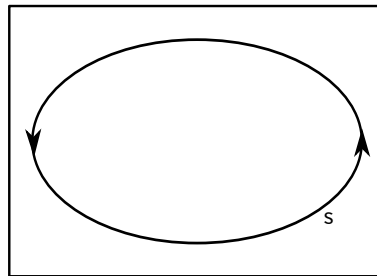


図 1

となるが、 $R > 0$ であるゆえ

$$-\oint_s \alpha dp > 0 \tag{1}$$

が得られる。(1) が Sandström の定理の数式による表現である。

### 3 Sandström の定理の一般的解釈

上で示した Sandström の定理 (1) は、Defant(1961) によれば、以下のように解釈される。

すなわちまず、図 1 に示した定常循環の流線上に単位質量の流体粒子を考え、循環に伴ってこの流体粒子が流線上を一周する際に経験する熱力学的な状態変化を、横軸に圧力 ( $p$ ) 縦軸に比容 ( $\alpha$ ) をとった平面上にプロットする。その結果が概略、図 2 に示すようになったとしよう。図 2 (a) では、比較的低圧域で流体の膨張が起こり、比較的高圧域では流体の収縮が起こっている。低圧・高圧は水深の浅い・深いに対応し、流体の膨張・収縮は、それぞれ流体の加熱・冷却に対応するので、図 2 (a) では、比較的浅い所で流体の加熱が、比較的深い所で流体の冷却が起こっていることが分かる。同様にして、図 2 (b) では、比較的深い所で加熱が、比較的浅い所で冷却が起こっていることが分かる。一方で、Sandström の定理の表式 (1) が成立するのは、図 2 (b) の場合のみであることは容易に理解できよう。

以上より「熱源が冷源よりも深い所にあるときに限り、鉛直面内の定常循環は存在し得る」という主張が可能のように思われる。これが、一般的な Sandström の定理の解釈であり、この解釈に基づいて Huang(1999) は海洋中の子午面循環のエネルギー論を展開し、それが一連の論争を巻き起こす契機となったのである。

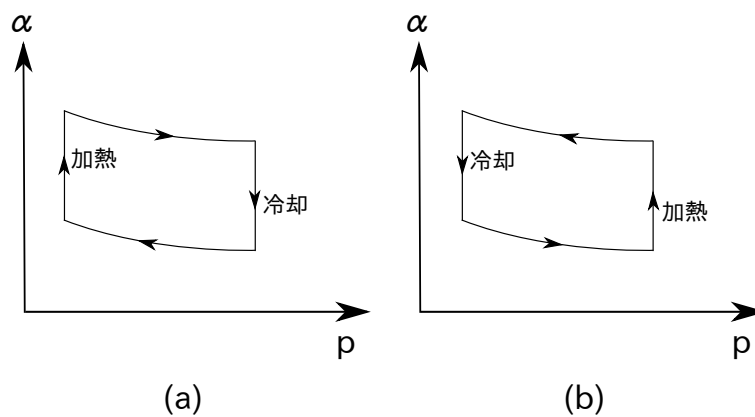


図 2

### 4 Sandström の定理の本当の意味

上述の Sandström の定理に対する一般的な解釈は、しかしながら、物理的に妥当でないことが以下のようにして容易に分かる。

まず重要なことは、定常循環中で流体の加熱・冷却がどのようにして起こるかを正しく認識することである。定常状態では当然、流体中の温度分布は変化せず、流体粒子はこの定常な温度場中を運動している。このとき、流体粒子の加熱は、流体粒子が等温線を低温側から高温側へと横切るときに起こる。一方、流体粒子の冷却が起こるのは、流体粒子が等温線を高温側から低温側へと横切るときである。つまり、定常循環中で流体

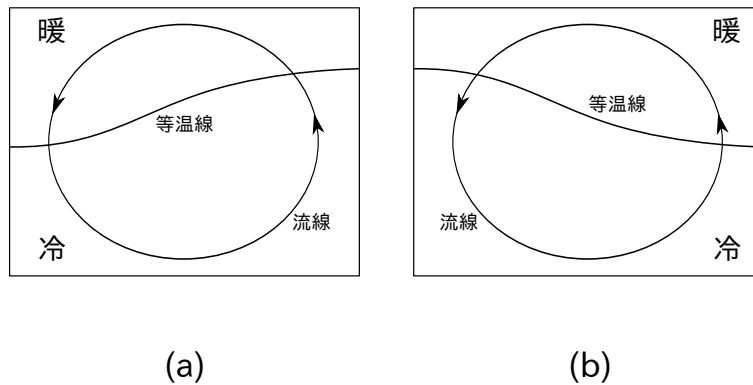


図 3

が加熱・冷却される位置は、熱源・冷源の位置とは無関係に、時間的に変化しない等温線を流体がどのように横切るかで決まってしまうのである。

この事実を念頭において、図 2 (a) 及び (b) で示した状態変化に対応する鉛直面内の温度分布と循環の関係の概念図を描けば、それぞれ図 3 (a) 及び (b) のようになるであろう。図 3 (b) の循環は、比較的暖かく従って軽い流体が上昇して上面付近に広がり、一方、比較的冷たく従って重い流体が下降して底面付近に広がる、という至極もったもな循環となっているのに対し、図 3 (a) の循環は、比較的暖かく従って軽い流体が下降し、比較的冷たく従って重い流体が上昇する、という常識的にありえない循環となっている。

以上のことから、Sandström の定理というものは、一般に信じられているように、熱源・冷源の相対的な位置関係に制約を加えるようなものではなく、その真の意味は、

- 流体の加熱・冷却に伴う定常な鉛直循環が存在するならば、
- 等温線は傾いておらねばならず、
- 循環の流线が等温線を低温側から高温側へと横切る点は、それが等温線を高温側から低温側へと横切る点よりも低い所になければならない、

すなわち、図 3 (b) のような常識的な循環でなければならない、というものであることが理解される。

なお本節の議論は、断熱圧縮・膨張に伴う昇温・降温が無視し得るものとして展開されたが、これらが無視し得ない場合にも、「温度」を「温位」と読み替えることでそのまま成立する。

## 5 結論

以上で、海洋中の子午面循環のエネルギー論をめぐる論争の理論的基盤の一つである Sandström の定理の意義は明らかになった。Huang(1999) がこの定理の一般的な解釈に基づいて子午面循環のエネルギー論を展開して以降、混乱した論争が引き起こされてきた。しかしながら本解説で示したとおり、Sandström の定理は本来、極めて常識的な事実を述べているに過ぎず、問題を引き起こすような性格のものではない。混乱の真の原因は、論争のもう一つの理論的基盤、すなわち Winters et al.(1995) によって提示されたブシネスク近似下での流体のエネルギー論なのである。

## 参考文献

- [1] Defant, A., "Physical Oceanography. Vol. I," Pergamon (1961).
- [2] Huang, R. X., "Mixing and Energetics of the Oceanic Thermohaline Circulation," *J. Phys. Oceanogr.*, 29 (1999), 727–746.
- [3] Winters, K. B., Lombard, P. N., Riley, J. J. and D'Asaro, E. A., "Available potential energy and mixing in density-stratified fluids," *J. Fluid Mech.*, 289 (1995), 115–128.