コンピュータ応用解析II

2003年版

Version 03.05.26

防衛大学校・機械システム工学科

藪下和樹

yabu@nda.ac.jp

目 次

1 はじめに 1

2 数値積分 2

3 ニュートン法 4

4 オイラー法、Euler Method 6

5 ルンゲ・クッタ法、Runge-Kutta Method 8

6 高階常微分方程式とルンゲ・クッタ法 9

7 mathematica 入門 10

8 mathematica による微積分 12

9 多項式の解とニュートン法 12

10 微分方程式とルンゲクッタ法 13

11 極限 14

12 グラフィック 15

13 ベクトル・行列 16

14 総合問題 17

1　はじめに

防衛大学校機械システム工学科では３年次の本科学生に対して前期にコンピュータ応用解析 I があり、後期に本講義であるコンピュータ応用解析 II がある。コンピュータ応用解析 I の講義の内容は UNIX の使い方と C 言語の習得、そして数値計算の初歩の導入である。コンピュータ応用解析 II はこれに引き続き数値計算法、数値解析を教授するものである。また講義の後半で数式処理システムの１つである MATHEMATICA について学ぶ。

今やコンピュータは専門家のみならず、一般のひとが所有するのが当たり前となり、高齢者や子供などを含め広く浸透するに至っている。しかしながら、コンピュータをメールやインターネット、ワープロ、表計算ソフトを使ってじょうすに使いこなす人多いが、自分のほしい機能を持つプログラムを自分で組める人の割合は大変少ないのが現状である。機械工学分野でみてもプログラミングの能力は必須の知識、技量であり、プログラミングを自分の能力の１つとしておくことが将来的にも自分に制限を科さず、自分を高め、広い視野で物事を見ることができるようにするために必要である。そこで本講義では機械分野で必要であろうと思われる数値解析法を通して、自分でプログラミングができるようになる技量を拾得する。

2　数値積分

$$f(x) = \sin x \tag{2-1}$$

のような積分可能な関数は解析的に積分すればよい。

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2 \tag{2-2}$$

しかしながら、複雑な数値計算の結果のようにその関数が不明の時は数値的に積分を行うしかない。この章では数値積分で最も簡単な台形積分を学ぶ。図 1 の曲線を x_{min}から x_{max}まで数値積分する。そのとき

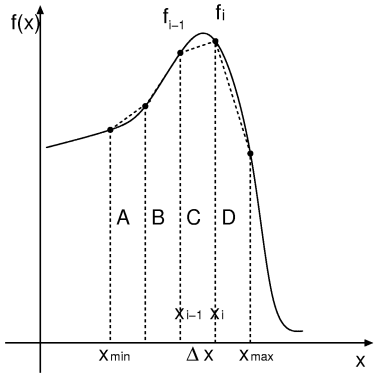


図 1: 台形積分

曲線を図に示すように台形に分解しその面積を足し合わせることにより面積を求める。台形の面積は A で部分では曲線より面積が大きくなり、C,D では面積が小さくなっている。この面積の微妙な違いが計算誤差となる。台形積分は台形部分の面積が真の値より大きくなったり小さくなったりして相殺されそれほど悪くない積分値を与えることが少なくない。

台形の面積を求めれば

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f_i + f_{i-1})(x_i - x_{i-1})/2 \tag{2-3}$$

となる。以下の例は sin カーブを積分する計算である。

```
/**********************************************
 *    Numerical Integration                   *
 *        Oct. 7, 2002                        *
 **********************************************/
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define N 100

double func(double x);
```

```
double integ(double *x,double *y);

void main(void)
{
  const double PI=3.14159265358979;
  int i;
  double x[N+1],y[N+1],xmin=0,xmax=PI,s;
  for (i=0;i<=N;++i)
  {
    x[i]=xmin+(xmax-xmin)*(double)i/(double)N;
    y[i]=func(x[i]);
  }
  s=integ(x,y);
  printf("S=%e\n",s);
}


/*  function */
double func(double x)
{
  return sin(x);
}

/*  integral */
double integ(double *x,double *y)
{
  int i;
  double s=0;
  for (i=1;i<=N;++i)
  {
    s+=(y[i]+y[i-1])*(x[i]-x[i-1])/2;
  }
  return s;
}
```

問題

1. n の大きさを変えて数値精度を解析解と比較せよ。
2. 次式の数値積分せよ。n は適当に定めよ。

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin x dx \tag{2-4}$$

3　ニュートン法

任意の方程式 $f(x)=0$ を満たす x を求める代表的な数値計算法にニュートン法がある。例えば下記のプログラムは 2 次方程式

$$x^2-4x+4=0 \tag{3-1}$$

を解く例である。ここで $f(x)=x^2-4x+4$ である。以下ニュートン法の公式の説明を試みる。図 2 の initial

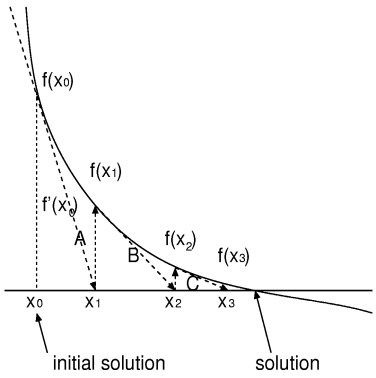


図 2: ニュートン法

solution と書いた x_0は適当に与えた初期値である。最終的に到達すべき解は $f(x)=0$ なので solution と書いた点である。まず初期値で A とマークした 1 次方程式を求める。

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0) \tag{3-2}$$

x_1の位置の y はゼロなので

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3-3}$$

である。しかし $f(x_1)$ はゼロでないので同じように計算を繰り返す。B の 1 次方程式から x_2を求めれば

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{3-4}$$

である。一般的に書けば

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3-5}$$

である。上式を繰り返し計算すれば $f(x_{n+1})$ はゼロに近づき解を得ることができる。

```
001 #include <stdio.h>
002 #include <math.h>
003
004 double f(double x);
005 double dfdx(double x);
006
007 void main(void) {
```

```
008   double x=10,xd,ep;                    初期値を定める
009   const double EP=1.e-6;                収束条件を定める
010   do {
011     xd=x-f(x)/dfdx(x);                  ニュートン法の式
012     ep=fabs(xd-x);                      誤差の計算
013     printf("x=%e ep=%e\n",x,ep);        計算の途中経過の表示
014     x =xd;                              x の値の更新
015   }while(ep>EP);                        収束条件
016   printf("x=%e\n",x);                   計算結果に表示
017 }
018
019 double f(double x) {                    計算する関数
020   return x*x-4*x+4;
021 }
022
023 double dfdx(double x) {                 計算する関数の微分
024   return 2*x-4;
025 }
```

問題

1. 上の例題を打ち込み実行させせよ。
2. 次式の４次方程式に対して適当な初期値、適当な計算精度の元に２つの実数解をニュートン法を使って見つけよ。

$$x^4 - 7x^3 - 16x^2 - 17x - 9 = 0 \tag{3-6}$$

4　オイラー法、Euler Method

微分方程式を数値的に解く方法でもっとも簡単な方法がオイラー法である。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4-1}$$

を解くときまず左辺を離散化する。

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) \tag{4-2}$$

ここで $h = x_{n+1} - x_n$である。結局、式 (4-2) は

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{4-3}$$

となる。これがオイラー法の式である。

たとえば

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{4-4}$$

を解くのであれば

$$y_{n+1} = y_n + hy_n \tag{4-5}$$

であることは容易に分かる。ちなみに式 (4-4) の解析解は

$$y(x) = e^x \tag{4-6}$$

である。この例題の場合は解析解があるの数値解と解析解と比較できる。一般にオイラー法は精度が悪く次の章のルンゲ・クッタ法が使われることが多い。

```
/***********************************************
 *         Euler Method                        *
 ***********************************************/
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double f(double x,double y);

void main(void) {
  const int N=21;                                  分割数
  const double xmin=0, xmax=2;                     xmin から xmax までの範囲で解く
  double h=(xmax-xmin)/(double)(N-1),x=xmin,y=1;
  FILE *fp;
  fp=fopen("euler.dat","w");
  do {
    x=x+h;
    y=y+h*f(x,y);                                  オイラー法
    printf("x=%e y=%e exp(x)=%e\n",x,y,exp(x));    画面に出力
    fprintf(fp,"%e %e %e\n",x,y,exp(x));           ファイルに出力
```

```
  }while(x<xmax);
  fclose(fp);
}

double f(double x,double y) {
  return y;
}
```

問題

1. 上の例題を打ち込み実行させせよ。分割数 N を変化させ計算精度を観察せよ。
2. 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + x(y+1) = 0 \tag{4-7}$$

を $y(0) = 0$ の条件のもとにオイラー法を使って数値解を求めよ。ちなみに解析解は

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \tag{4-8}$$

である。解析解との誤差も調査せよ。

5　ルンゲ・クッタ法、Runge-Kutta Method

微分方程式を解く高精度の数値解法がルンゲ・クッタ法である。微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{5-1}$$

をとくルンゲ・クッタ法の式は

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) && (5\text{-}2)\\
k_1 &= hf(x_n, y_n) && (5\text{-}3)\\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) && (5\text{-}4)\\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) && (5\text{-}5)\\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) && (5\text{-}6)
\end{aligned}$$

である。今、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{5-7}$$

を解くのであれば

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) && (5\text{-}8)\\
k_1 &= hy_n && (5\text{-}9)\\
k_2 &= h\left(y_n + \frac{k_1}{2}\right) && (5\text{-}10)\\
k_3 &= h\left(y_n + \frac{k_2}{2}\right) && (5\text{-}11)\\
k_4 &= h(y_n + k_3) && (5\text{-}12)
\end{aligned}$$

である。この計算を実際に行って解析解 $y(x) = e^x$ やオイラー法の結果と比較してみよ。

問題

1. オイラー法のプログラムを参考にルンゲ・クッタ法のプログラムを完成せよ。解く常微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{5-13}$$

で境界条件は $y(0) = 1$ である。

2. 上の問題で解析解とオイラー法とルンゲ・クッタ法の解をグラフを書いて比較せよ。

6　高階常微分方程式とルンゲ・クッタ法

前章では１階の常微分方程式をルンゲ・クッタ法で解いたが本章では高階の微分方程式を解く。まず例題として２階常微分方程式を強制振動の場合について考える。その方程式は

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ky=ma\omega^2\sin\omega t \tag{6-1}$$

である。ここで m は質量、c は減衰率、k はバネ定数、a は強制振動の振幅、ωは強制振動の振動数である。例えば $m=1,\ c=0,\ k=4,\ a=1,\ \omega=2$ の場合を考える。これは力学的には系の固有周期と強制外力の周期が一致した場合であるがその解析解は $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$ という初期条件の下で

$$y(t)=-t\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t \tag{6-2}$$

である。

さてルンゲクッタ法は基本的に１階の常微分方程式を解くものであるので上記の２階常微分方程式を１階にしなければならない。それは次のようになることが簡単に分かるであろう。

$$\frac{dy}{dt} = y_1 \tag{6-3}$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{c}{m}y_1-\frac{k}{m}y+a\omega^2\sin\omega t \tag{6-4}$$
$$y(0) = 0 \tag{6-5}$$
$$y_1(0) = 0 \tag{6-6}$$

更に $m=1,c=0,k=4,a=1,\omega=2$ とすれば

$$\frac{dy}{dt} = y_1 \tag{6-7}$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -4y+4\sin 2t \tag{6-8}$$
$$y(0) = 0 \tag{6-9}$$
$$y_1(0) = 0 \tag{6-10}$$

となる。

問題

1. 式 (6-7)(6-8)(6-9)(6-10) の常微分方程式をルンゲ・クッタ法でとき解析解と比較しこの誤差も書け。ただし時間は $0<t<20$ の範囲で計算せよ。
2. 平板上の層流境界層の速度分布を表すブラジウスの解を計算せよ。

$$f(\eta)f''(\eta)+2f'''(\eta) = 0 \tag{6-11}$$
$$f(0) = 0 \tag{6-12}$$
$$f'(0) = 0 \tag{6-13}$$
$$f''(0) = 0.332 \tag{6-14}$$

上記方程式は解析解が求まらない非線形方程式である。(級数解はある。) このような非線形常微分方程式もルンゲ・クッタ法を用いれば数値的に解くことができる。主流方向の流速は f'であるのでその値を表示せよ。ただし $0<\eta<7$ の範囲で計算せよ。

7 mathematica 入門

前章までは C 言語を使って数値計算を行ってきた。本章では前章までに学習した内容を mathematica を使えば簡単に実行できることを示すためまずは mathematica の基礎を学習する。

mathematica は数式処理システムと呼ばれるもので C 言語のような低級な計算機言語ではない。C 言語に代表される従来の計算機言語は最終的には数値計算を行うが、数式処理システムの最大の特長は人間が数学をするように文字のまま式変形したり、解いたりできることである。こんな式や方程式を解けと言う問題ならば、小学生の問題は言うに及ばず、高校数学、大学数学、大学院数学もたちどころに解く強力なものである。まず数式処理システムの代表格の mathematica について少しずつ学習していく。まず電卓程度のこともできることを示す。

$$\begin{aligned} In[n] &:= \quad (2+(3-4)*6)/2 \\ Out[n] &:= \quad -2 \end{aligned} \tag{7-1}$$

単純な変数も扱える。

$$\begin{aligned} In[n] &:= \quad a=1 \\ Out[n] &:= \quad 1 \\ In[n] &:= \quad b=3 \\ Out[n] &:= \quad 3 \\ In[n] &:= \quad a-b \\ Out[n] &:= \quad -2 \end{aligned} \tag{7-2}$$

分数は分数のまま計算ができる。ここからが数式処理システムの特長である。

$$\begin{aligned} In[n] &:= \quad 1/6+1/14 \\ Out[n] &:= \quad \frac{5}{21} \end{aligned} \tag{7-3}$$

また 100 の階乗のような計算も正確に実行できる。

$$\begin{aligned} In[n] &:= \quad 100! \\ Out[n] &:= \quad 93326215443944152681699238856266700 \\ & \quad 49071596826438162146859296389521759999322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400 \\ & \quad 0000000000000000000000 \end{aligned} \tag{7-4}$$

初等関数はもちろん特殊関数の計算にも強い。ここでは初等関数を列挙しておく。

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &\rightarrow \text{Sqrt[x]} \\ \sin x &\rightarrow \text{Sin[x]} \\ \cos x &\rightarrow \text{Cos[x]} \\ \tan x &\rightarrow \text{Tan[x]} \\ \log x &\rightarrow \text{Log[x]} \\ \log_a x &\rightarrow \text{Log[a, x]} \\ e^x &\rightarrow \text{Exp[x]} \end{aligned} \tag{7-5}$$

ついでに定数も定義されているので書いておく。

$$\begin{aligned} \pi &\rightarrow \text{Pi} \\ e &\rightarrow \text{E} \\ \infty &\rightarrow \text{Infinity} \end{aligned} \tag{7-6}$$

問題

mathematica を使って次の演算を行え。

1. $\sqrt{8},\ \tan\frac{\pi}{2},\ \log e$
2. $\sin^2 x + \cos^2 x$ を計算せよ。
3. 上記計算に FullSimplify[] 関数を作用させよ。
4. $\log 0$ を計算せよ。

文字としての数式処理だけでなく数値化もできる。その関数は N[] である。この関数は桁数も指定できる。以下に実際に使ってみる。

$$\begin{aligned} In[n] :=& \quad N[1/6+1/14] \\ Out[n] :=& \quad 0.238095 \\ In[n] :=& \quad N[1/6+1/14, 20] \\ Out[n] :=& \quad 0.23809523809523809524 \end{aligned} \tag{7-7}$$

次に多項式の計算について解説する。２つの多項式を掛け合わせ展開し更に因数分解する。さらに係数を取り出してみる。最初に a, b は前に使ったにでクリアしておく。

$$\begin{aligned} In[n] :=& \quad \mathrm{a} = . \\ In[n] :=& \quad \mathrm{b} = . \\ In[n] :=& \quad \mathrm{f1} = \mathrm{a} * \mathrm{x} + \mathrm{b} \\ Out[n] :=& \quad b + ax \\ In[n] :=& \quad \mathrm{f2} = 3 * \mathrm{x\hat{}2} + 4 * \mathrm{x} + 5 \\ Out[n] :=& \quad 5 + 4x + 3x^2 \\ In[n] :=& \quad \mathrm{f3} = \mathrm{f1} * \mathrm{f2} \\ Out[n] :=& \quad (b + ax)(5 + 4x + 3x^2) \\ In[n] :=& \quad \mathrm{f4} = \mathrm{Expand[f3]} \\ Out[n] :=& \quad 5b + 5ax + 4bx + 4ax^2 + 3bx^2 + 3ax^3 \\ In[n] :=& \quad \mathrm{Factor[f4]} \\ Out[n] :=& \quad (b + ax)(5 + 4x + 3x^2) \\ In[n] :=& \quad \mathrm{Coefficient[f4, x, 2]} \\ Out[n] :=& \quad 4a + 3b \end{aligned} \tag{7-8}$$

問題

mathematica を使って次の演算を行え。

1. 多項式 $(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$ の x^3の係数を求めよ。
2. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ の因数分解を行え。

8 mathematica による微積分

matehmatica は微積分も得意分野である。まず $f(x)$ を定義して微分と不定積分と定積分を行ってみる。

$$\begin{aligned}
In[n] :=& \quad \mathrm{f[x_] := a*x\hat{}2 + b*x + c} \\
In[n] :=& \quad \mathrm{D[f[x], x]} \\
Out[n] :=& \quad b + 2ax \\
In[n] :=& \quad \mathrm{D[f[x], \{x, 2\}]} \\
Out[n] :=& \quad 2a \\
In[n] :=& \quad \mathrm{Integrate[f[x], x]} \\
Out[n] :=& \quad cx + \frac{bx^2}{2} + \frac{ax^3}{3} \\
In[n] :=& \quad \mathrm{Integrate[f[x], \{x, 0, 1\}]} \\
Out[n] :=& \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c
\end{aligned} \tag{8-1}$$

問題

mathematica を使って次の微積分を行え。

1. $f(x) = e^x \sin x$ としたとき $\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ。
2. $\int f(x)dx, \int_0^\pi f(x)dx$ を求めよ。
3. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のとき $\frac{\partial g}{\partial y}$ を求めよ。

9 多項式の解とニュートン法

例えば多項式

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{9-1}$$

を mathematica を使って解析的に解くには

$$\begin{aligned}
In[n] :=& \quad \mathrm{Solve[x\hat{}2 - 5*x + 6 == 0, x]} \\
Out[n] :=& \quad x->2, x->3
\end{aligned} \tag{9-2}$$

と解ける。文字のままでも解ける。

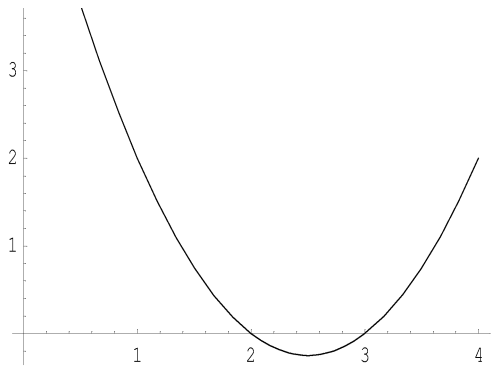
$$\begin{aligned}
In[n] :=& \quad a = . \\
In[n] :=& \quad b = . \\
In[n] :=& \quad \mathrm{Solve[x\hat{}2 - (a + b)*x + a*b == 0, x]} \\
Out[n] :=& \quad \{\{x->a\}, \{x->b\}\}
\end{aligned} \tag{9-3}$$

ニュートン法も mathematica は用意してある。もちろん複数解があるときは初期値により違う解が求まる。

$$\begin{aligned}
In[n] :=& \quad \mathrm{FindRoot[x\hat{}2 - 5*x + 6 == 0, \{x, 0\}]} \\
Out[n] :=& \quad \{x->2.\} \\
In[n] :=& \quad \mathrm{FindRoot[x\hat{}2 - 5*x + 6 == 0, \{x, 10\}]} \\
Out[n] :=& \quad \{x->3.\}
\end{aligned} \tag{9-4}$$

またグラフィックも簡単にできるので解を求めるのみ見通しをつけやすい。

$$In[n] := \quad \mathrm{Plot[x\hat{}2 - 5*x + 6, \{x, 0, 4\}]} \tag{9-5}$$



問題

mathematica を使って次の方程式を解け。

1. 次式をを Solve を使って解いて見よ。

$$f(x) = \sin x + \frac{x}{10} = 0 \tag{9-6}$$

2. 上の関数のグラフを書いて見よ。
3. ニュートン法 (FindRoot) を使って適当な初期値の元に解け。

10　微分方程式とルンゲクッタ法

常微分方程式

$$\frac{df}{dx} = f \tag{10-1}$$

を解析的解くには

$$\begin{aligned} In[n] :=& \quad f[x_] = . \\ In[n] :=& \quad \mathrm{DSolve[f'[x] - f[x] == 0, f[x], x]} \\ Out[n] :=& \quad \{\{f[x] -> e^x C[1]\}\} \end{aligned} \tag{10-2}$$

となり、境界条件を入れて解けば

$$\begin{aligned} In[n] :=& \quad \mathrm{DSolve[\{f'[x] - f[x] == 0, f[0] == 1\}, f[x], x]} \\ Out[n] :=& \quad \{\{f[x] -> e^x\}\} \end{aligned} \tag{10-3}$$

となる。これは解析解であるがルンゲ・クッタ法を使った数値解は次のように補間関数の形で求まる。

$$\begin{aligned} In[n] :=& \quad \mathrm{k = NDSolve[\{f'[x] - f[x] == 0, f[0] == 1\}, f[x], \{x, 0, 1\}]} \\ Out[n] :=& \quad \{\{f[x] -> InterpolatingFunction[\{\{0., 1.\}\}, \text{" <> "}][x]\}\} \\ In[n] :=& \quad \mathrm{g[x_] := Evaluate[f[x]/.k]} \\ In[n] :=& \quad \mathrm{Plot[g[x], \{x, 0, 1\}]} \end{aligned} \tag{10-4}$$

問題

mathematica を使って次の高階常微分方程式を解け。

1. 次の微分方程式を解析的 (Solve) に解き $0 \leq x \leq 2\pi$でグラフを書け。

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \tag{10-5}$$

2. 次の微分方程式をルンゲ・クッタ法 (NDSolve) で解き $0 \leq x \leq 2\pi$でグラフを書け。

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0, \;\; f(0) = 0, \;\; f'(0) = 1 \tag{10-6}$$

3. ブラジウスの方程式

$$f(\eta)f''(\eta) + 2f'''(\eta) = 0, \;\; f(0) = f'(0) = 0, \;\; f''(0) = 0.332 \tag{10-7}$$

をルンゲ・クッタ法で計算し、層流の平板境界層の流速分布 $f'(\eta)$ のグラフを書け。$(0 \leq \eta \leq 6)$

11 極限

ロピタルの定理を使うような極限も取ることができる。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{11-8}$$

を計算するには

$$\begin{aligned} In[n] := &\quad \mathrm{Limit[Sin[x]/x, x-> 0]} \\ Out[n] := &\quad 1 \end{aligned} \tag{11-9}$$

極限の方向も指定できる。

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x \tag{11-10}$$

は極限の方向から 2 つの解がある。

$$\begin{aligned} In[n] := &\quad \mathrm{Limit[Tan[x], x-> Pi/2, Direction-> 1]} \\ Out[n] := &\quad \infty \\ In[n] := &\quad \mathrm{Limit[Tan[x], x-> Pi/2, Direction-> -1]} \\ Out[n] := &\quad -\infty \end{aligned} \tag{11-11}$$

問題

mathematica を使って次の極限を求めよ。

1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \tag{11-12}$$

2.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin A\theta}{\theta} \tag{11-13}$$

3.

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \tag{11-14}$$

のグラフを $0 \leq x \leq 100$ の範囲でグラフを書け。そして $x \to \infty$ の極限を求めよ。

12　グラフィック

数学ではグラフを書くことにより見通し良く考察できるが、mathematica は強力なグラフィック機能を備えている。まずは先に説明した Plot とその 3 次元への拡張である Plot3D を説明する。つぎのようにグラフィックを実行して見よ。

$$\begin{aligned} In[n] := &\quad \mathrm{f[x_] := Sin[x]} \\ In[n] := &\quad \mathrm{Plot[x], \{x, 0, 2 * Pi\}} \\ In[n] := &\quad \mathrm{f[x_, y_] := Exp[-x] * Sin[y]} \\ In[n] := &\quad \mathrm{Plot3D[f[x, y], \{x, 0, 2\}, \{y, 0, 2 * Pi\}]} \end{aligned} \tag{12-15}$$

この関数のコンター（等高線図）を書く。

$$In[n] := \quad \mathrm{ContourPlot[f[x, y], \{x, 0, 1\}, \{y, 0, 2 * Pi\}, Contours- > 20, PlotRange- > \{-1, 1\}]} \tag{12-16}$$

次に螺旋状の関数

$$x = \sin t \tag{12-17}$$

$$y = \cos t \tag{12-18}$$

$$z = t \tag{12-19}$$

のグラフは次のようにして描く。

$$In[n] := \quad \mathrm{ParametricPlot3D[\{Sin[t], Cos[t], t\}, \{t, 0, 6 * Pi\}]} \tag{12-20}$$

問題

mathematica を使って次のグラフを描け。

1. $-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$ の範囲で次のグラフを書け。

$$f(x, y) = e^{-10(x^2+y^2)} \tag{12-21}$$

2. 上の問題の等高線図を描け。
3.

$$x = t \sin t \tag{12-22}$$

$$y = t \cos t \tag{12-23}$$

$$z = t \tag{12-24}$$

のグラフを ParametricPlot3D を使って書け。

13　ベクトル・行列

まずベクトルを定義して足し算、単純な各成分のかけ算、内積、外積を行う。

$$\begin{aligned}
In[n] :=&\quad \mathrm{v1} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}\\
Out[n] :=&\quad \{a, b, c\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{v2} = \{\mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}\}\\
Out[n] :=&\quad \{d, e, f\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{v1} + \mathrm{v2}\\
Out[n] :=&\quad \{a + d, b + e, c + f\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{v1} * \mathrm{v2}\\
Out[n] :=&\quad \{ad, be, cf\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{v1.v2}\\
Out[n] :=&\quad ad + be + cf\\
In[n] :=&\quad \mathrm{Cross[v1, v2]}\\
Out[n] :=&\quad \{-ce + bf, cd - af, -bd + ae\}
\end{aligned} \tag{13-25}$$

次の行列を定義し、行列式、逆行列を計算し、ベクトルを掛ける。

$$\begin{aligned}
In[n] :=&\quad \mathrm{m} = \{\{\mathrm{m11}, \mathrm{m12}\}, \{\mathrm{m21}, \mathrm{m22}\}\}\\
Out[n] :=&\quad \{\{m11, m12\}, \{m21, m22\}\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{xx} = \{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}\}\\
Out[n] :=&\quad \{x1, x2\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{Det[m]}\\
Out[n] :=&\quad -m12m21 + m11m22\\
In[n] :=&\quad \mathrm{Inverse[m]}\\
Out[n] :=&\quad \{\{\frac{m22}{-m12m21+m11m22}, -\frac{m12}{-m12m21+m11m22}\}, \{-\frac{m21}{-m12m21+m11m22}, \frac{m11}{-m12m21+m11m22}\}\}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{m.xx}\\
Out[n] :=&\quad \{m11x1 + m12x2, m21x1 + m22x2\}
\end{aligned} \tag{13-26}$$

問題

次の行列とベクトルの計算を行え。

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{13-27}$$

2. 上の問題の行列部分の行列式と逆行列を求めよ。
3. 上の問題が正則でない場合は行列の一部を変更して実行せよ。

連立１次方程式も次のようにして解ける。

$$\begin{aligned}
In[n] :=&\quad \mathrm{b} = \mathrm{xx}\\
In[n] :=&\quad \mathrm{LinearSolve[m, xx]}
\end{aligned} \tag{13-28}$$

問題

次の連立１次方程式を解け。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 0 & 10 & 0 & 11 \\ 12 & 13 & 0 & 14 & 15 \\ 0 & 16 & 0 & 17 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 60 \\ 94 \\ 169 \\ 190 \end{pmatrix} \tag{13-29}$$

14　総合問題

問題

微分方程式

$$f''(x) - xf(x) = 0 \tag{14-30}$$

について調査を行え。

1. 解析解を求めてみよ。
2. 解に含まれる特殊関数についてグラフを書け。
3. この特殊関数をゼロ周りで 100 項までテーラー展開を行え。また更に調査が必要なら調査を行え。

問題

微分方程式

$$f''(x) + xf'(x) = 0 \tag{14-31}$$

について調査を行え。

1. 解析解を求めてみよ。
2. 解に含まれる特殊関数についてグラフを書け。
3. この特殊関数をゼロ周りで 100 項までテーラー展開を行え。また更に調査が必要なら調査を行え。