Boussinesq近似の合理的導出

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

基準密度

熱膨張係数

$$\rho_0 \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right\} = -\nabla p' + \boxed{\rho_0 \beta T' g \boldsymbol{k}}$$

浮力項

圧力摂動

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T' = \kappa \nabla^2 T'$$

温度偏差

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

流速

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta T'$$

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

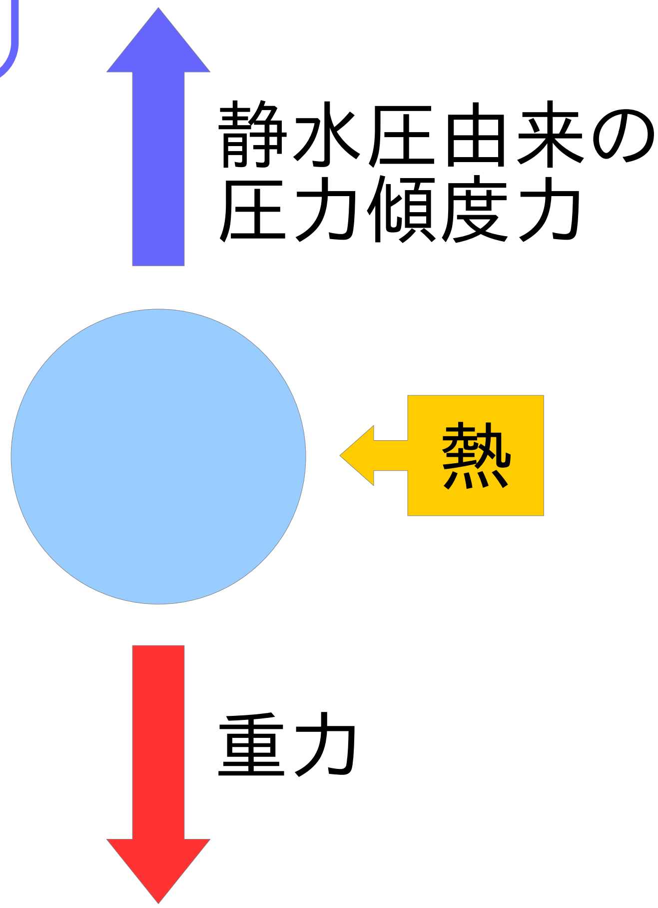
が成立しない

連続の式

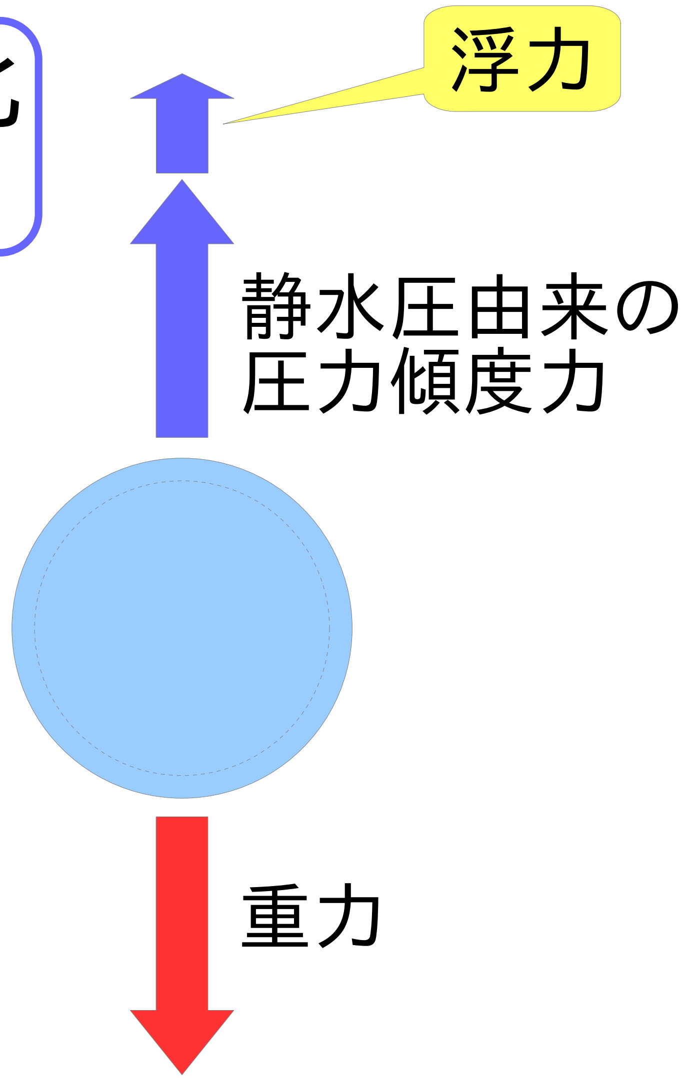
質量の保存則を表す

流速$\boldsymbol{u}$が単位質量あたりの運動量であることを保証する

流体の温度変化に起因する浮力



流体の温度変化に起因する浮力



流体の温度変化に起因する浮力
の実体は圧力傾度力

圧力傾度力のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換

流体の温度変化に起因する浮力
のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換

思考実験の前提条件

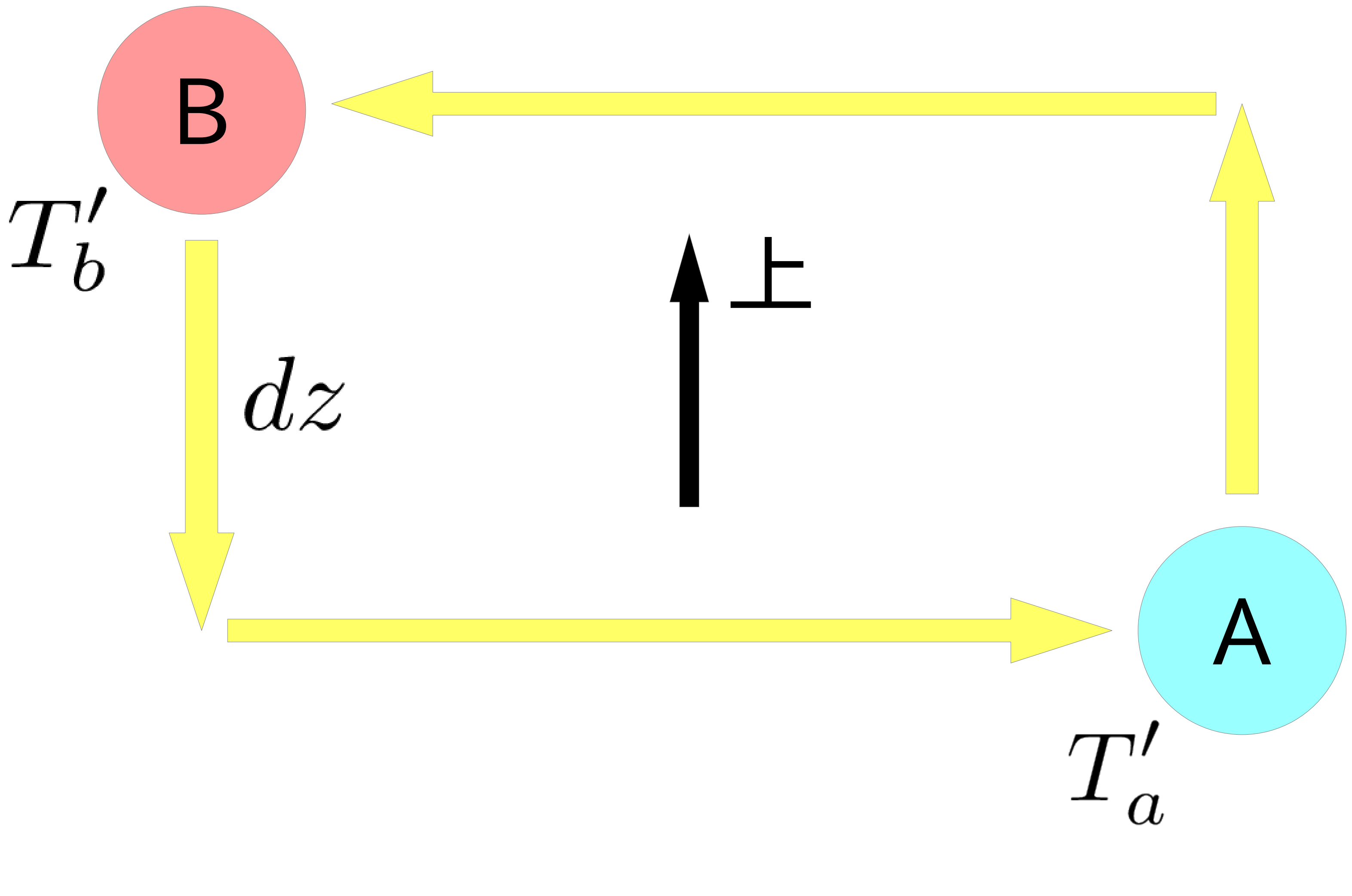
$\boxed{\text{密度一定の非圧縮性流体}}$

$$\rho = \rho_0$$

$\boxed{\text{熱膨張係数はゼロではない定数}}$

$$\beta \neq 0$$

断熱準静的に
位置交換



B

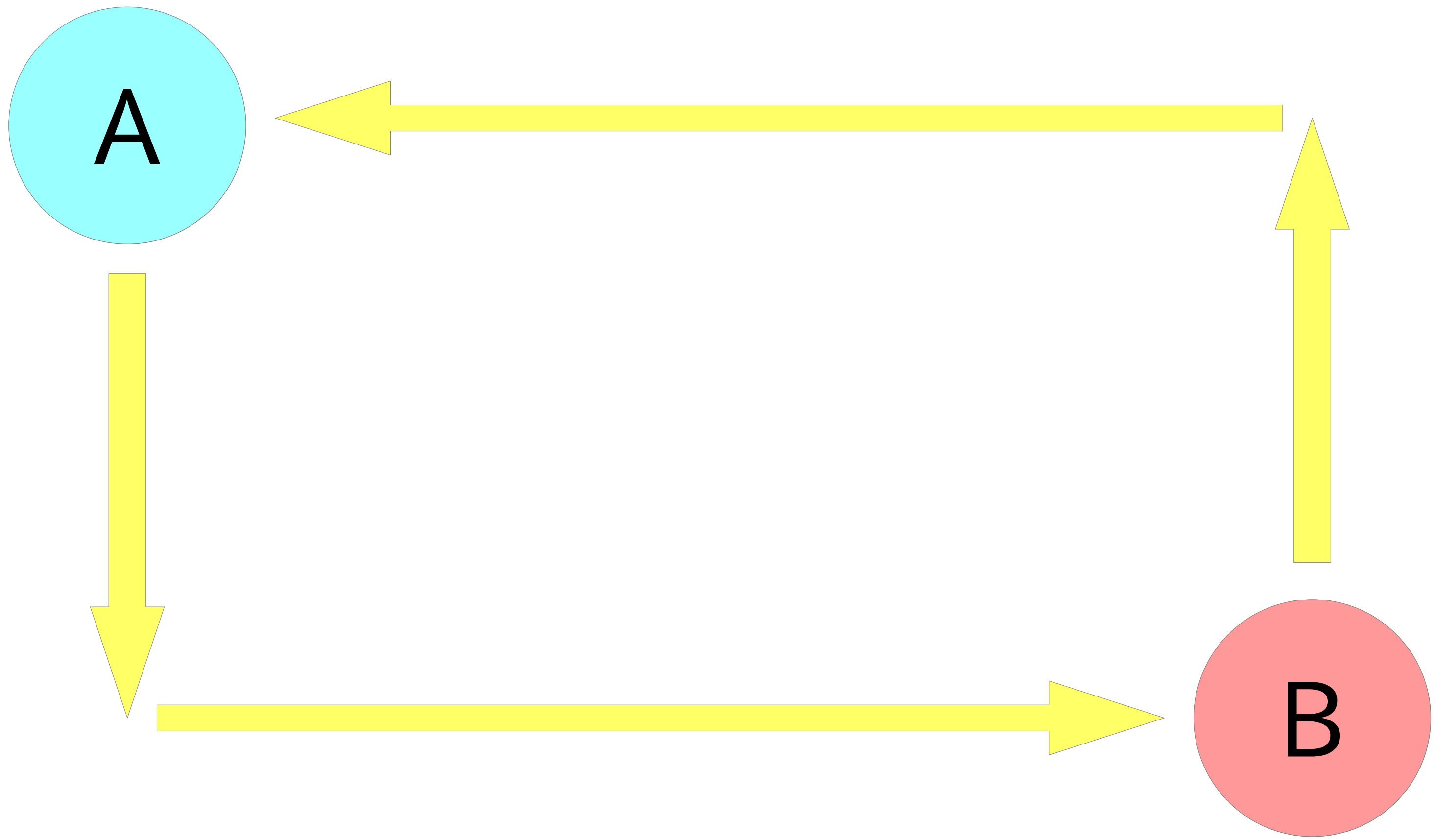
断熱減率

$$\beta(T_0 + T')g/c_p$$

基準温度

定圧比熱

A


A
B

位置交換後の温度

A

$$T_a' - \beta(T_0 + T_a')gdz/c_p$$

$$T_b' + \beta(T_0 + T_b')gdz/c_p$$

B

$$\rho_0 c_p (T_a' - T_b') - \rho_0 \beta (T_0 + T_a') g dz$$

A T_b'

$+$

$$\rho_0 c_p (T_b' - T_a') + \rho_0 \beta (T_0 + T_b') g dz$$

T_a' B

初期温度分布

A

位置交換に伴う
内部エネルギー
の増加量

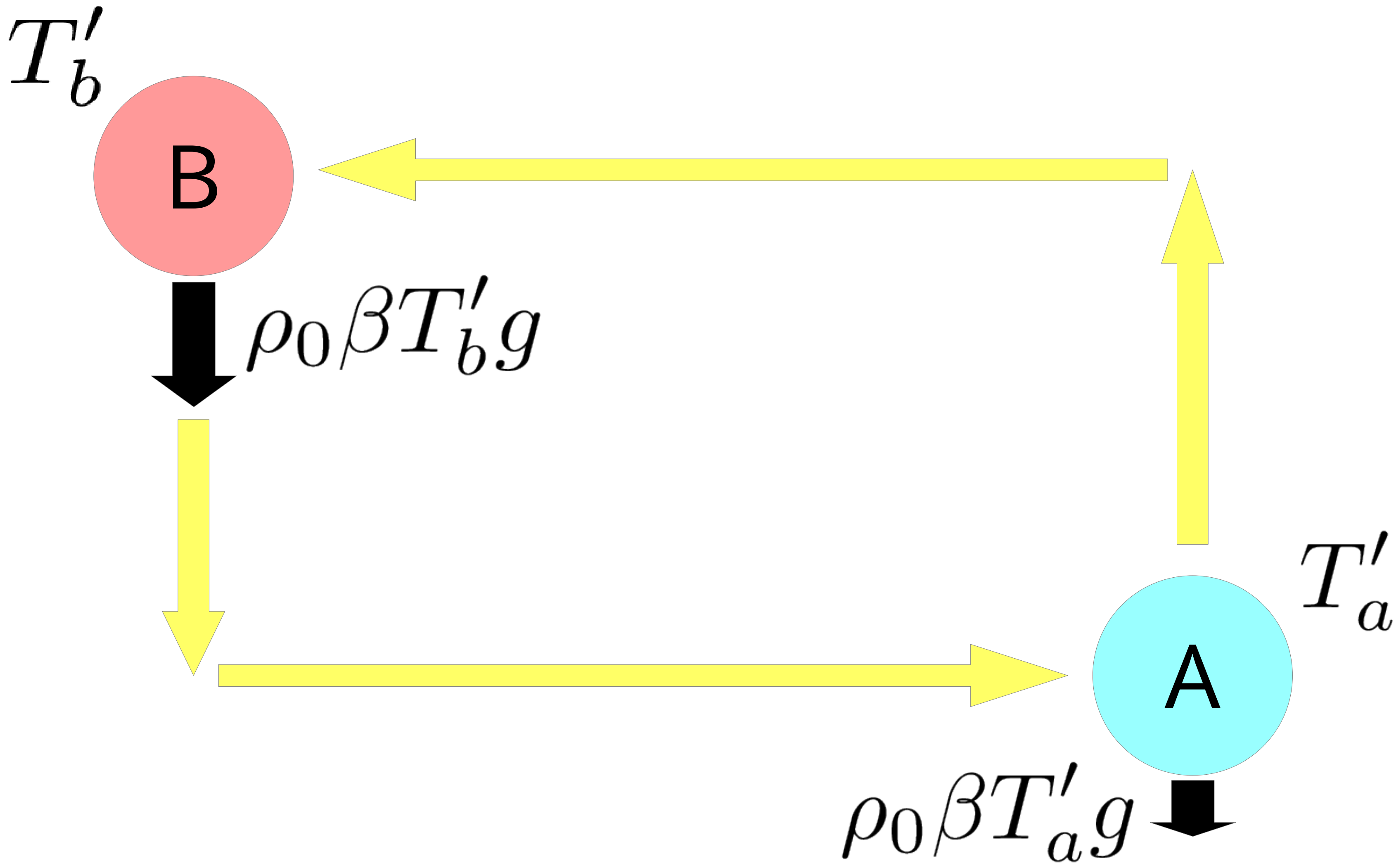
$$\rho_0\beta(T_b' - T_a')gdz$$

B

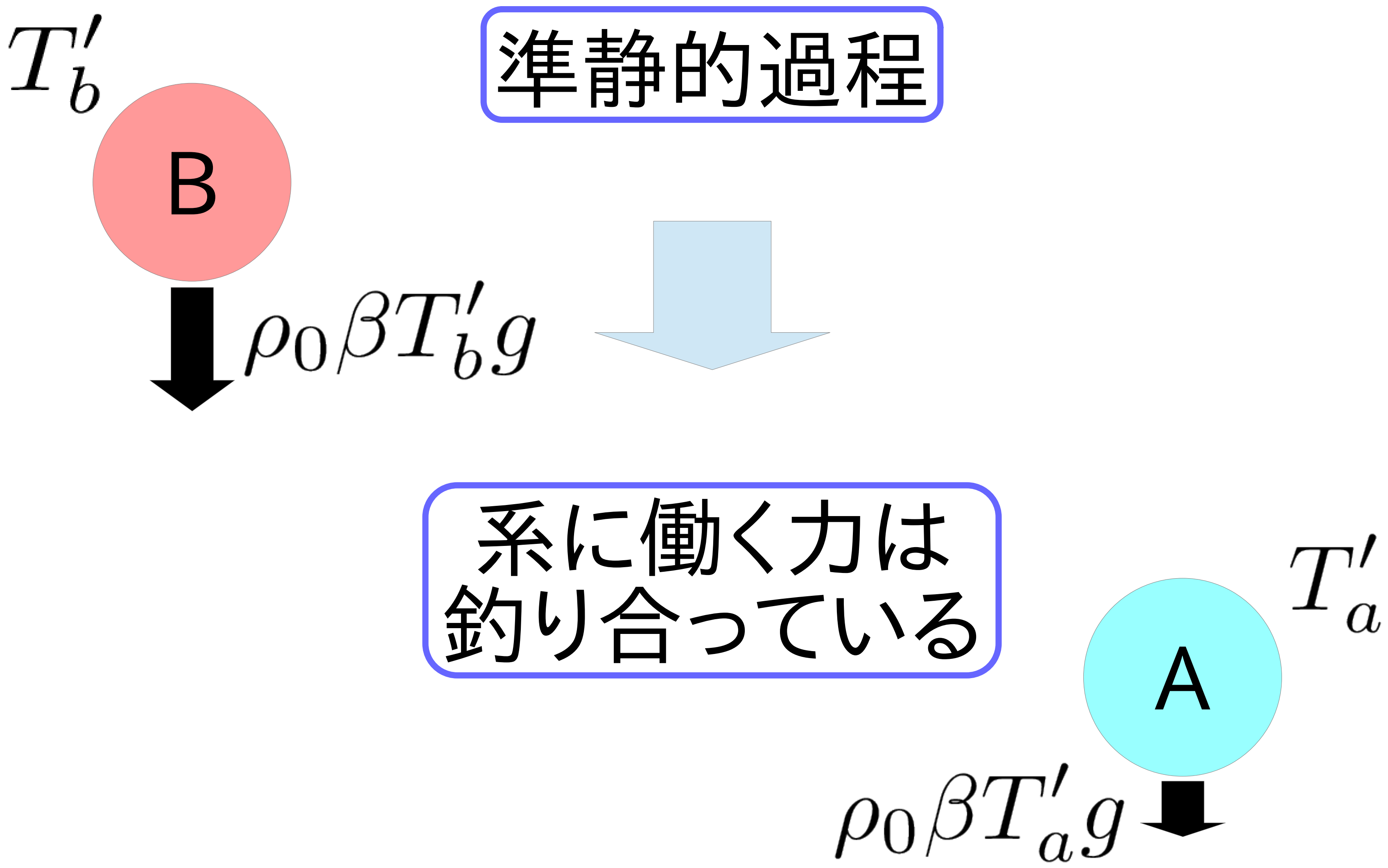
断熱過程

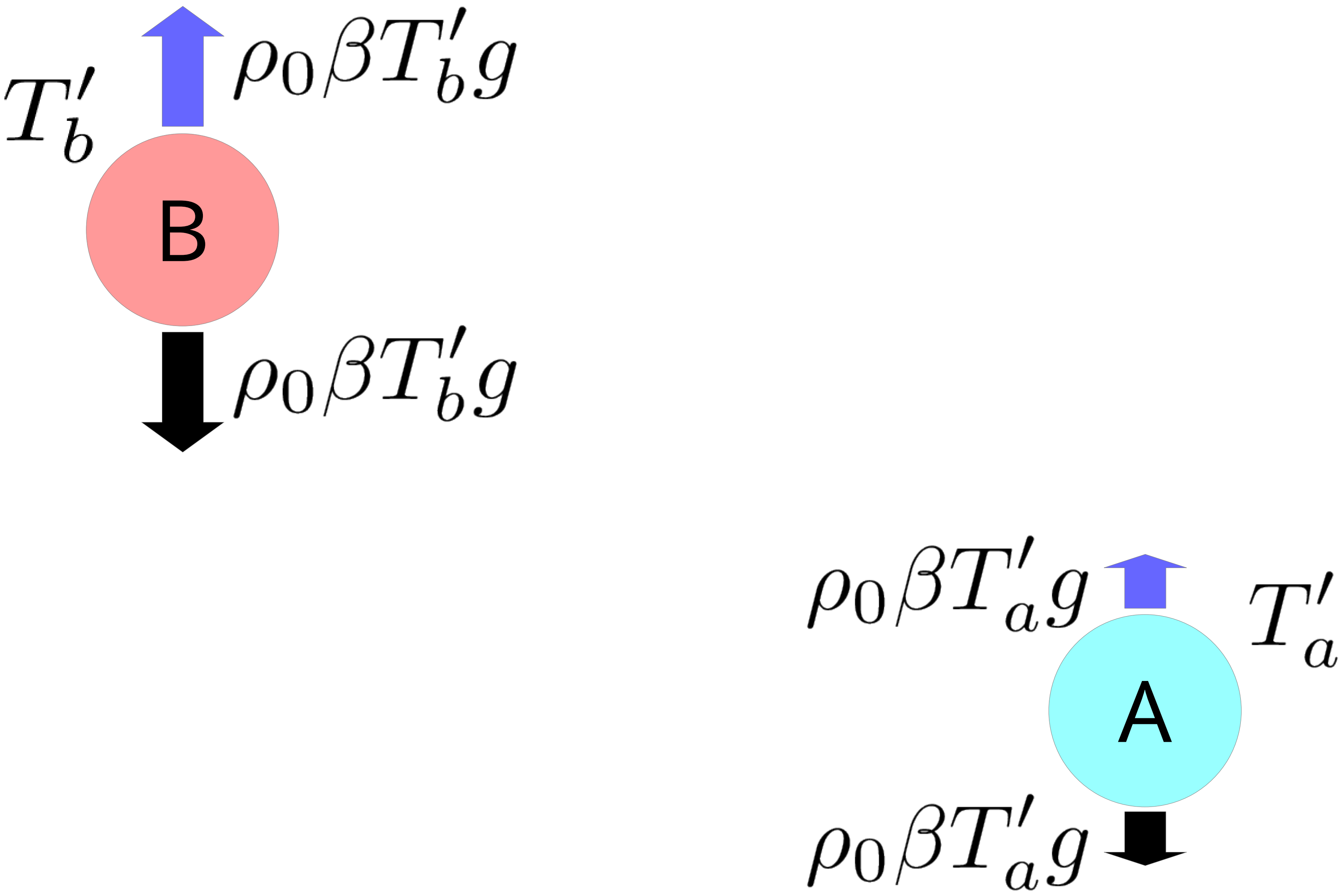
$$\rho_0\beta(T'_b - T'_a)gdz$$

位置交換を実現するには
等量の仕事を行うことが必要

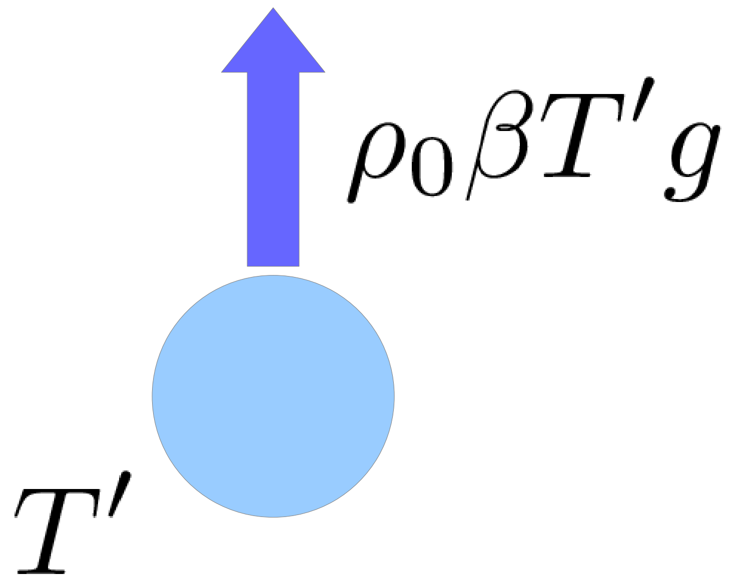


T_b'
B
$\rho_0 \beta T_b' g$
T_a'
A
$\rho_0 \beta T_a' g$


準静的過程
系に働く力は釣り合っている
T_b'
B
$\rho_0\beta T_b' g$
T_a'
A
$\rho_0\beta T_a' g$



$\rho_0 \beta T_b' g$
T_b'
B
$\rho_0 \beta T_b' g$
$\rho_0 \beta T_a' g$
T_a'
A
$\rho_0 \beta T_a' g$



Boussinesq近似下での浮力

結論

- 本来のBoussinesq近似下での浮力の実体は, 圧力傾度力である.
- 本来のBoussinesq近似下での浮力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- 本来のBoussinesq近似下での流体の密度は一定であり, 浮力の表式はエネルギーの保存則に基づいて導出できる.
- 連続の式は不可侵である.

Boussinesq近似の合理的導出

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

Boussinesq近似は, 一様重力場中で非一様な温度分布を持つ単一成分流体に関する近似です.

この近似下での流体の支配方程式系は, 流体の粘性を無視するとき. . .

基準密度　熱膨張係数

$$\rho_0\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\right\}=-\nabla p'+\boxed{\rho_0\beta T' g\boldsymbol{k}}$$

圧力摂動　浮力項

$$\frac{\partial T'}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T'=\kappa\nabla^2 T'$$

温度偏差

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$$

流速

このようになります.

運動方程式中のこの項が, Boussinesq近似下で浮力と呼ばれる力を表します.

本講演の目標は, この浮力項を物理的に妥当な方法で導出することです.

ところで, 浮力項は伝統的には...

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \beta T'$$

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0$$

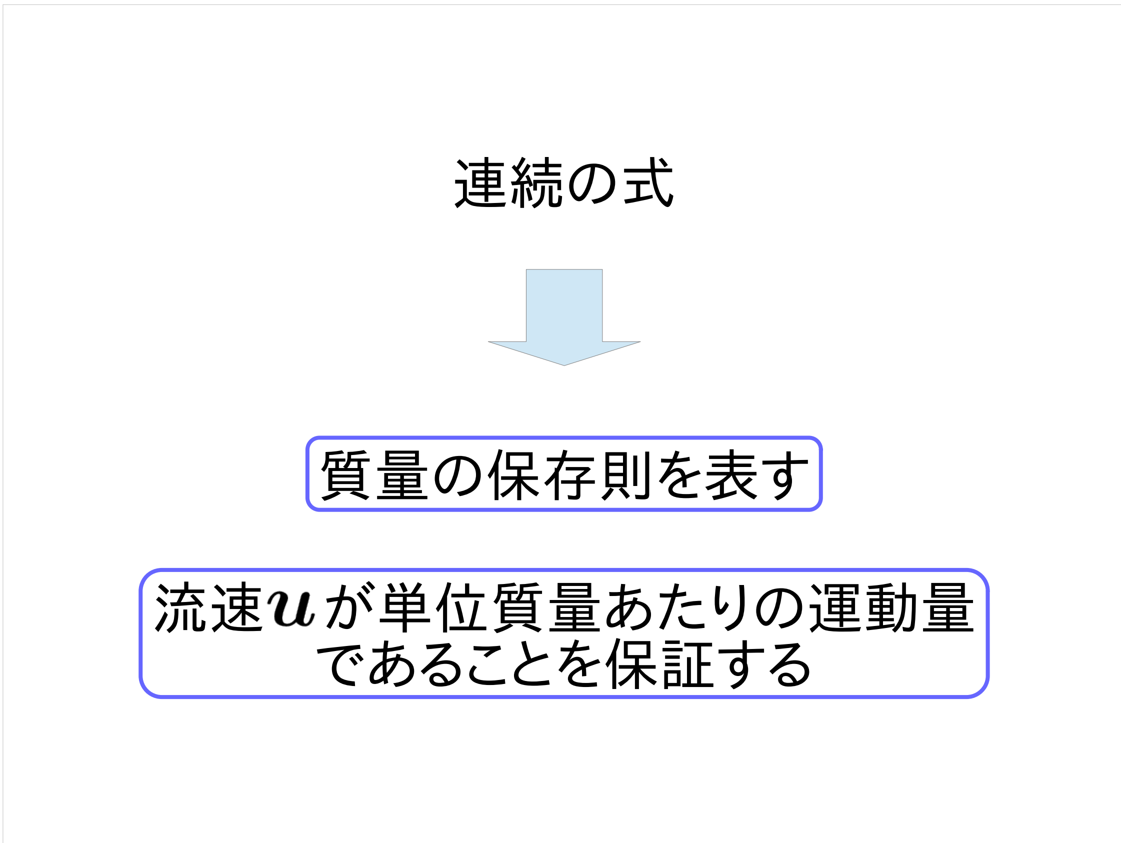
が成立しない

流体の密度が温度の一次関数として与えられるという仮定の下で導出されてきました.

しかしながら, Boussinesq近似下で流体の密度が温度の一次関数であるとすると

連続の式が成立しなくなることは容易に分かります.

これは物理的に到底認めがたいことです. なぜなら, 連続の式は. . .



質量の保存則を表しているからです.

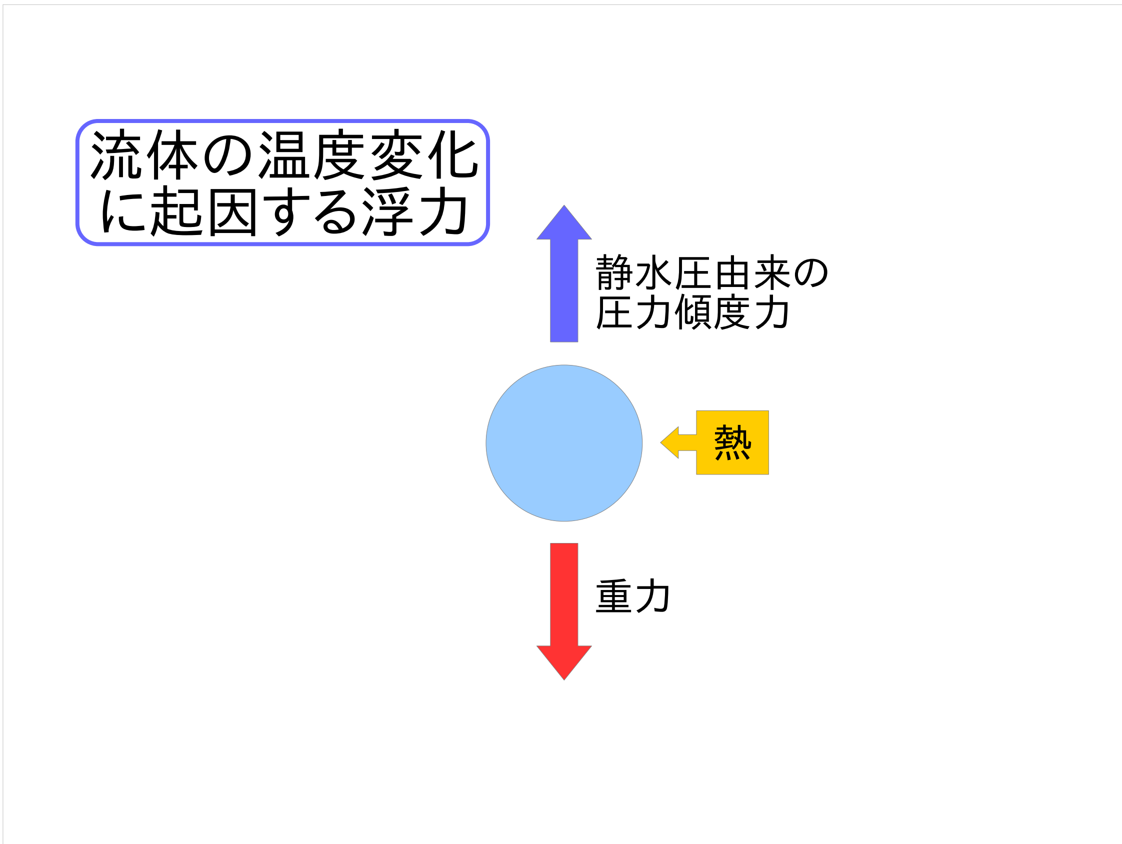
電荷の保存則が成立しない電磁気学が存在しないのと同様に, 質量の保存則が成立しない流体力学もまた存在し得ません.

さらに連続の式には, 流速が単位質量あたりの運動量であることを保証する役割があります.

連続の式が成立しないと, 流速は単位質量あたりの運動量という本来の意味を失ってしまいます. その結果, 質量の保存則のみならず, 運動量およびエネルギーの保存則も成立しなくなってしまうのです.

以上より, 浮力項の伝統的な導出法が物理的に妥当でないことは明らかでしょう.

では, 連続の式に矛盾することなく浮力項を導出することはできないのでしょうか.

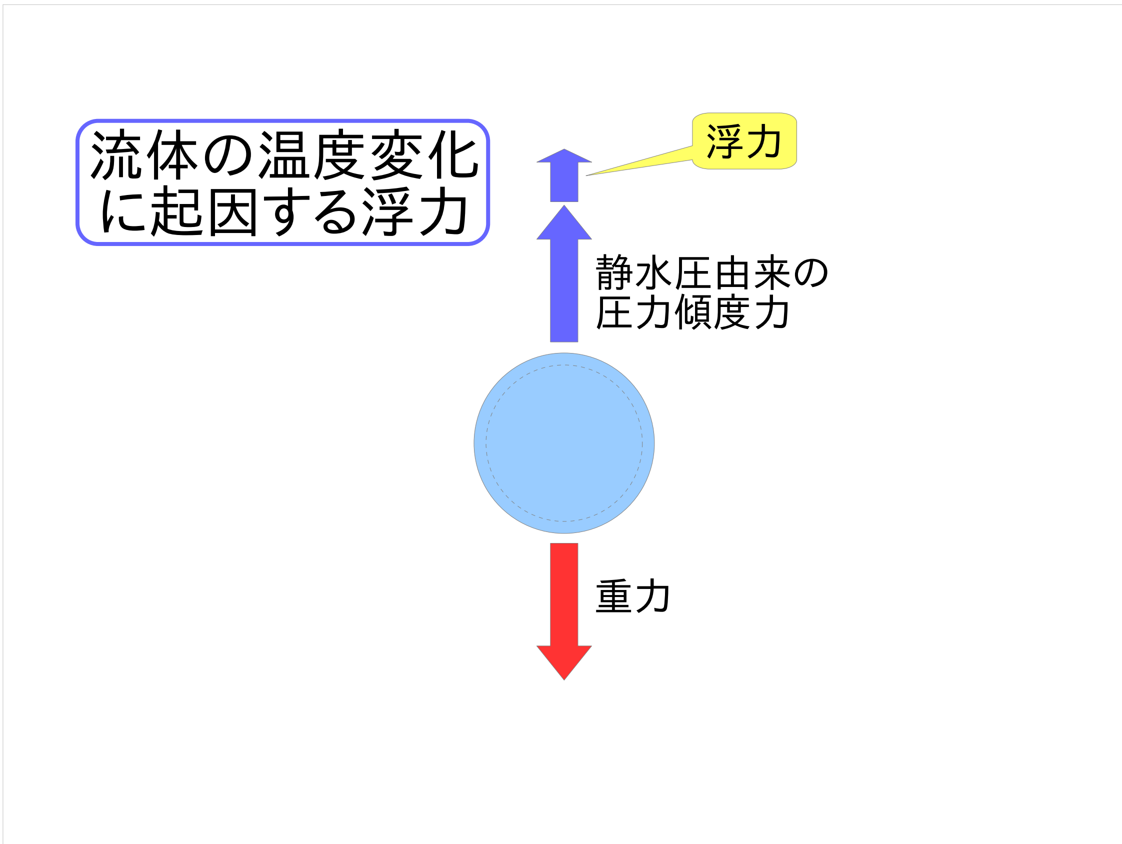


それに答えるには, まず流体の温度変化に起因する浮力というものの実体を明らかにする必要があります.

今, ごく普通の実在流体を考え, この流体の一つの塊に注目します.

この塊には鉛直下向きの重力と, それに釣り合う鉛直上向きの圧力傾度力が作用して静止しているものとします.

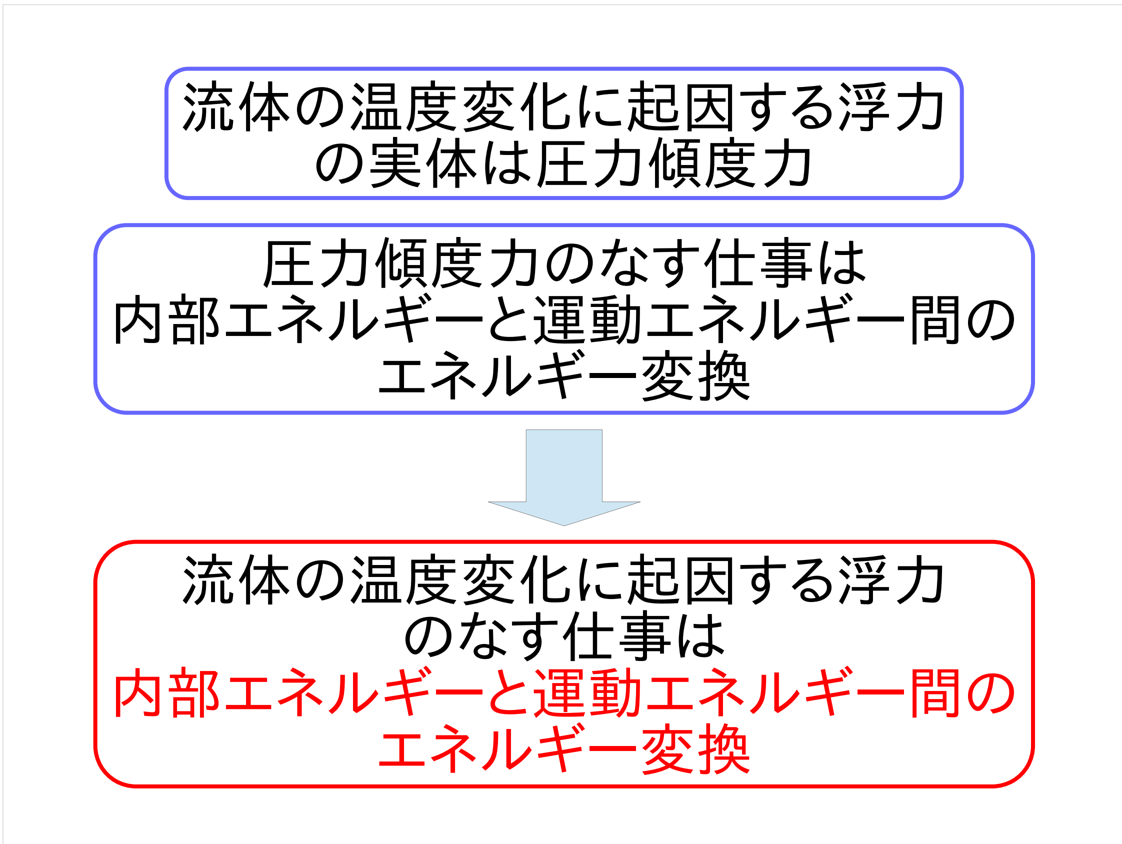
この塊に熱を加えると. . .



塊は膨張します.

その結果, 塊に働く圧力傾度力は増加します. 圧力傾度力が塊の体積に比例するからです.

この増加した圧力傾度力が, 流体の温度変化に起因する浮力となります.



つまり, 温度変化に起因する浮力の実体は, 圧力傾度力であるということです.

ところが, ご存知のとおり固定領域内で圧力傾度力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応します.

よって結局, 温度変化に起因する浮力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することになります.

逆に考えると, 温度変化に起因する浮力は, このエネルギー変換に伴って現れるものと期待されます.

実際, これから説明するごく簡単な思考実験について, そのエネルギー収支を検討することで, Boussinesq近似下での浮力項を, 連続の式に矛盾することなく導出することが可能なのです.

思考実験の前提条件

$\boxed{\text{密度一定の非圧縮性流体}}$

$$\rho = \rho_0$$

$\boxed{\text{熱膨張係数はゼロではない定数}}$

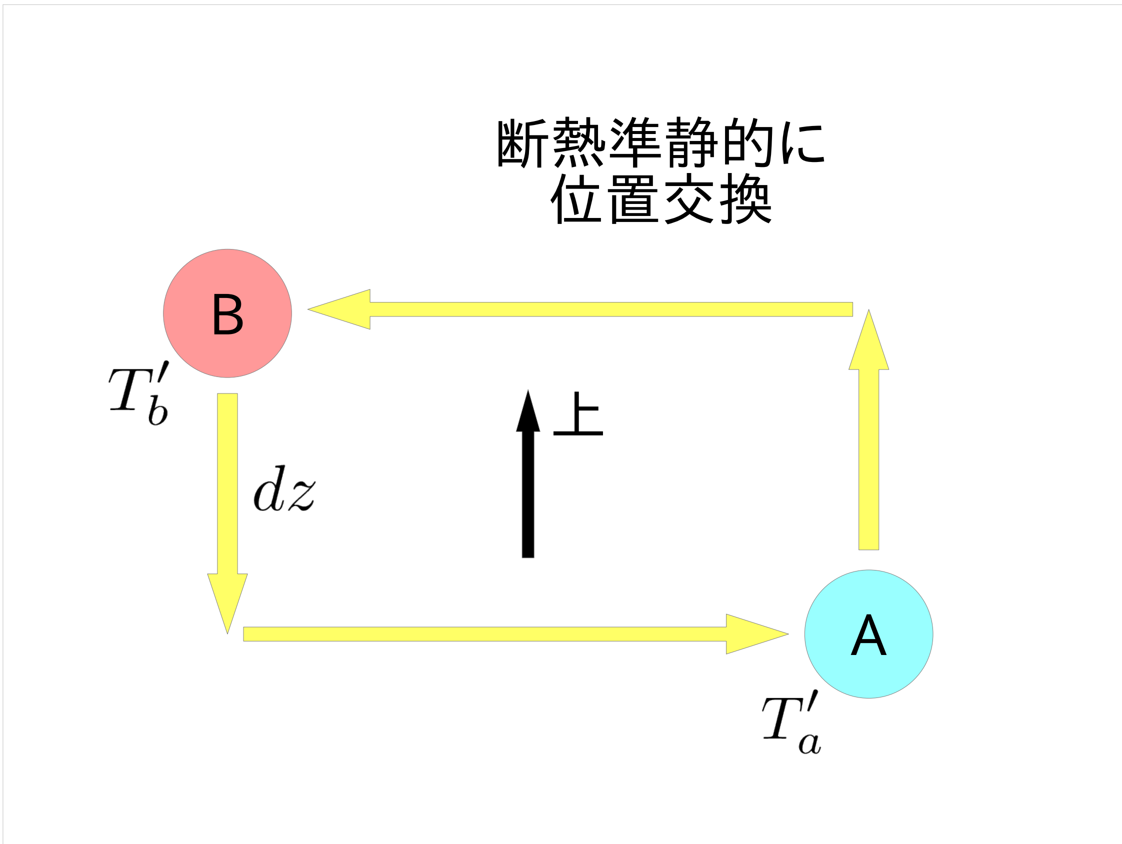
$$\beta \neq 0$$

最初に思考実験の前提条件を明らかにしておきましょう.

まず, 考察する流体は密度一定の非圧縮性流体であると仮定します.

Boussinesq近似下で密度が一定であれば, 連続の式が成立することは言うまでもありません.

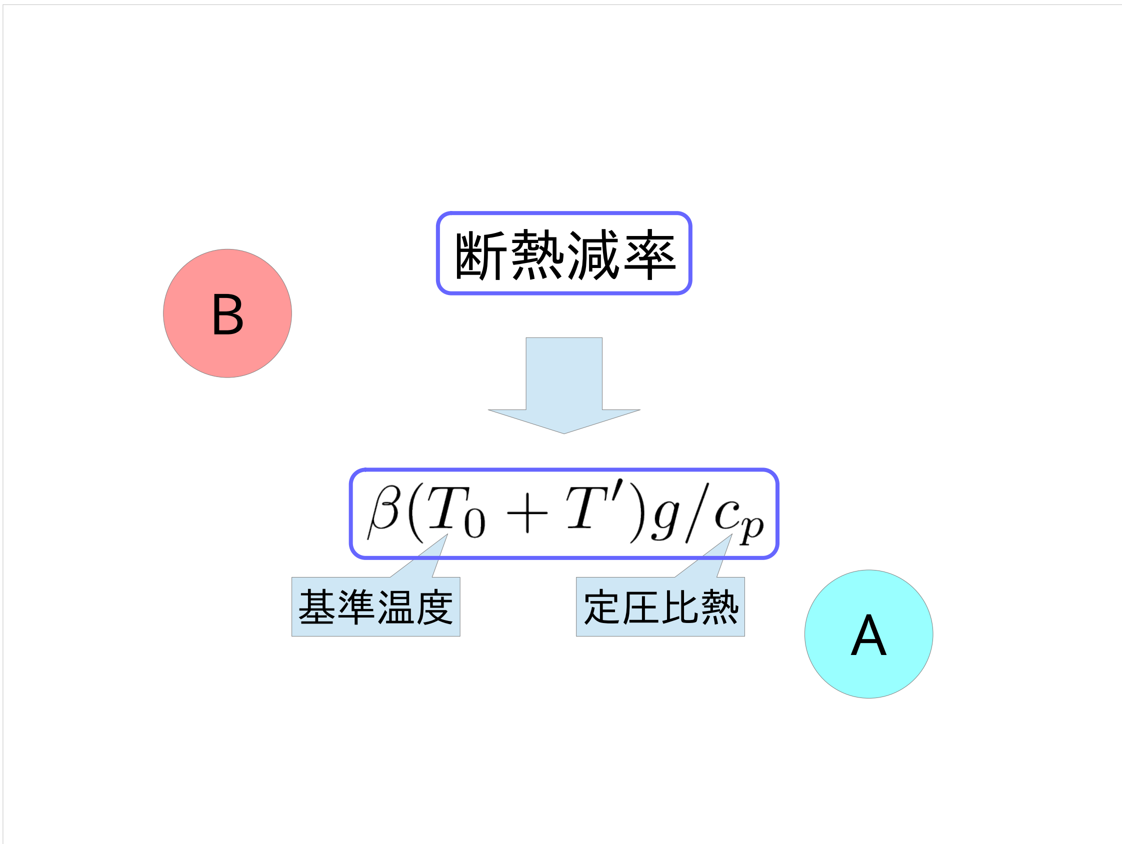
他方, 流体の熱膨張係数はゼロではない定数であると仮定します.



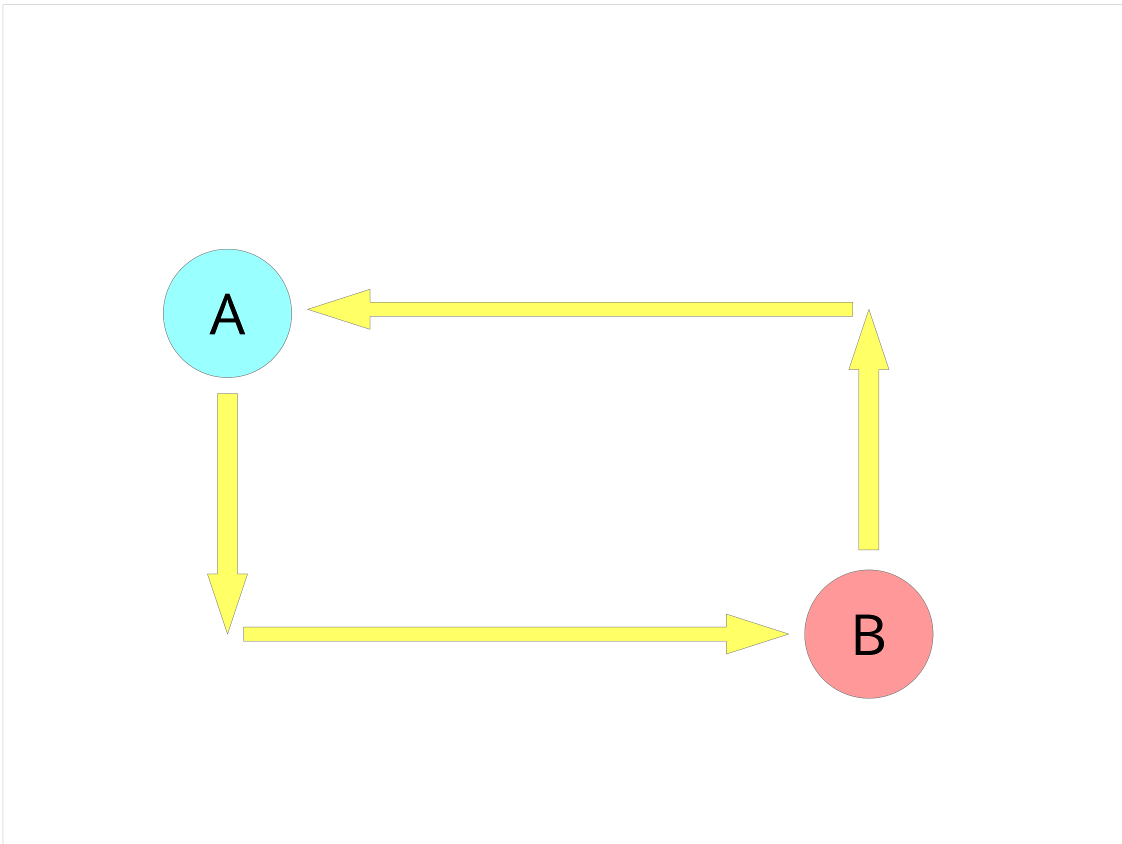
これらの条件下で, 温度T'aとT'bの二つの単位体積の流体要素AとBを考えます.

その上で, これら流体要素の位置を断熱準静的に交換してみることにします.

要素AがBよりもdzだけ低い位置にあったとすると...



断熱減率がこうですので...



位置交換の結果...

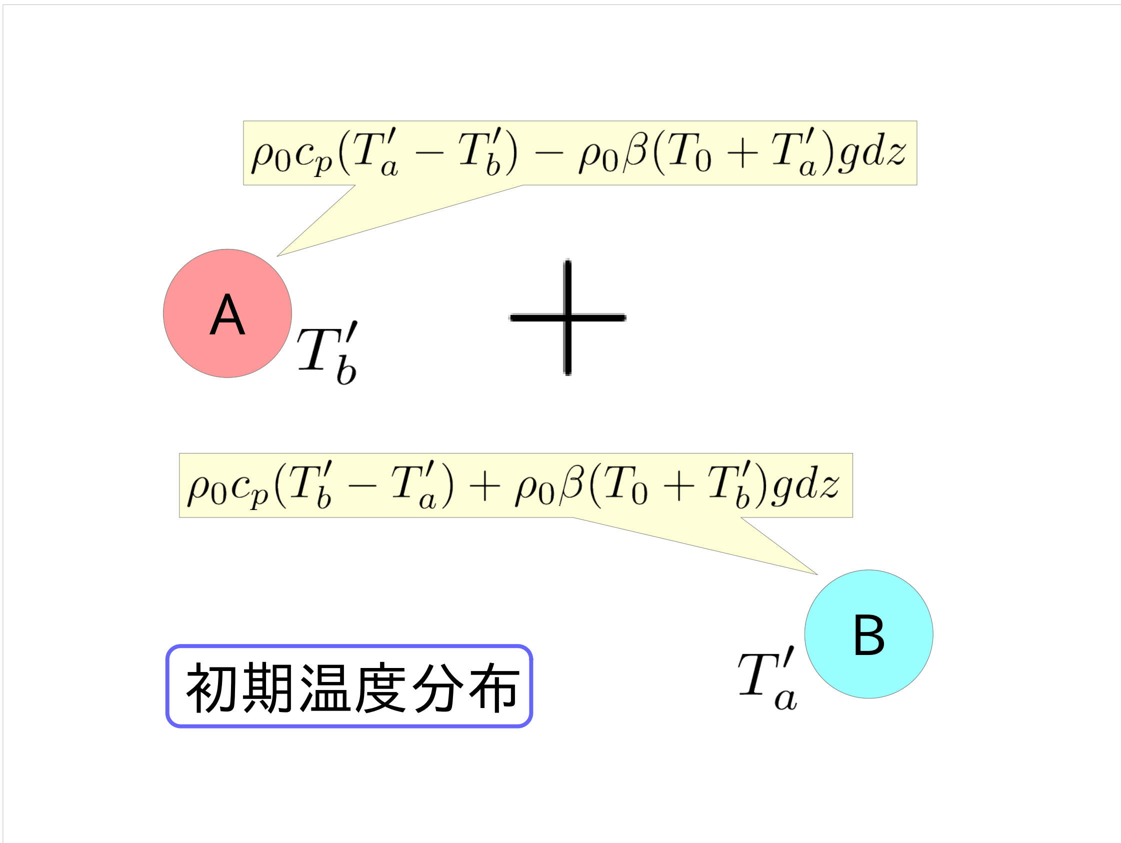
位置交換後の温度

A $T'_a - \beta(T_0 + T'_a)gdz/c_p$

$T'_b + \beta(T_0 + T'_b)gdz/c_p$ B

各流体要素の温度は，このようになります．

そこで...

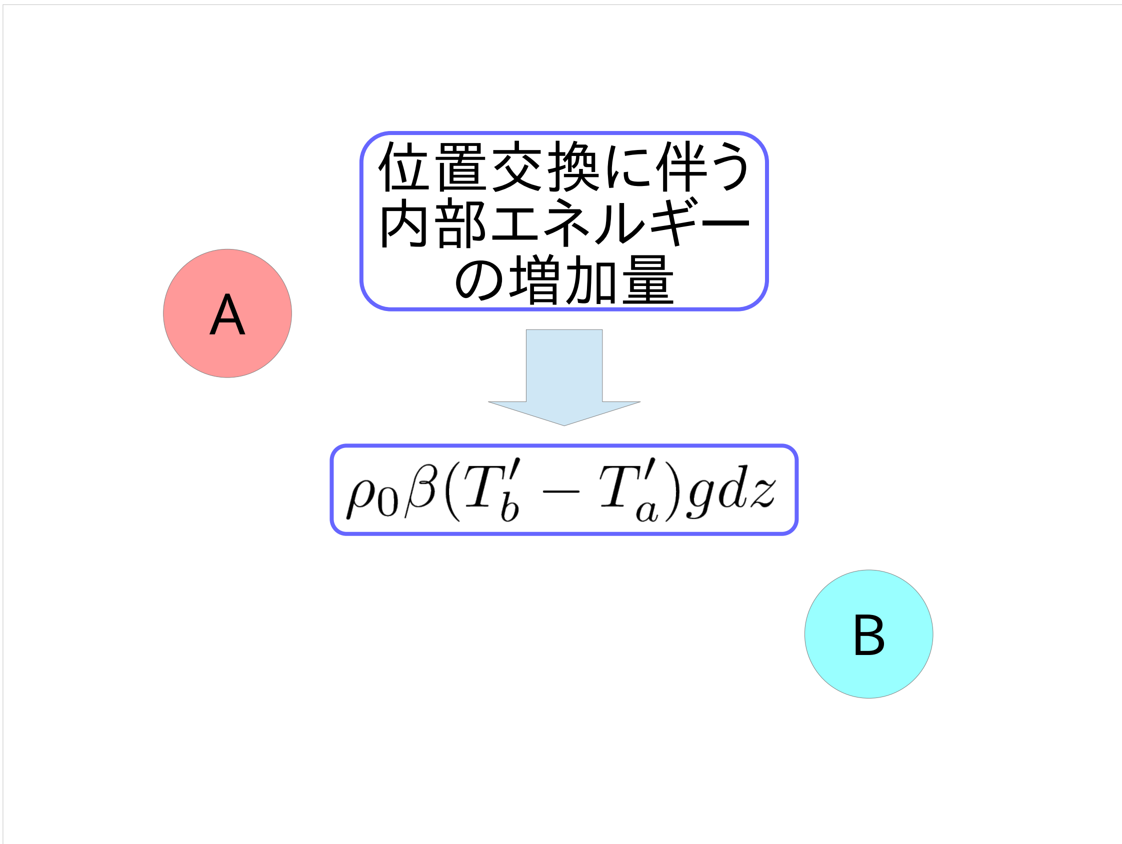


要素Aから, これだけの熱量を除去し

要素Bからは, これだけの熱量を除去すると

初期温度分布が復元されます.

このことから, これら除去した熱量の和が...



位置交換に伴って生じた系の内部エネルギーの増加量を与えることが分かります.

これを計算すると, このような値が得られますが...

$\boxed{\text{断熱過程}}$

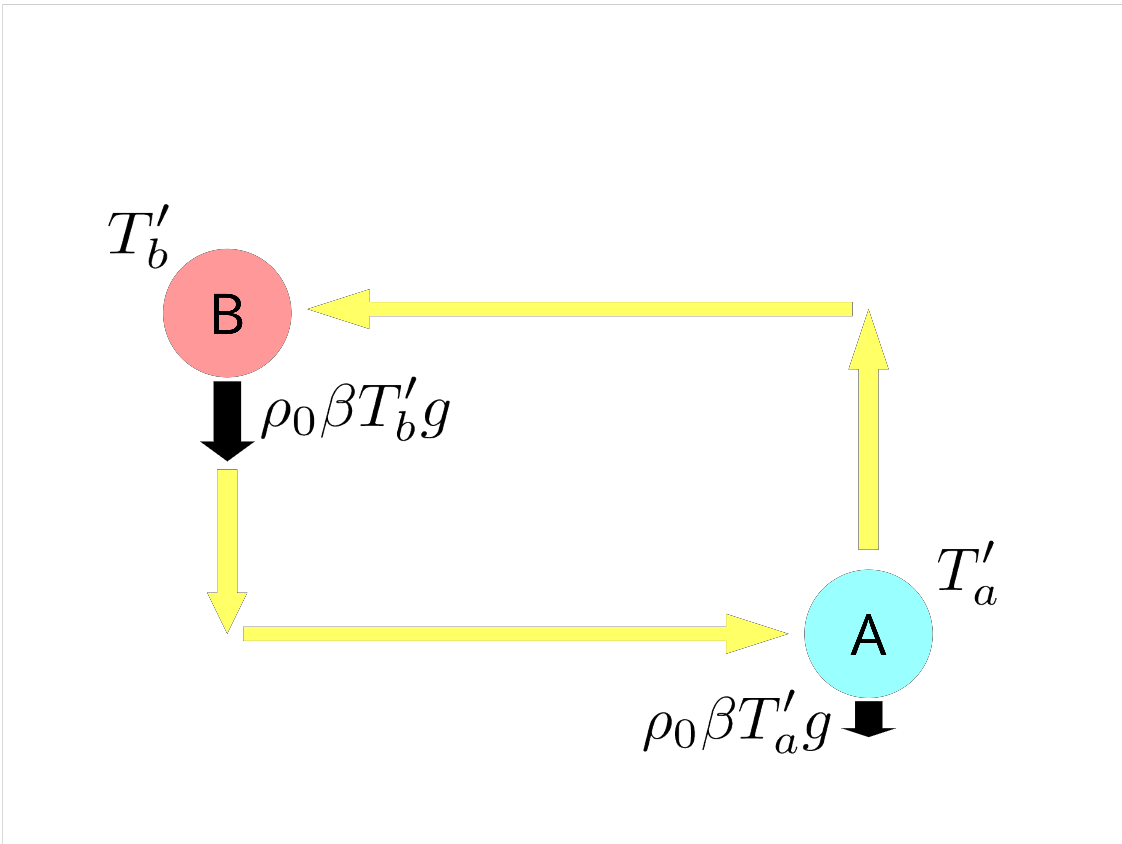
$$\boxed{\rho_0 \beta (T_b' - T_a') g dz}$$

位置交換を実現するには
等量の仕事を行うことが必要

この位置交換の過程は断熱過程でしたから

この過程を実現するには, 系に力を及ぼして等量の仕事を行う必要があります.

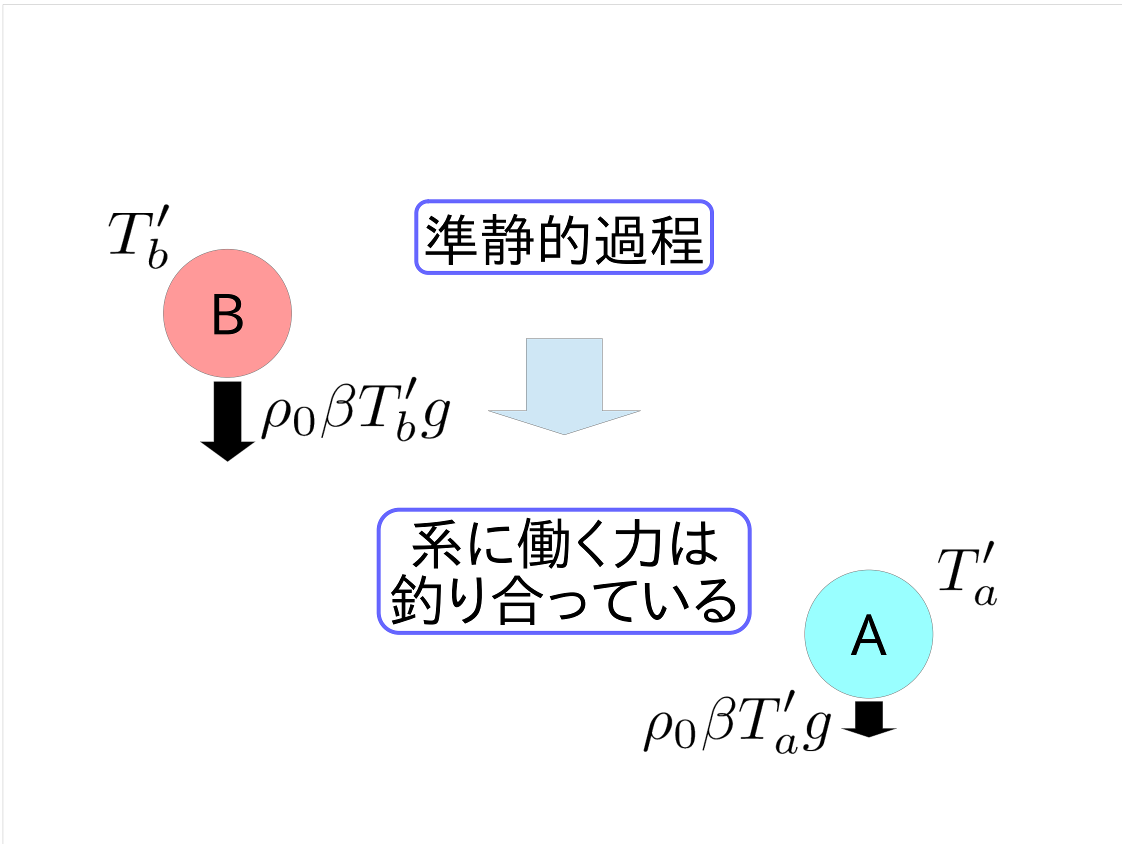
この仕事は...



流体要素AとBに

それぞれこのような力を及ぼして

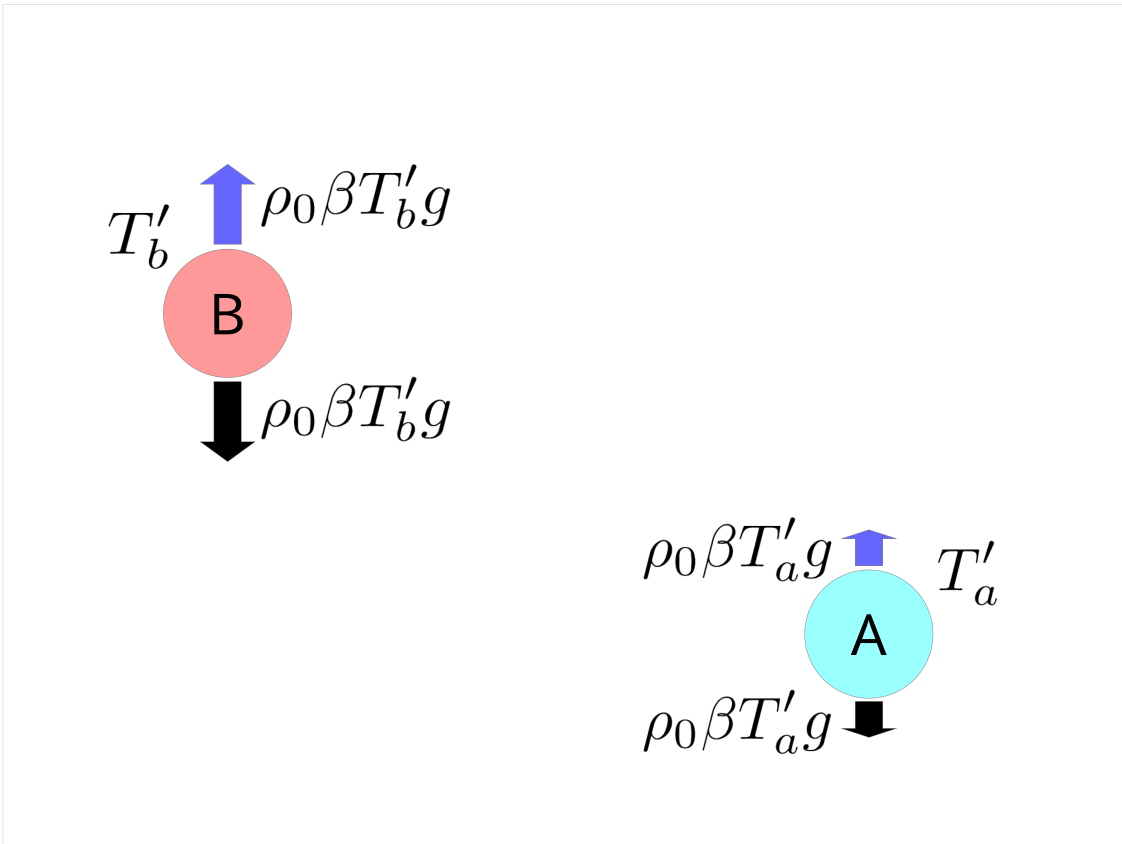
位置交換を行えば実現されます.



一方で, この位置交換の過程は準静的過程でもありましたから

位置交換に際して系に働く力は常に釣り合っていなければなりません.

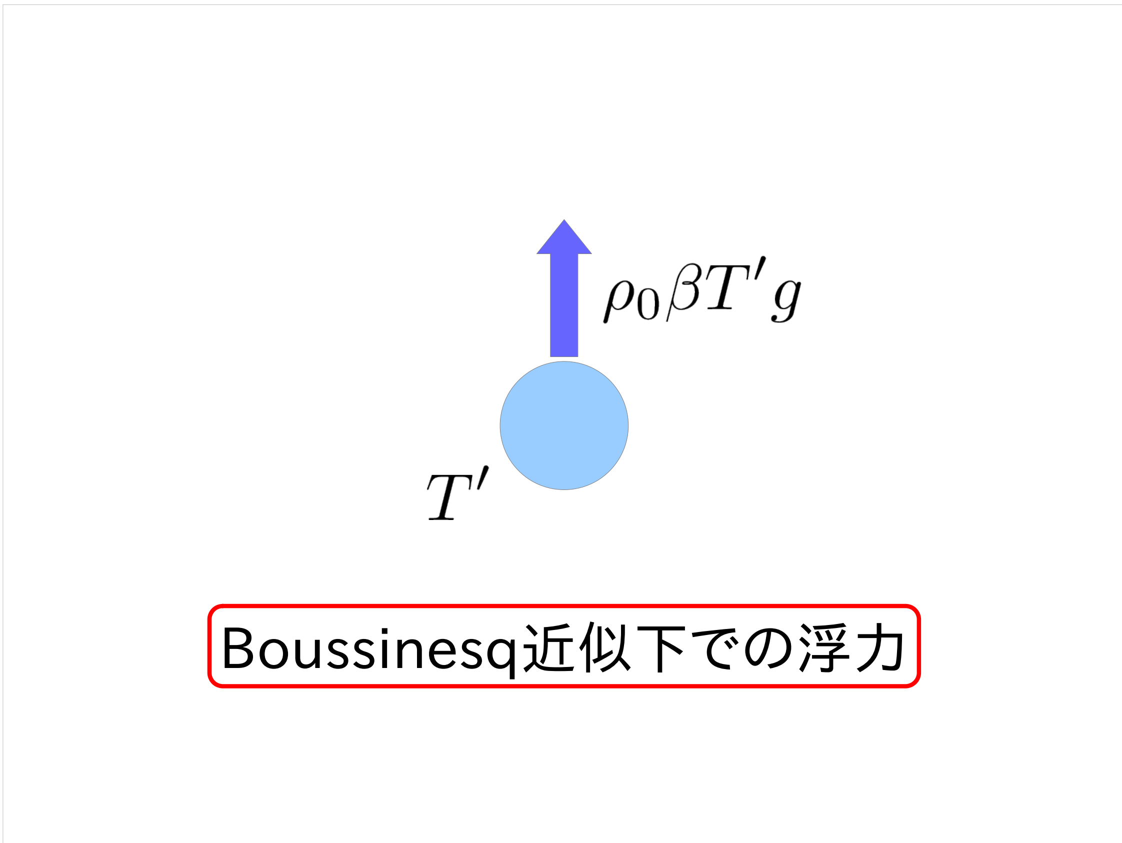
従って, 流体要素AとBには...



位置交換に際してそれぞれに及ぼした力と

ちょうど釣り合うこのような力が, そもそも働いていたということが結論されます.

この結論を一般化すると. . .



温度T'を持つ単位体積の非圧縮性流体要素には

これだけの力が鉛直方向に働くことになります.

かくして, 連続の式に矛盾することなくBoussinesq近似下で浮力と呼ばれる力が得られました.

以上まとめますと, 結論は. . .

結論

- 本来のBoussinesq近似下での浮力の実体は, 圧力傾度力である.
- 本来のBoussinesq近似下での浮力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- 本来のBoussinesq近似下での流体の密度は一定であり, 浮力の表式はエネルギーの保存則に基づいて導出できる.
- 連続の式は不可侵である.

このようになります.

最後の連続の式の不可侵性は特に重要です.

世の中には, Boussinesq近似を修正した, 精密化した, あるいは拡張したと称する方程式系が多数存在し, 実際に用いられています. しかしながら, これら方程式系のほとんどで連続の式は成立していません.

この憂慮すべき状況は, 本来のBoussinesq近似下でも連続の式は成立していないし成立する必要もない, という誤った理解に根差すものです.

我々は, 今一度基本に立ち返り, 連続の式が成立しないような流体力学は存在し得ないという事実を認識する必要があるでしょう.

以上です. 御清聴ありがとうございました.