

非弹性近似

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

Ogura, Y. & Phillips, N. A. (1962)

Scale analysis of deep and shallow convection
in the atmosphere

Journal of the atmospheric sciences
19(2), 173-179

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -c_p\theta_0\nabla\Pi' + (g\theta'/\theta_0)\mathbf{k}$$

一定の基準温位

摂動エクスポネンシャル関数

温位偏差

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温位大気の密度

$$\frac{D\theta'}{Dt} = 0$$

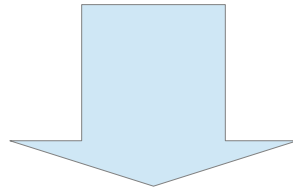
非弾性近似の利点

支配方程式系の解に
音波が含まれない

密度の高度変化が無視できないような
深い流体層に適用可能

非弾性近似の欠点

理想気体にしか適用できない



任意の流体に適用可能な形に
非弾性近似を再構築する

非弾性近似の下での運動方程式

一般的な非粘性流体の運動方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p / \rho - g\mathbf{k}$$

圧力傾度力

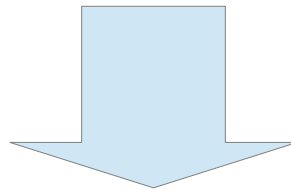
熱力学の基本式

$$dh = Tds + vdp, \quad v = 1/\rho$$

比エンタルピー

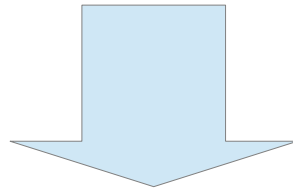
比エントロピー

比容



$$\nabla p/\rho = \nabla h - T\nabla s$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p / \rho - g\mathbf{k}$$



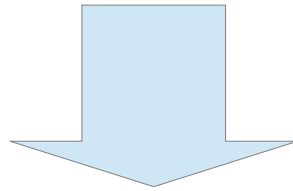
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$

$$h = h_0 + h', \quad s = s_0 + s'$$

ただし

$$h_0 = -gz + c_1, \quad s_0 = c_2$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$

温度

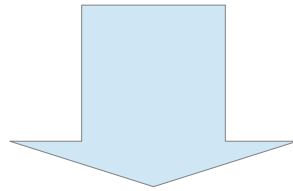
$$T = T_0 + T', \quad T_0 = T(h_0, s_0)$$



仮定1

$$|T'/T_0| \ll 1$$

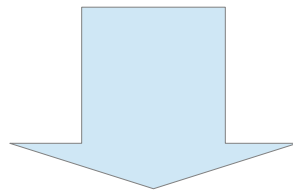
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h' + T_0\nabla s'$$

$$T_0 \nabla s' = \nabla (T_0 s') - s' \nabla T_0$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h' + T_0 \nabla s'$$



浮力

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

非弾性近似の下での運動方程式

非弾性近似の下での連続の式

一般的な連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

密度

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(h_0, s_0)$$

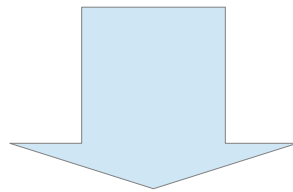
仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

$$\rho = \rho_0$$

非弾性近似の本質

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

非弾性近似の下での連続の式

非弾性近似の下での断熱方程式

$$\rho T \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

仮定2

$$\rho_0 T \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

仮定1

$$\rho_0 T_0 \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

非弾性近似の下での断熱方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho_0 T_0 \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

非弾性近似の下での支配方程式系

非弾性近似再構築の効用

非弾性近似が適用可能
となる条件の明確化

ブシネスク近似との
関係の明確化

非弾性近似下での流体の
エネルギー収支の明確化

非弾性近似が適用可能となる条件

$$|T' / T_0| \ll 1$$

仮定1

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

仮定2

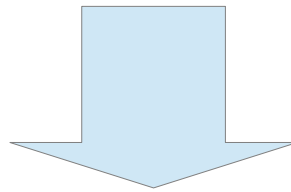
ビジネスク近似との関係

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2} / a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(h_0, s_0)$$

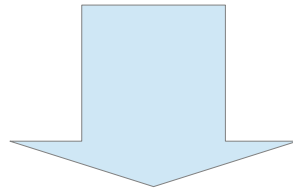
流体層の厚さ

音速



$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

連続の式



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

さらに

$$\Gamma_0 H / T_0 \ll 1, \quad \Gamma_0 = \Gamma(h_0, s_0)$$

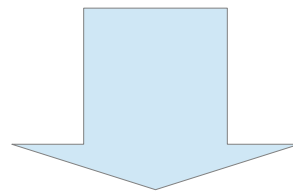
断熱減率

ただし

$$\frac{\Gamma_0 H / T_0}{\beta_0 T_0} \geq O(1), \quad \beta_0 = \beta(h_0, s_0)$$

熱膨張係数

運動方程式



等温位分布からの偏差

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

$$p' = \rho_0 h' - \rho_0 T_0 s'$$

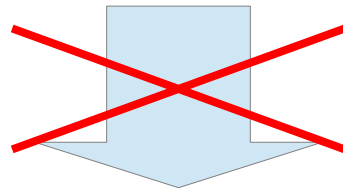
同じ条件

$$\Gamma_0 H / T_0 \ll 1$$

同時に

$$\frac{\Gamma_0 H / T_0}{\beta_0 T_0} \ll 1$$

運動方程式



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

ブシネスク近似は
非弾性近似の一極限ではない

非弾性近似下での流体のエネルギー収支

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{u}|^2 dV = - \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

固定領域

非弾性近似の下での
流体の運動エネルギー方程式

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 g z dV = 0$$

非弾性近似の下での
流体の位置エネルギー方程式

比内部エネルギー

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 e \, dV = \int_{\Omega} \rho_0 s' \boldsymbol{u} \cdot \nabla T_0 \, dV$$

非弾性近似の下での
流体の内部エネルギー方程式

非弾性近似の下で
エネルギーは保存される

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + gz + e \right) dV = 0$$

非弾性近似の下での
流体の全エネルギー方程式

非弾性近似下で浮力のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{u}|^2 dV = - \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

浮力のなす仕事

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 e dV = \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

結論

- 非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築した.
- 非弾性近似が適用可能となる条件が明確化された.
- ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになった.
- 非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになった.

非弾性近似

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

非弾性近似は…

Ogura, Y. & Phillips, N. A. (1962)

Scale analysis of deep and shallow convection
in the atmosphere

Journal of the atmospheric sciences
19(2), 173-179

Ogura & Phillips (1962)により考案された近似です。

この近似の下での支配方程式系は…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -c_p \theta_0 \nabla \Pi' + (g\theta'/\theta_0)\mathbf{k}$$

一定の基準温位
温位偏差

摂動エクスター関数

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温位大気の密度

$$\frac{D\theta'}{Dt} = 0$$

このようになります。

等温位大気を基本場として、そこからの偏差を記述する方程式系となっています。

非弾性近似の利点

支配方程式系の解に
音波が含まれない

密度の高度変化が無視できないような
深い流体層に適用可能

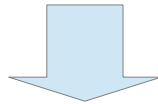
この近似の利点は何かというところ…

一つは、支配方程式系の解に音波が含まれないこと。

もう一つは、密度の高度変化が無視できないような深い流体層に適用できることです。

非弾性近似の欠点

理想気体にしか適用できない



任意の流体に適用可能な形に
非弾性近似を再構築する

一方、非弾性近似にも当然欠点があります。

それは、支配方程式系が、そのままでは理想気体にしか適用できないことです。

そこで、任意の流体に適用可能な形に非弾性近似を再構築することが本講演の最初の目標となります。

非弾性近似の下での運動方程式

ということで、まずは非弾性近似の下での運動方程式を定式化するところから始めましょう。

一般的な非粘性流体の運動方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p/\rho - g\mathbf{k}$$

圧力傾度力

一般的な非粘性流体の運動方程式はこのようなものですが…

この圧力傾度力を表す項から密度を消去するために…

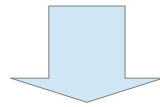
熱力学の基本式

$$dh = Tds + vdp, \quad v = 1/\rho$$

比エンタルピー

比エントロピー

比容



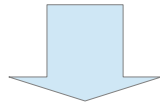
$$\nabla p/\rho = \nabla h - T\nabla s$$

熱力学の基本式と呼ばれるこの式に注目します。

今後、全ての熱力学量は、この式中に現れる比エンタルピーと比エントロピーの既知関数とみなされます。

さて、この式を用いますと、圧力傾度力は、このように表されますので…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p/\rho - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$

運動方程式はこのようになります。

次に、比エンタルピー及び比エントロピーを…

$$h = h_0 + h', \quad s = s_0 + s'$$

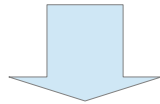
ただし

$$h_0 = -gz + c_1, \quad s_0 = c_2$$

このように分解します。

ただし、 h_0 は鉛直座標の一次関数で、 s_0 は一定です。

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$



$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$

温度

その結果、さきほどの方程式はこうなります。

次いで、ここに現れる温度Tも…

$$T = T_0 + T', \quad T_0 = T(h_0, s_0)$$

仮定1

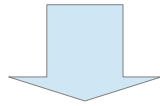
$$|T'/T_0| \ll 1$$

このように分解します。

ここで仮定1、すなわち流体の温度分布がほぼ等エントロピー分布である、という仮定を導入します。

その結果…

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$



$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h' + T_0\nabla s'$$

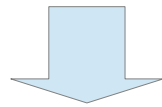
さきほどの方程式がこのように近似されます。

さらに、この最後の項が…

$$T_0 \nabla s' = \nabla(T_0 s') - s' \nabla T_0$$

このように書き換えられることに注意しますと…

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h' + T_0 \nabla s'$$



浮力

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

非弾性近似の下での運動方程式

方程式はこうなります。

これが非弾性近似の下での運動方程式となります。

なお、この最後の項は、非弾性近似下で浮力と称される力を表しています。

非弾性近似の下での連続の式

次に、非弾性近似の下での連続の式について考えます。

一般的な連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

密度

連続の式は一般にこのように書かれますが…

この式中の密度を…

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(h_0, s_0)$$

仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

温度Tと同様に分解します。

ここで仮定2、すなわち流体の密度分布がほぼ等エントロピー分布である、という仮定を導入します。

このとき…

$$\rho = \rho_0$$

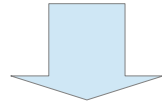
非弾性近似の本質

流体の密度をこのように近似することが可能になります。

この近似こそが、非弾性近似の本質であります。

この近似の下で、連続の式は…

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

非弾性近似の下での連続の式

このように簡単化されます。

これが非弾性近似の下での連続の式となります。

非弾性近似の下での断熱方程式

最後は非弾性近似の下での断熱方程式についてですが、これは簡単で…

$$\rho T \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

仮定2

$$\rho_0 T \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

仮定1

$$\rho_0 T_0 \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

非弾性近似の下での断熱方程式

まず最初に、いわゆる熱輸送の一般式が、断熱条件の下ではこのように表現されることに注意します。

この式に、さきほどの密度に関する仮定2を使いますと、このように近似されます。

さらに、温度に関する仮定1を使いますと、こうなります。

これが非弾性近似の下での断熱方程式となります。

以上、まとめますと…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho_0 T_0 \frac{Ds'}{Dt} = 0$$

非弾性近似の下での支配方程式系

これが非弾性近似の下での支配方程式系となります。

流体が理想気体のときには、これが最初にお見せした方程式系に帰着することは容易に示すことができます。

かくして、非弾性近似が任意の流体に適用可能な形に再構築されたわけですが…

非弾性近似再構築の効用

非弾性近似が適用可能
となる条件の明確化

ブシネスク近似との
関係の明確化

非弾性近似下での流体の
エネルギー収支の明確化

その効用が何であるかというと…

この三つになります。

以降は、これら三つの効用のそれぞれについて、簡単に見てゆきたいと思います。

非弾性近似が適用可能となる条件

最初に非弾性近似が適用可能となる条件についてですが、これは単に…

$$|T'/T_0| \ll 1$$

仮定1

$$|\rho'/\rho_0| \ll 1$$

仮定2

再構築の過程で使用した仮定1及び仮定2が正当化されればよいということになります。

ビジネス近似との関係

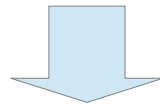
次にビジネス近似との関係を考えます。

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(h_0, s_0)$$

流体層の厚さ

音速

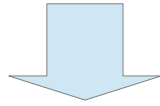


$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

そのためにもまず、このような条件が成立するという意味で、流体層は浅いものと仮定します。

このとき ρ_0 は一定とみなすことができます。その結果…

連続の式



$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

連続の式は、こうなります。これはブシネスク近似の下での連続の式と同じものです。

さらに

$$\Gamma_0 H/T_0 \ll 1, \quad \Gamma_0 = \Gamma(h_0, s_0)$$

断熱減率

ただし

$$\frac{\Gamma_0 H/T_0}{\beta_0 T_0} \geq O(1), \quad \beta_0 = \beta(h_0, s_0)$$

熱膨張係数

さらに、このような条件も成立するものと仮定します。

ただし、この条件は満たされているものとしします。すると…

運動方程式

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$
$$p' = \rho_0 h' - \rho_0 T_0 s'$$

運動方程式は、このように近似されます。

この運動方程式は、ブシネスク近似下で得られるものと形式的には同じものです。

しかしながら、この方程式中の温度偏差が、等温位分布からの偏差であることに注意が必要です。

ブシネスク近似においてこれに対応する量は、等温分布からの偏差を表しています。

しかし、より重要なことは…

同じ条件

$$\Gamma_0 H / T_0 \ll 1$$

同時に

$$\frac{\Gamma_0 H / T_0}{\beta_0 T_0} \ll 1$$

先ほどと同じ条件が成立していても…

同時に、理想気体がそうであるように、この条件が当てはまる場合…

運動方程式



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

運動方程式に対する先ほどの近似は成立しません。

以上より…

ビジネス近似は
非弾性近似の一極限ではない

ビジネス近似は非弾性近似の一極限ではない、と結論
することができます。

非弾性近似下での流体のエネルギー収支

最後に、非弾性近似下での流体のエネルギー収支について考えます。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{u}|^2 dV = - \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

固定領域

非弾性近似の下での
流体の運動エネルギー方程式

まず、非弾性近似の下で、固定領域内の流体の運動エネルギー方程式はこのようになります。

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 g z dV = 0$$

非弾性近似の下での
流体の位置エネルギー方程式

一方、流体の位置エネルギー方程式は、こうなり…

比内部エネルギー

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 e \, dV = \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 \, dV$$

非弾性近似の下での
流体の内部エネルギー方程式

内部エネルギー方程式はこうなります。

以上、三つの方程式を足し合わせると…

非弾性近似の下で
エネルギーは保存される

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + gz + e \right) dV = 0$$

非弾性近似の下での
流体の全エネルギー方程式

非弾性近似の下での流体の全エネルギー方程式が得られます。

この式は、非弾性近似の下でエネルギーが保存されることを示しています。

ところで…

非弾性近似下で浮力のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{u}|^2 dV = - \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

浮力のなす仕事

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 e dV = \int_{\Omega} \rho_0 s' \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 dV$$

先ほどの運動エネルギー方程式を見返しますと…

右辺には、浮力のなす仕事が見れています。

一方、内部エネルギー方程式の右辺には…

この浮力のなす仕事は符号を変えて見れています。

このことから…

非弾性近似下で浮力のなす仕事は、内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する、と結論することができます。

結論

- 非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築した。
- 非弾性近似が適用可能となる条件が明確化された。
- ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになった。
- 非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになった。

最後に本講演の結論をまとめておきますと…

このようになります。

非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築しました。その結果…

非弾性近似が適用可能となる条件が明確化されました。

ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになりました。

非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになりました。

以上です。御清聴ありがとうございました。