Boussinesq 近似の合理的導出

Rational Derivation of the Boussinesq Approximation

○丸山清志, 防衛大学校地球海洋学科, 横須賀市走水 1-10-20
Kiyoshi Maruyama, Department of Earth and Ocean Sciences, National Defense Academy, Yokosuka, Kanagawa 239-8686, Japan

The Boussinesq approximation is derived in a manner consistent with the conservation law of mass. It is shown that the governing equations of a fluid under the approximation can be obtained on the basis of the assumption that the fluid is incompressible, in the sense that the density of the fluid is constant. The equation of motion, in particular, can be formulated with the help of the conservation law of energy. The conditions for the approximation to be valid are also discussed.

1. はじめに

Boussinesq 近似は，非一様な温度分布を持つ流体の運動を記述するために広く用いられる近似である．この近似は伝統的に，流体の密度が流体の温度のみの一次関数であるという仮定の下で導かれる [1, 2]．しかし容易に分かるように，この仮定は質量の保存則と矛盾している [3]．これは当該近似を導出するために用いられる伝統的な方法の致命的な欠陥である．

当該近似の重要性に鑑みれば，質量の保存則に整合的な方法でこれを導出することはぜひとも必要なことである．そこで本稿では，密度が一定という意味での流体の非圧縮性を仮定して当該近似を導出する方法を示す．これが可能なのは，当該近似下で浮力と称される力の必要性が，エネルギーの保存則に基づいて演繹され得るためである．当該近似が妥当となるための条件 [4] もこの導出法に照らして改訂される．

2. 思考実験に基づく浮力の導出

まず Boussinesq 近似下で浮力と称される力が，ごく簡単な思考実験に基づいて導出できることを示しておきたい．当該近似の本質は本節の議論でほぼ明らかになるものと期待される．

一様重力場中で静止している流体を考える．この流体中には直交座標系 (x_1, x_2, x_3) が設定されており，特に x_3 軸は鉛直上向きに取られているものとする．以後，正の x_1, x_2, x_3 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ で示す．また，添字 $i, j, \ldots$ は数字 1, 2, 3 を表わすものとし，総和の規約が用いられる．

さて，この流体中に単位体積の流体要素 A をとろう．この流体要素の温度は T_a であるとする．次に，この流体要素から見て $\boldsymbol{e}_i dx_i$ の位置にもう一つ別の単位体積の流体要素 B をとる．この流体要素の温度は T_b であるとしよう．ただし，T_b は T_a と大きくは異ならないものとする．

ここで，今考えている流体が一定の密度 ρ_0 を持つ非圧縮性流体であると仮定しよう．このとき上述の二つの流体要素 A と B は同じ質量 ρ_0 を持つことになる．以下での我々の目標は，これら二つの流体要素の位置を断熱準静的に入れ替える過程を考え，そのエネルギー収支を検討し，以って Boussinesq 近似下で浮力と称される力を導出することである．

初めに流体要素 A に注目しよう．その位置を要素 B の位置と断熱準静的に交換するとき，その比エントロピー s は不変である．よって位置交換に伴う要素 A の温度変化 dT_a は

$$dT_a = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s dp_a \tag{1}$$

により計算できる．ここで T は温度を p は圧力を表し，dp_a は要素 A が経験する圧力変化を示す．右辺の係数は，次節で示す公式 (30) を用いれば，以下のように書き直せる:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{\beta T_a}{\rho_0 c_p}. \tag{2}$$

ただし β は流体の熱膨張係数で c_p は定圧比熱であり，これらは本節では定数とみなされる．一方，要素 A は静水圧下で鉛直方向に dx_3 だけ変位するので dp_a は次式で与えられる:

$$dp_a = -\rho_0 g dx_3. \tag{3}$$

ここに g は重力加速度である．よって (1), (2), 及び (3) より

$$dT_a = -\frac{\beta T_a g}{c_p} dx_3 \tag{4}$$

を得る．結局，位置交換後の要素 A の温度は

$$T_a - \frac{\beta T_a g}{c_p} dx_3 \tag{5}$$

となる．同様にして，位置交換後の要素 B の温度が

$$T_b + \frac{\beta T_b g}{c_p} dx_3 \tag{6}$$

となることが分かる．これらの結果に基づいて，以下では要素 A と B からなる系のエネルギー収支を考察してみよう．

まずこの系の運動エネルギーは，上述の過程を通して常にゼロである．というのも，この過程は準静的過程であり，二つの流体要素はいずれも過程を通して静止しているからである．系の位置エネルギーもまた不変である．要素 A の位置エネルギーは $\rho_0 g dx_3$ だけ増加するが，要素 B のそれが同じ量だけ減少するから．しかし系の内部エネルギーは，熱膨張係数 β がゼロでない限り，この過程を経て変化するのである．

これを見るために，位置交換後の要素 A に再び注目しよう．その温度 (5) から分かるように，位置交換後の要素 A から以下の熱量を除去すれば，その温度は T_b となる:

$$\rho_0 c_p \left(T_a - T_b - \frac{\beta T_a g}{c_p} dx_3\right). \tag{7}$$

同様に，位置交換後の要素 B からは

$$\rho_0 c_p \left(T_b - T_a + \frac{\beta T_b g}{c_p} dx_3\right) \tag{8}$$

だけの熱量を除去すれば，その温度は T_a となる．よって，位置交換後の二つの流体要素の系から (7) と (8) の和，すなわち

$$\rho_0 \beta (T_b - T_a) g dx_3 \tag{9}$$

だけの熱量を除去すれば，温度 T_b の単位体積の流体要素が温度 T_a の単位体積の流体要素から見て $\boldsymbol{e}_i dx_i$ の位置にある，という初期状態が復元される．この事実から我々は，二つの流体要素 A と B からなる系の内部エネルギーが，上述の断熱準静的過程を経て (9) だけ増加したことを理解することができる．

以上の結果は，熱力学の第一法則に基づいて以下のように解釈される．すなわち，上述の過程は断熱過程であるから，系の内部エネルギーの増加 (9) はこの過程を通じて系になされた力学的仕事に等しい．よってこの過程を実現するには，系に力を及ぼして仕事を行うことが必要ということになる．

そこで今，要素 A と B のそれぞれに $\tilde{\boldsymbol{F}}_a$ と $\tilde{\boldsymbol{F}}_b$ の力を及ぼしてこの過程を実現したものとしよう．すると，過程を通じてこれらの力が行った仕事が以下のように求められる:

$$(\tilde{\boldsymbol{F}}_a - \tilde{\boldsymbol{F}}_b) \cdot \boldsymbol{e}_i dx_i. \tag{10}$$

この仕事が (9) に等しいことから，次式を得る:

$$\{(\tilde{\boldsymbol{F}}_a - \tilde{\boldsymbol{F}}_b) - \rho_0 \beta (T_b - T_a) g \boldsymbol{e}_3\} \cdot \boldsymbol{e}_i dx_i = 0. \tag{11}$$

しかるに $\boldsymbol{e}_i dx_i$ の向きは任意であるから

$$(\tilde{\boldsymbol{F}}_a - \tilde{\boldsymbol{F}}_b) = \rho_0 \beta (T_b - T_a) g \boldsymbol{e}_3. \tag{12}$$

この結果は $\tilde{\boldsymbol{F}}_a$ と $\tilde{\boldsymbol{F}}_b$ が次式で与えられることと整合的である:

$$\tilde{\boldsymbol{F}}_a = -\rho_0 \beta (T_a - T_r) g \boldsymbol{e}_3, \quad \tilde{\boldsymbol{F}}_b = -\rho_0 \beta (T_b - T_r) g \boldsymbol{e}_3. \tag{13}$$

ここに T_r は任意の基準温度である．

ところで上述の過程は準静的過程であったから，流体要素 A と B は，この過程を通していずれも静止していなければならない．このことは (13) と釣り合う以下のような力がこれら流体要素にもとより働いていたことを意味している:

$$\boldsymbol{F}_a = \rho_0 \beta (T_a - T_r) g \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{F}_b = \rho_0 \beta (T_b - T_r) g \boldsymbol{e}_3. \tag{14}$$

ここに $\boldsymbol{F}_a$ と $\boldsymbol{F}_b$ は，それぞれ要素 A と B に働く力である．

この結論は次のように一般化できる．すなわち，一様重力場中で温度 T を持つ単位体積の非圧縮性流体要素には

$$\boldsymbol{F} = \rho_0 \beta (T - T_r) g \boldsymbol{e}_3 \tag{15}$$

だけの力が働く．これが Boussinesq 近似下で浮力と称される力である．ここで導入した基準温度 T_r の任意性は，次節で見る当該近似下での基準温度の任意性に対応している．

3. Boussinesq 近似下での支配方程式系

本節では Boussinesq 近似を系統的な方法で導出する．そのために，以下では固定領域 Ω を満たす流体の一様重力場中での運動を考察する．領域 Ω 内には，直交座標系 (x_1, x_2, x_3) が前節と同様に設定される．各軸方向の単位ベクトルの表記，ならびに変数の添字に関する規約もまた前節と同様である．

3.1 基本的仮定

Boussinesq 近似について，その基本的な仮定を定式化するところから始めよう．まずは前節と同様に，考察対象の流体はその密度 ρ が一定という意味で非圧縮性流体であると仮定する:

$$\rho = \rho_0. \tag{16}$$

他方，流体の熱膨張係数 β はゼロではないものと仮定する:

$$\beta = v^{-1} (\partial v / \partial T)_p \neq 0. \tag{17}$$

ここに $v = \rho^{-1}$ は比容を，T 及び p は前節と同様に温度及び圧力を表す．温度 T は以下のように書けるものと仮定する:

$$T = T_0 + T'. \tag{18}$$

ただし T_0 は一定の基準温度を，T' は T_0 からの微小な偏差を示す．一方，圧力 p は微小な圧力摂動を p' として

$$p = p_0 + p' \tag{19}$$

のように表現できるものと仮定する．ただし静水圧 p_0 は

$$p_0 = -\rho_0 g x_3 + \text{constant} \tag{20}$$

で定義される．ここに g は前節同様，重力加速度を表す．

以上で Boussinesq 近似に関する基本的な仮定は全て定式化された．以降は支配方程式系の導出に進むことにしよう．

3.2 連続の式

さて一般に連続の式は次式で与えられる:

$$\rho^{-1} D\rho/Dt + \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \tag{21}$$

ただし D/Dt は物質微分を，$\boldsymbol{u}$ は流体の速度を表す．この式に密度 ρ の表式 (16) を代入すると

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{22}$$

が得られる．これが Boussinesq 近似下での連続の式である．

3.3 運動方程式

圧力 p の表式 (19) を用いると，流体の運動方程式は

$$\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p' + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i - (\rho - \rho_0) g \boldsymbol{e}_3 \tag{23}$$

と表現される．ここに τ_{ij} は粘性応力テンソルの成分を表す．この方程式に密度 ρ の表式 (16) を単純に代入すると

$$\rho_0 \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p' + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \tag{24}$$

を得る．しかしながら実は，この方程式がエネルギーの保存則と整合的であるためには，右辺に項を一つ付け加えねばならないのである．以下ではこれを見て行くことにしよう．

そのためにまず，流体の全エネルギーについて考える:

$$\int_\Omega \rho_0 \left(\tfrac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 + g x_3 + e \right) dV. \tag{25}$$

ここで e は流体の比内部エネルギーを表す．エネルギーの保存則に鑑みて，この全エネルギーは次式を満足する必要がある:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_0 \left(\tfrac{1}{2} |\boldsymbol{u}|^2 + g x_3 + e \right) dV \\ &\qquad = \int_\Sigma u_i \tau_{ij} n_j dS - \int_\Sigma \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} dS. \end{aligned} \tag{26}$$

ただし Σ は領域 Ω の境界を表し，$\boldsymbol{n}$ は Σ 上の外向き単位法線ベクトルである．また u_i と n_j は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{n}$ の成分をそれぞれ表すもので，$\boldsymbol{q}$ は熱伝導に伴う熱流束密度である．この式は，流体の全エネルギーの変化が，Σ に作用する粘性力のなす仕事と，Σ を横切る熱輸送とによって生じることを述べたものである．

一方で，次式が成立することは明らかであろう:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_0 g x_3 \, dV = 0. \tag{27}$$

すなわち流体の位置エネルギーは不変である．

続いて流体の内部エネルギーの時間発展を記述する方程式について考えよう．この方程式は以下のようにして導かれる [3]．

まず熱輸送の一般式 [1] を次のように書き下す:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nabla \cdot \boldsymbol{q}. \tag{28}$$

ただし前節と同様に s は流体の比エントロピーである．また右辺第一項は粘性散逸に伴う加熱を表している．

さて今，s を T 及び p の関数とみなすと次式を得る:

$$\frac{Ds}{Dt} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{DT}{Dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{Dp}{Dt}. \tag{29}$$

熱力学の公式によれば，$(\partial s/\partial T)_p$ 及び $(\partial s/\partial p)_T$ は定圧比熱 c_p と熱膨張係数 β を用いて次のように与えられる:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -v\beta. \tag{30}$$

これらの係数は，T, p が T_0, p_0 からごく僅かしか変化しないと仮定していることから，$T = T_0$, $p = p_0$ で評価して差し支えない．かくして，$v = v_0 = \rho_0^{-1}$ である故に

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{c_{p0}}{T_0}\frac{DT'}{Dt} - v_0\beta_0 \left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right) \tag{31}$$

を得る．ただし (18) と (19) を用い，以下の記号を導入した:

$$c_{p0} = c_p(T_0, p_0), \quad \beta_0 = \beta(T_0, p_0). \tag{32}$$

一般には，c_{p0} と β_0 は p_0 を介して x_3 の関数である．

同様にして，s を e 及び v の関数とみなして次式を得る:

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T_0}\frac{De}{Dt} + \frac{p_0}{T_0}\frac{Dv}{Dt}. \tag{33}$$

しかるに，$Dv/Dt = D\rho^{-1}/Dt = 0$ であるから

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T_0}\frac{De}{Dt}. \tag{34}$$

結局 (16), (18), (31), 及び (34) を用いて

$$\begin{aligned}\rho T \frac{Ds}{Dt} &= \rho_0 T_0 \frac{Ds}{Dt} + \rho_0 T' \frac{Ds}{Dt} \\ &= \rho_0 \frac{De}{Dt} \\ &\quad + \rho_0 T' \left\{ \frac{c_{p0}}{T_0}\frac{DT'}{Dt} - v_0\beta_0 \left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right) \right\}\end{aligned} \tag{35}$$

が得られる．ところが $Dp_0/Dt = -\rho_0 g u_3$ なので，プライムの付いた変数について一次までの近似で

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho_0 \frac{De}{Dt} + \rho_0\beta_0 T' g u_3 \tag{36}$$

を得る．これを (28) に代入すると，結果は次のようになる:

$$\rho_0 \frac{De}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} - \rho_0\beta_0 T' g u_3. \tag{37}$$

この式を，固定領域 Ω にわたって積分すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 e\, dV = \int_\Omega \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV - \int_\Sigma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, dS \\ - \int_\Omega \rho_0\beta_0 T' g u_3 dV\end{aligned} \tag{38}$$

が得られる．これが我々の必要とした流体の内部エネルギーの時間発展を記述する方程式である．

最後に流体の運動エネルギーの時間発展を記述する方程式を導こう．それは (26) から (27), (38) を引くと得られる:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \tfrac{1}{2}\rho_0 |\boldsymbol{u}|^2 dV = \int_\Sigma u_i \tau_{ij} n_j dS - \int_\Omega \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \\ + \int_\Omega \rho_0\beta_0 T' g u_3 dV.\end{aligned} \tag{39}$$

一方，この式が (24) から出てくるためには，(24) の右辺に

$$\rho_0\beta_0 T' g \boldsymbol{e}_3 \tag{40}$$

なる項を付け加えねばならないことが容易に理解される．この項が Boussinesq 近似下で浮力と呼ばれる力をあらわしている．

かくして我々は，Boussinesq 近似下での流体の運動方程式

$$\rho_0 \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p' + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i + \rho_0\beta_0 T' g \boldsymbol{e}_3 \tag{41}$$

を得た．この方程式中の τ_{ij} は，例えば

$$\tau_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{42}$$

で与えられる．ここに η は粘性係数である．

本小節を終える前に以下の注意を述べておこう．上で得られた内部エネルギーの方程式 (38) と運動エネルギーの方程式 (39) を見比べれば容易に分かるように，Boussinesq 近似下で浮力と称される力のなす仕事は，内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する [3]．この事実は，当該近似下で現れるこの力が圧力傾度力に由来することを物語っている．

3.4 温度方程式

前小節で示した (31) と (34) から次式が得られる:

$$\rho_0 \frac{De}{Dt} = \rho_0 c_{p0}\frac{DT'}{Dt} - \beta_0 T_0 \left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right). \tag{43}$$

これを (37) に代入して以下の温度方程式を得る:

$$\begin{aligned}\rho_0 c_{p0}\frac{DT'}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} \\ + \left\{\beta_0 T_0 \left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right) - \rho_0\beta_0 T' g u_3\right\}.\end{aligned} \tag{44}$$

ただし $\boldsymbol{q}$ は，例えばフーリエの法則により与えられる:

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla T'. \tag{45}$$

ここに k は熱伝導率である．これが Boussinesq 近似下でのエネルギーの保存則に整合的な温度方程式である．

4. まとめと議論

本稿では質量の保存則に整合的な方法で Boussinesq 近似を再構築した．その結果，当該近似下での支配方程式系が，密度が一定という意味での流体の非圧縮性を仮定して導かれ得ることが明らかになった．特に流体の運動方程式は，エネルギーの保存則に基づいて定式化できることが示された．

4.1 Boussinesq 近似の適用可能性

前節で示された Boussinesq 近似の導出法に照らせば，一般の多少なりとも圧縮性を持つ流体の運動に当該近似が適用可能となる条件を，以下のようにして議論することができる．ただし以下で想定する運動は，次の特徴的なスケールを持つものと仮定する．すなわち，時間スケール τ，速度スケール U，及び長さスケール L である．また，流体の温度差のスケールを $\Delta T'$ で示し，T_0 は前節と同様に一定の基準温度を表す．なお，以下の議論における ρ_0 は適当な一定の基準密度を指すものとする．

まず温度の表式 (18) を思い出そう．この表式は流体の温度が T_0 からごく僅かしか変化しないことを述べたものである．よって $\Delta T'$ は T_0 に比して充分に小さくなければならない:

$$\Delta T'/T_0 \ll 1. \tag{46}$$

他方，圧力の表式 (19) において我々は，圧力摂動 p' の変化が静水圧 p_0 のそれよりも極めて小さいものと仮定した．従って

$$|\nabla p'|/|\nabla p_0| \ll 1 \tag{47}$$

が成立する必要がある．ここで $|\nabla p_0|$ は (20) により

$$|\nabla p_0| = \rho_0 g \tag{48}$$

で与えられる．一方で $|\nabla p'|$ については (23) から

$$\begin{aligned}|\nabla p'| \le |\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}| + |\rho(\partial\boldsymbol{u}/\partial t)| \\ + |(\partial\tau_{ij}/\partial x_j)\boldsymbol{e}_i| + |(\rho-\rho_0)g\boldsymbol{e}_3|\end{aligned} \tag{49}$$

なる不等式が得られる．よって本不等式右辺の各項が $\rho_0 g$ に比して充分に小さければ (47) は満足されることになる．以下で我々は，これらの項を順次検討して行くことにしよう．

不等式 (49) の右辺第一項は次のように見積もられる:

$$|\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}| = O(\rho_0 U^2/L). \tag{50}$$

よって，この項は次式が成立するとき $\rho_0 g$ より充分に小さい:

$$U/(gL)^{1/2} \ll 1. \tag{51}$$

第二項も次のように見積もることができる:

$$|\rho(\partial\boldsymbol{u}/\partial t)| = O(\rho_0 U/\tau). \tag{52}$$

故に，この項は (51) に加えて

$$(L/\tau)/(gL)^{1/2} \ll 1 \tag{53}$$

が成立するとき $\rho_0 g$ に比べて充分小さい．第三項については，(42) を用いると以下のように評価できる:

$$|(\partial\tau_{ij}/\partial x_j)\boldsymbol{e}_i| = O(\eta U/L^2). \tag{54}$$

このとき，(51) とともに

$$\nu/\{(gL)^{1/2}L\} \ll 1 \tag{55}$$

が成り立てば，この第三項もまた $\rho_0 g$ より充分に小さい．ただしここで $\nu = \eta/\rho_0$ は動粘性係数である．

不等式 (49) の最後の項を見積もるために，熱力学の公式

$$d\rho = (\gamma/a^2)dp - \rho\beta dT \tag{56}$$

に注目する．ここに γ は比熱比で a は音速を表す．これを用いると以下のような見積りが可能になる:

$$|\rho-\rho_0| = O(\gamma\Delta p/a^2) + O(\rho_0\beta_0\Delta T'). \tag{57}$$

ただし Δp は圧力変化のスケールを示す．ここで流体の鉛直方向の広がりを H としよう．このとき

$$\Delta p = \rho_0 g H \tag{58}$$

と置くのは合理的であろう．結果として (49) の最後の項は

$$|(\rho-\rho_0)g\boldsymbol{e}_3| = O(\gamma\rho_0 g^2 H/a^2) + O(\rho_0\beta_0\Delta T' g) \tag{59}$$

と評価される．従って，$\gamma = O(1)$ である故に，この項は以下の条件が成立するとき $\rho_0 g$ に比べて充分小さい:

$$(gH)^{1/2}/a \ll 1, \quad \beta_0\Delta T' \ll 1. \tag{60}$$

理想気体については，$\beta_0 = T_0^{-1}$ であるため，上の二番目の条件は (46) と一致することに注意しておく．

§3.1 で示した基本的仮定のうち，(16) もまた (60) の下で正当化される．というのも (57), (58) から明らかなように，(60) の下では $|\rho-\rho_0|/\rho_0 \ll 1$ が成立するからである．残された基本的仮定 (17) は通例満足される．かくして Boussinesq 近似が適用可能となる条件は全て定式化された．これらの条件は (46), (51), (53), (55), 及び (60) により与えられる．

4.2 温度方程式に対するさらなる近似

§3.4 で導いた温度方程式 (44) はエネルギーの保存則と整合的ではあるものの，かなり扱いにくい．そこで実用上は，この方程式に対してさらなる近似を施すことが望ましい．

再び §4.1 で想定した流体の運動を考えよう．まず温度方程式 (44) 右辺の中括弧内の項は，プライムのついた変数を含む項を無視することで，以下のように近似できる:

$$\begin{aligned}&\left\{\beta_0 T_0\left(\frac{Dp_0}{Dt}+\frac{Dp'}{Dt}\right) - \rho_0\beta_0 T' g u_3\right\} \\ &\qquad \approx \beta_0 T_0\frac{Dp_0}{Dt} = -\rho_0\beta_0 T_0 g u_3.\end{aligned} \tag{61}$$

さらに粘性散逸に伴う加熱を表す項も，τ_{ij} が (42) で与えられるとすると，(51) に加えて

$$(1/\beta_0 T_0)\left[\nu/\{(gL)^{1/2}L\}\right] \ll 1 \tag{62}$$

が成立すれば，$\rho_0\beta_0 T_0 g u_3$ に比べて無視することができる．このとき温度方程式は以下の形をとることになる:

$$\rho_0 c_{p0}\frac{DT'}{Dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho_0\beta_0 T_0 g u_3. \tag{63}$$

ところが，この方程式中の最後の項も

$$\Gamma_0 H/\Delta T' \ll 1 \tag{64}$$

が成り立つときには無視できる．ただし $\Gamma_0 = \beta_0 T_0 g/c_{p0}$ は断熱減率である．この場合，次式が得られる:

$$\rho_0 c_{p0}\frac{DT'}{Dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q}. \tag{65}$$

これが本来の Boussinesq 近似下での温度方程式である．

4.3 Boussinesq 近似下でのポテンシャル温度

温度方程式が (63) で近似されるときには，T' の代わりに次式で定義されるポテンシャル温度 θ を用いることができる:

$$\theta = \theta_0 + T', \quad \theta_0 = T_0 + \int_{\zeta_a}^{x_3} \Gamma_0(x_3')dx_3'. \tag{66}$$

ただし積分は適当な基準高度 $x_3' = \zeta_a$ から取られている．このとき (63) は以下のように表現される:

$$\rho_0 c_{p0} \frac{D\theta}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}. \tag{67}$$

一方，運動方程式 (41) は θ を用いて

$$\rho_0 \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla \hat{p}' + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i + \rho_0 \beta_0 \theta g \boldsymbol{e}_3 \tag{68}$$

と書き直すことができる．ここに修正された圧力摂動 $\hat{p}'$ は

$$\hat{p}' = p' + \rho_0 g \int_{\zeta_a}^{x_3} \beta_0(x_3')\theta_0(x_3')dx_3' \tag{69}$$

で与えられる．以上で得られた (67), (68) を (65), (41) と比べると，θ が T' と形式上同じ役割を果たすことが見て取れる．

しかしながら一方で，θ と T' の相違にも充分注意する必要がある．例えば，フーリエの法則 (45) に従う熱流束密度 $\boldsymbol{q}$ を θ を用いて表現すると以下のようになる:

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla\theta + k\Gamma_0 \boldsymbol{e}_3. \tag{70}$$

つまり $\boldsymbol{q}$ は T' の勾配には比例するが，θ のそれには比例しないのである．ここで試みに，とある固定境界 $x_3 = \zeta_b$ 上で断熱条件を課すことを考えてみよう．この条件を T' を用いて表せば

$$(\partial T'/\partial x_3)|_{x_3=\zeta_b} = 0 \tag{71}$$

となるが，同じ条件は θ を用いて以下のように表現される:

$$(\partial \theta/\partial x_3)|_{x_3=\zeta_b} = \Gamma_0(\zeta_b). \tag{72}$$

かくして θ には T' と形式上異なる条件が課されることになる．

以上から分かるように，θ は決して T' の単純な代替物ではない．このことは，そもそもポテンシャル温度というものがエントロピーの尺度であって [5]，温度とは本質的に異なる物理量であることを考えれば当然と言えよう．

参考文献

(1) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., “Fluid Mechanics,” 2nd ed., Butterworth-Heinemann (1987).

(2) Mihaljan, J. M., “A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid,” Astrophys. J., 136 (1962), 1126–1133.

(3) Maruyama, K., “Energetics of a fluid under the Boussinesq approximation,” arXiv:1405.1921 (2014).

(4) Spiegel, E. A. and Veronis, G., “On the Boussinesq approximation for a compressible fluid,” Astrophys. J., 131 (1960), 442–447.

(5) Gill, A. E., “Atmosphere-Ocean Dynamics,” Academic Press (1982).