非弾性近似

Anelastic Approximation

○丸山清志, 防衛大学校地球海洋学科, 横須賀市走水 1-10-20

Kiyoshi Maruyama, Department of Earth and Ocean Sciences, National Defense Academy, Yokosuka, Kanagawa 239-8686, Japan

This paper reconstructs the anelastic approximation in such a manner that it can be applied to any kind of fluid. As a result, it turns out that the work done by the buoyancy force in the approximation corresponds to the conversion between kinetic and internal energy. Also, the conditions for the applicability of the approximation are clarified. It is demonstrated, in addition, that the Boussinesq approximation is not a limiting case of the anelastic approximation.

1. はじめに

非弾性近似は，熱的に成層した流体の運動を記述するために Ogura & Phillips (1962) により考案された近似である [1]．この近似においては，流体の圧縮性が，流体の密度の高度変化を許すことで部分的に考慮されているが，その一方で，支配方程式系の解からは音波が排除されている．

非弾性近似は，しかしながら，そのままでは理想気体にしか適用できない．そこで本論文では，この近似を任意の流体に適用可能な形に再構築する．その結果，当該近似の下で浮力と称される力のなす仕事が，流体の内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになる．当該近似が適用可能となるための条件，ならびにブシネスク近似との関係についても議論される．

2. 非弾性近似

一様重力場中での非粘性流体の運動を考える．流体は固定された有界領域 Ω 内に含まれており，この領域には z 軸が鉛直上向きに取られているものとする．以後，正の z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ で表す．

2.1 運動方程式

流体の速度を $\boldsymbol{u}$ で表すことにすると，流体の運動方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p/\rho - g\boldsymbol{k} \tag{1}$$

と表現される．ただし D/Dt は物質微分を，p 及び ρ は流体の圧力と密度を，g は重力加速度を表している．

流体の比エンタルピーを h で表すことにしよう．このとき

$$dh = Tds + vdp \tag{2}$$

なる関係式が成立する．ここで T 及び s は流体の温度と比エントロピーであり，$v = 1/\rho$ は流体の比容を表す．以下では，あらゆる熱力学量は h と s の既知関数とみなされる．

関係式 (2) を利用すると，$\nabla p/\rho$ は以下のように書き直せる:

$$\nabla p/\rho = \nabla h - T\nabla s. \tag{3}$$

これを (1) に代入して次式を得る:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

さて今，h 及び s を以下のように分解しよう:

$$h = h_0 + h', \quad s = s_0 + s'. \tag{5}$$

ここで h_0 及び s_0 は，c_1 及び c_2 を定数として

$$h_0 = -gz + c_1, \quad s_0 = c_2 \tag{6}$$

により与えられる．このとき (4) は，h' 及び s' を用いて，以下のように表現される:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'. \tag{7}$$

ところが，h 及び s の関数とみなすとき，T もまた

$$T = T_0 + T' \tag{8}$$

のように分解される．ただし T_0 は

$$T_0 = T(h_0, s_0) \tag{9}$$

により定義される．ここで以下の仮定を導入しよう:

$$|T'/T_0| \ll 1. \tag{10}$$

このとき (7) は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla h' + T_0\nabla s' \tag{11}$$

と近似される．恒等式 $T_0\nabla s' = \nabla(T_0 s') - s'\nabla T_0$ を用いると，最終的に

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s'\nabla T_0 \tag{12}$$

を得る．これが非弾性近似の下での流体の運動方程式である．実際，付録に示されているとおり，この運動方程式は，流体が理想気体であるとき Ogura & Phillips (1962) により導かれたものに帰着する．

本小節を終える前に，(12) の最後の項を別の形に書き換えておきたい．そのためにまず，以下の熱力学関係式に注目する:

$$(\partial T/\partial h)_s = \beta T/c_p, \quad (\partial T/\partial s)_h = T(1-\beta T)/c_p. \tag{13}$$

ここに $\beta = v^{-1}(\partial v/\partial T)_p$ は熱膨張係数で c_p は定圧比熱である．この関係式より，(6) 及び (9) に鑑みて

$$\begin{aligned} \nabla T_0 &= (\partial T/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)}\nabla h_0 + (\partial T/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)}\nabla s_0 \\ &= -(\beta_0 T_0 g/c_{p0})\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{14}$$

を得る．ただし以下の記法を導入した:

$$\beta_0 = \beta(h_0, s_0), \quad c_{p0} = c_p(h_0, s_0). \tag{15}$$

その結果，(12) の最後の項は

$$-s'\nabla T_0 = (\beta_0 T_0 s' g/c_{p0})\boldsymbol{k} \tag{16}$$

のように書き換えられる．非弾性近似の下でこの項により表される力は浮力と称される．

2.2　連続の式

分解 (5) に鑑みて，流体の密度 ρ を

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{17}$$

と表すことができる．ただし ρ_0 は

$$\rho_0 = \rho(h_0, s_0) \tag{18}$$

により定義される．ここで次の仮定を導入しよう:

$$|\rho'/\rho_0| \ll 1. \tag{19}$$

このとき，ρ は以下のように近似される:

$$\rho = \rho_0. \tag{20}$$

この近似こそが非弾性近似の本質である．近似 (20) を連続の式 $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ に代入すると

$$\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}) = 0 \tag{21}$$

が得られる．これが非弾性近似の下での連続の式である．

2.3　断熱方程式

流体中の熱伝導を無視するとき，熱輸送の一般式 [2] は，(5) 及び (6) を考慮して，以下のように表現される:

$$\rho_0 T\frac{Ds'}{Dt} = 0. \tag{22}$$

ただし近似 (20) を用いた．仮定 (10) の下では，この式は次のように近似される:

$$\rho_0 T_0\frac{Ds'}{Dt} = 0. \tag{23}$$

運動方程式 (12) と連続の式 (21) に，この断熱方程式を加えることで非弾性近似の定式化は完了する．

3.　非弾性近似のエネルギー論

本節では，前節で考えた流体について，そのエネルギー収支を非弾性近似の下で考察してみよう．我々はまず，当該流体の内部エネルギーについて検討する．

3.1　内部エネルギー

流体の比内部エネルギー e は，次式により h と関係づけられる:

$$e = h - p/\rho. \tag{24}$$

非弾性近似の下で h と s は (5) のように分解されるが，これに対応して p もまた以下のように分解される:

$$p = p_0 + p'. \tag{25}$$

ただし p_0 は

$$p_0 = p(h_0, s_0) \tag{26}$$

で定義される．かくして e は次式のように表現される:

$$\begin{aligned} e &= (h_0 + h') - (p_0 + p')/\rho_0 \\ &= (h_0 - p_0/\rho_0) + (h' - p'/\rho_0). \end{aligned} \tag{27}$$

ここで近似 (20) を用いた．

他方，次の熱力学関係式が (2) より得られる:

$$(\partial p/\partial h)_s = \rho, \quad (\partial p/\partial s)_h = -\rho T. \tag{28}$$

従って p' は，h' 及び s' について一次までの近似で

$$\begin{aligned} p' &= (\partial p/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} h' + (\partial p/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)} s' \\ &= \rho_0 h' - \rho_0 T_0 s' \end{aligned} \tag{29}$$

と表される．これより我々は，e に対する以下の表式を得る:

$$e = (h_0 - p_0/\rho_0) + T_0 s'. \tag{30}$$

さて今，(30) の物質微分をとると

$$\frac{De}{Dt} = \boldsymbol{u}\cdot\nabla(h_0 - p_0/\rho_0) + s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0 + T_0\frac{Ds'}{Dt} \tag{31}$$

が得られる．これに ρ_0 を乗じて次式を得る:

$$\rho_0\frac{De}{Dt} = \nabla\cdot\{\rho_0(h_0 - p_0/\rho_0)\boldsymbol{u}\} + \rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0. \tag{32}$$

ただし (21) 及び (23) を用いた．一方，(18) 及び (21) を用いると

$$\rho_0\frac{De}{Dt} = \rho_0\frac{\partial e}{\partial t} + \rho_0\boldsymbol{u}\cdot\nabla e = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 e) + \nabla\cdot(\rho_0 e\boldsymbol{u}) \tag{33}$$

と書くことができるので，(32) は以下の形に書き換えられる:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 e) + \nabla\cdot(\rho_0 e\boldsymbol{u}) \\ &\quad = \nabla\cdot\{\rho_0(h_0 - p_0/\rho_0)\boldsymbol{u}\} + \rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0. \end{aligned} \tag{34}$$

さらに (30) に照らせば，(34) は次式に帰着することが分かる:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 e) + \nabla\cdot(\rho_0 T_0 s'\boldsymbol{u}) = \rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0. \tag{35}$$

最後に，流体を含む領域 Ω にわたって (35) を積分すると

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 e\, dV = \int_\Omega \rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0\, dV \tag{36}$$

が得られる．ただしここで，Ω の境界上では $\boldsymbol{u}$ の法線成分がゼロになるものと仮定した．これが流体の内部エネルギーの時間変化を記述する方程式である．

3.2　位置エネルギー

非弾性近似の下で流体の位置エネルギーの時間変化を記述する方程式は，近似 (20) のために

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 gz\, dV = 0 \tag{37}$$

のように極めて簡単になる．すなわち，非弾性近似の下で流体の位置エネルギーは不変である．

3.3　運動エネルギー

流体の運動エネルギーの時間変化を記述する方程式を導くため，まず (29) を用いて，運動方程式 (12) を以下のように書き換える:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla(p'/\rho_0) - s'\nabla T_0. \tag{38}$$

この方程式と $\rho_0\boldsymbol{u}$ との内積をとると，簡単な操作の後に

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{u}|^2) + \nabla\cdot\{\rho_0(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + p'/\rho_0)\boldsymbol{u}\} \\ &\quad = -\rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0 \end{aligned} \tag{39}$$

を得る．領域 Ω の境界上で $\boldsymbol{u}$ の法線成分がゼロになるとき，(39) から次式が従う:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \tfrac{1}{2}\rho_0|\boldsymbol{u}|^2 dV = -\int_\Omega \rho_0 s'\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_0\, dV. \tag{40}$$

これが流体の運動エネルギーの時間変化を記述する方程式であり，右辺の項が浮力のなす仕事を表している．

3.4　全エネルギー

エネルギー方程式 (36), (37), (40) を全て加え合わせると

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho_0\left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2+gz+e\right)dV=0 \tag{41}$$

が得られる．この方程式は，流体の全エネルギーが保存されることを示している．かくして，非弾性近似はエネルギー保存則と整合的であるということが理解される．

さらにまた我々は，(36) と (40) とを比較して，非弾性近似下での浮力のなす仕事が，流体の内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応するという事実を認識することになる．この事実は，ブシネスク近似下での浮力に関して Maruyama (2014) が到達した結論 (3) と一致している．

4.　非弾性近似の適用可能性

非弾性近似は，§2. において (10) 及び (19) なる仮定の下に導かれた．本節の目的は，いかなる条件の下でこれら二つの仮定が正当化され得るかを見出すことにある．設定ならびに記法は前節までと同様である．

4.1　非弾性近似が適用可能となる条件

まず始めに仮定 (10) に注目する．熱力学関係式 (13) により，(10) 中の T' は，h' 及び s' について一次までの近似で

$$\begin{aligned}T'&=(\partial T/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)}h'+(\partial T/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)}s'\\&=(\beta_0T_0/c_{p0})h'+\{T_0(1-\beta_0T_0)/c_{p0}\}\,s'\end{aligned} \tag{42}$$

と書くことができる．ここで $\Delta h'$ 及び $\Delta s'$ が，それぞれ h' 及び s' の特徴的なスケールを表すものとしよう．このとき，H が流体を含む領域 Ω の鉛直方向の広がりを表すものとして

$$\begin{aligned}|T'/T_0|&=O\{(\Gamma_0H/T_0)(\Delta h'/gH)\}\\&\quad+O\{(\Gamma_0H/T_0)(T_0\Delta s'/gH)\}\\&\quad+O(\Delta s'/c_{p0})\end{aligned} \tag{43}$$

を得る．ここに $\Gamma_0=\beta_0T_0g/c_{p0}$ は断熱減率である．さて今，Ogura & Phillips (1962) に従い，次の条件が満たされるものと仮定しよう:

$$\Gamma_0H/T_0\leq O(1). \tag{44}$$

このとき (43) から，(10) は以下に示す条件の下で成立することが理解される:

$$\Delta h'/gH\ll 1, \tag{45}$$
$$T_0\Delta s'/gH\ll 1, \tag{46}$$
$$\Delta s'/c_{p0}\ll 1. \tag{47}$$

次いで我々は以下の熱力学関係式に注目する:

$$(\partial\rho/\partial h)_s=\rho/a^2,\quad (\partial\rho/\partial s)_h=-\rho T(\beta/c_p+1/a^2). \tag{48}$$

ここに a は音速を表している．これらの関係式を用いると，仮定 (19) 中の ρ' は，h' 及び s' について一次までの近似で

$$\begin{aligned}\rho'&=(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)}h'+(\partial\rho/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)}s'\\&=(\rho_0/a_0^2)h'-\rho_0T_0(\beta_0/c_{p0}+1/a_0^2)s'.\end{aligned} \tag{49}$$

と表現される．ただしここで

$$a_0=a(h_0,s_0) \tag{50}$$

なる記法を導入した．表式 (49) に鑑みて，我々は

$$\begin{aligned}|\rho'/\rho_0|&=O\{(gH/a_0^2)(\Delta h'/gH)\}\\&\quad+O\{(gH/a_0^2)(T_0\Delta s'/gH)\}\\&\quad+O\{(\Gamma_0H/T_0)(T_0\Delta s'/gH)\}\end{aligned} \tag{51}$$

と書くことができる．これより (19) は，(44), (45), (46) と共に

$$(gH)^{1/2}/a_0\leq O(1) \tag{52}$$

なる条件が満たされるとき，成立することが分かる．

他方，(7) から以下の不等式が得られる:

$$|\nabla h'|\leq|\partial\boldsymbol{u}/\partial t|+|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|+|T\nabla s'|. \tag{53}$$

ここで流体の運動の特徴的な長さスケールを L で表すと，次のように書くことができる:

$$|\nabla h'|=O(\Delta h'/L),\quad |\nabla s'|=O(\Delta s'/L). \tag{54}$$

さらに U が運動の特徴的な速度スケールを，τ が特徴的な時間スケールを表すものとすると

$$|\partial\boldsymbol{u}/\partial t|=O(U/\tau),\quad |(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|=O(U^2/L) \tag{55}$$

と書ける．さて今，(6) 中の c_1 及び c_2 が以下の条件を満足するようにとられているものとしよう:

$$T/T_0\leq O(1). \tag{56}$$

このとき，(53), (54), (55) から，次の事実が理解される．すなわち (45) は，(46) と共に

$$U/(gH)^{1/2}\ll 1,\quad (L/\tau)/(gH)^{1/2}\ll 1 \tag{57}$$

なる条件が満たされるときに成立する．

結局，非弾性近似は (44), (46), (47), (52), (56), (57) なる条件の下で適用可能ということになる．

4.2　条件 (46) と (47) の関係

非弾性近似が適用可能となる条件のうち，(46) と (47) は，いずれも $\Delta s'$ に関する条件である．よって，これらの間の関係を明らかにしておく必要があろう．

そのためには，(46) が以下のように表現できることに注意すれば十分である:

$$\Delta s'/c_{p0}\ll(\Gamma_0H/T_0)/(\beta_0T_0). \tag{58}$$

従って，$(\Gamma_0H/T_0)/(\beta_0T_0)\geq O(1)$ が成立するときには (46) は不要となる．というのも，この条件は (47) が成り立つときには必ず満足されるから．対照的に，$(\Gamma_0H/T_0)/(\beta_0T_0)\ll 1$ が成立するとき，(46) は (47) よりもはるかに厳しい制約を $\Delta s'$ に課すことになる．すなわち，この場合には (47) が不要となる．

5.　まとめと議論

非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築した．その結果，この近似下での浮力のなす仕事が，流体の内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになった．加えて，当該近似が適用可能となる条件を明確化した．それらは (44), (46), (47), (52), (56), (57) で与えられる．

5.1 非弾性近似の下での流体の密度

非弾性近似の下での運動方程式 (12) は §3.3 において (38) なる形式に書き換えられた．以下説明するようにして我々は，(38) をさらに別の興味深い形式に書き換えることができる．

まず (38) の右辺第一項を以下のように書き換える:

$$-\nabla(p'/\rho_0) = -\nabla p'/\rho_0 + (p'/\rho_0)(\nabla\rho_0/\rho_0). \tag{59}$$

しかるに，(6) 及び (18) により，$\nabla\rho_0$ に対する次の表式を得る:

$$\begin{aligned}\nabla\rho_0 &= (\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)}\nabla h_0 + (\partial\rho/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)}\nabla s_0 \\ &= -(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} g\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{60}$$

さらに，(29) から $p'/\rho_0 = h' - T_0 s'$ なる関係が従うことに注意すると，(38) の右辺第一項は

$$\begin{aligned}-\nabla(p'/\rho_0) = &-\nabla p'/\rho_0 \\ &- \left\{(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} h' \right. \\ &\left. \quad - T_0(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} s'\right\}(g/\rho_0)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{61}$$

と書くことができる．他方，(38) の右辺第二項もまた以下のように書き表せる:

$$-s'\nabla T_0 = \rho_0(\partial T/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} s'(g/\rho_0)\boldsymbol{k}. \tag{62}$$

表式 (61) と (62) を (38) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = &-\nabla p'/\rho_0 \\ &- \left[(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} h' \right. \\ &\left. \quad - \{\partial(\rho T)/\partial h\}_s|_{(h_0,s_0)} s'\right](g/\rho_0)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{63}$$

を得る．ところが，(28) に照らして，我々は以下の関係式が成立することに気づく:

$$\{\partial(\rho T)/\partial h\}_s = -(\partial\rho/\partial s)_h. \tag{64}$$

これを用いて (63) は，次のように書き直される:

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = &-\nabla p'/\rho_0 \\ &- \left\{(\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} h' \right. \\ &\left. \quad + (\partial\rho/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)} s'\right\}(g/\rho_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{65}$$

結局，(49) を考慮すると，運動方程式は以下の形式に表現されることになる:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p'/\rho_0 - (\rho' g/\rho_0)\boldsymbol{k}. \tag{66}$$

運動方程式のこの表現には ρ_0 に加えて (49) で定義される ρ' が含まれている．しかしながら，非弾性近似の下での流体の密度は $\rho_0 + \rho'$ により与えられるのではない，ということは強調しておくべきであろう．前節までの議論から明らかなように，それは ρ_0 により与えられるのである．

5.2 浅い流体層に対する非弾性近似

再び §2. で考察した流体を考えよう．非弾性近似の下で，その密度 $\rho = \rho_0$ は高度と共に変化する．実際，(6), (18), (48) から次式が従う:

$$\begin{aligned}\nabla\rho_0 &= (\partial\rho/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)}\nabla h_0 + (\partial\rho/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)}\nabla s_0 \\ &= -(\rho_0 g/a_0^2)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{67}$$

しかしながら ρ_0 は，次の条件が満たされる時には一定とみなして差し支えない:

$$\Delta\rho_0/\rho_0 \ll 1. \tag{68}$$

ここに $\Delta\rho_0$ は，流体を含む領域 Ω の鉛直方向の広がり H にわたる ρ_0 の変化のスケールを表す．明らかに

$$\Delta\rho_0 = |\nabla\rho_0|H = \rho_0 gH/a_0^2 \tag{69}$$

と置くのが合理的であるから，ρ_0 は次の条件の下で一定とみなされることになる:

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1. \tag{70}$$

この場合，連続の式 $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{71}$$

に帰着する．これはブシネスク近似下で成り立つものと同じ式である．

ところで，ρ_0 が一定とみなされるとき，運動方程式 (38) は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p'/\rho_0 + (\beta_0 T_0 s' g/c_{p0})\boldsymbol{k} \tag{72}$$

となる．ただし (16) を用いた．他方，(42) から

$$T'/T_0 = (\Gamma_0 H/T_0)(h'/gH - T_0 s'/gH) + s'/c_{p0} \tag{73}$$

が得られる．ここで，(70) に加えて以下の条件が成立するものと仮定しよう:

$$\Gamma_0 H/T_0 \ll 1. \tag{74}$$

このとき，(73) を次のように近似するのが合理的なように思われる:

$$T'/T_0 = s'/c_{p0}. \tag{75}$$

これを (72) に代入すると，以下の方程式が得られる:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p'/\rho_0 + \beta_0 T' g\boldsymbol{k}. \tag{76}$$

この運動方程式は，ブシネスク近似下で得られるものと形式的に同じである．しかしながら我々は，(76) 中の T' が，温度の等エントロピー分布からの偏差を表していることに注意すべきである．ブシネスク近似においてこれに対応する量は，等温分布からの偏差を表している．

しかしながら，より重要なことは，(73) が以下のように書かれることである:

$$\begin{aligned}T'/T_0 = &(\Gamma_0 H/T_0)(h'/gH - T_0 s'/gH) \\ &+ \{(\Gamma_0 H/T_0)/(\beta_0 T_0)\}(T_0 s'/gH).\end{aligned} \tag{77}$$

このため，(74) なる条件の下では，$(\Gamma_0 H/T_0)/(\beta_0 T_0) \geq O(1)$ が満たされない限り，(73) は

$$T'/T_0 = 0 \tag{78}$$

に帰着してしまう．かくして，(76) へと至る議論は，一般には成立し得ないことが理解される．

これらの結果から，我々は「ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではない」と結論することができる．

付録　理想気体に対する非弾性近似

本付録において我々は，§2. において考察したものと同じ物理的状況を考える．ただし，考察対象とする流体は理想気体であるものとし，その定圧比熱 c_p は定数であると仮定する．

まず，比エントロピー s の関数 $\theta(s)$ を導入することから始めよう．温位と呼ばれるこの関数は

$$d\theta/ds = \theta/c_p \tag{A.1}$$

により s と関連付けられる．分解 (5) に鑑みて，θ も以下のように分解される:

$$\theta = \theta_0 + \theta', \quad \theta_0 = \theta(s_0). \tag{A.2}$$

ここで θ' は，s' について一次までの近似で，次のように表される:

$$\theta' = (d\theta/ds)|_{s=s_0} s' = (\theta_0/c_p)s'. \tag{A.3}$$

次いで，エクスナー関数と呼ばれる関数 Π を

$$\Pi = T/\theta \tag{A.4}$$

により定義する．この関数 Π は，理想気体の比エンタルピー h が

$$h = c_p T \tag{A.5}$$

で与えられることに注意すると

$$\Pi = h/c_p\theta \tag{A.6}$$

と書き換えられる．さて，Π もまた以下のように分解される:

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi', \quad \Pi_0 = \Pi(h_0, s_0), \tag{A.7}$$

ここに Π' は，h' 及び s' について一次までの近似で，次のように表される:

$$\begin{aligned}\Pi' &= (\partial\Pi/\partial h)_s|_{(h_0,s_0)} h' + (\partial\Pi/\partial s)_h|_{(h_0,s_0)} s' \\ &= h'/c_p\theta_0 - (h_0/c_p\theta_0^2)(\theta_0/c_p)s'.\end{aligned} \tag{A.8}$$

他方，(A.5) より

$$T_0 = h_0/c_p \tag{A.9}$$

が従うので，(6) を考慮すれば

$$\nabla T_0 = \nabla h_0/c_p = -(g/c_p)\boldsymbol{k} \tag{A.10}$$

となることが理解される．さらに，(A.3), (A.8), (A.9) から

$$s' = c_p(\theta'/\theta_0), \quad h' - T_0 s' = c_p\theta_0\Pi' \tag{A.11}$$

が得られる．かくして，(A.10) と (A.11) を (12) に代入すれば，c_p 及び θ_0 は一定であるから

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -c_p\theta_0\nabla\Pi' + (g\theta'/\theta_0)\boldsymbol{k} \tag{A.12}$$

を得る．これが Ogura & Phillips (1962) により導かれた運動方程式である．

参考文献

(1) Ogura, Y. and Phillips, N. A., “Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere,” J. Atmos. Sci., 19 (1962), 173–179.
(2) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., “Fluid Mechanics,” 2nd ed., Butterworth-Heinemann (1987).
(3) Maruyama, K., “Energetics of a fluid under the Boussinesq approximation,” arXiv:1405.1921 (2014).