

## 軸対称 Görtler 噴流\*

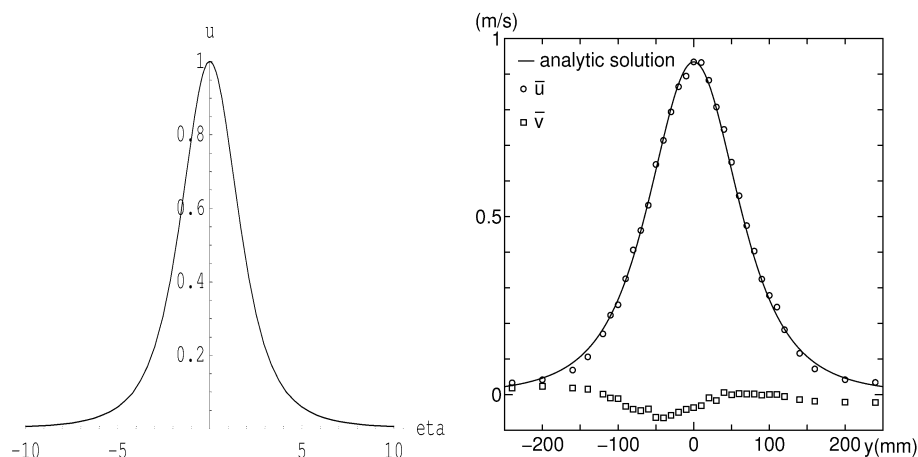


図 1: 軸対称 Görtler 噴流と実験値との比較

軸対称流れの軸方向 ( $x$  方向) の境界層方程式と軸対称の流れ関数は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left( (\nu_t + \nu) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\nu_t + \nu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

である。いま定常の噴流を考えているので時間項と圧力項はゼロである。また  $\nu_t \gg \nu$  である。相似流れを探すために

$$\eta = \frac{r}{x^\alpha}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{x^\beta} \quad (4)$$

としてみる。境界層方程式の各項の計算をする。

$$\frac{\partial \eta}{\partial r} = x^{-\alpha} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\alpha x^{-\alpha-1} r = -\alpha x^{-\alpha-1} x^\alpha \eta = -\alpha x^{-1} \eta \quad (6)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial x^\beta f}{\partial r} = \frac{x^\beta}{x^\alpha \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} f' = x^{\beta-2\alpha} \eta^{-1} f' \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial x^\beta f}{\partial x} = -\frac{\beta x^{\beta-1} f + x^\beta f' \frac{\partial \eta}{\partial x}}{x^\alpha \eta} \\ &= -\beta x^{\beta-\alpha-1} \eta^{-1} f + \alpha x^{\beta-\alpha-1} f' \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (\beta - 2\alpha) x^{\beta-2\alpha-1} \eta^{-1} f' - x^{\beta-2\alpha} \eta^{-2} (-\alpha x^{-1} \eta) f' + x^{\beta-2\alpha} \eta^{-1} (-\alpha x^{-1} \eta) f'' \\ &= (\beta - 2\alpha) x^{\beta-2\alpha-1} \eta^{-1} f' + \alpha x^{\beta-2\alpha-1} \eta^{-1} f' - \alpha x^{\beta-2\alpha-1} f'' \\ &= (\beta - \alpha) x^{\beta-2\alpha-1} \eta^{-1} f' - \alpha x^{\beta-2\alpha-1} f'' \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -x^{\beta-2\alpha} \eta^{-2} x^{-\alpha} f' + x^{\beta-2\alpha} \eta^{-1} f'' x^{-\alpha} = -x^{\beta-3\alpha} \eta^{-2} f' + x^{\beta-3\alpha} \eta^{-1} f'' \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{r \partial r} = -x^{\beta-4\alpha} \eta^{-3} f' + x^{\beta-4\alpha} \eta^{-2} f'' \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\nu_t &= \kappa U_h(x) B_h(x) = \kappa x^{\beta-2\alpha} \eta_h^{-1} f'(\eta_h) x^\alpha \eta_h = \kappa x^{\beta-\alpha} f'(\eta_h) = a x^{\beta-\alpha} & (12) \\
\frac{\partial}{\partial r} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} (a x^{\beta-\alpha} (-x^{\beta-3\alpha} \eta^{-2} f' + x^{\beta-3\alpha} \eta^{-1} f'')) \\
&= a x^{2\beta-4\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} (-\eta^{-2} f' + \eta^{-1} f'') \\
&= a x^{2\beta-5\alpha} (2\eta^{-3} f' - \eta^{-2} f'' - \eta^{-2} f'' + \eta^{-1} f''') \\
&= a x^{2\beta-5\alpha} (2\eta^{-3} f' - 2\eta^{-2} f'' + \eta^{-1} f''') & (13)
\end{aligned}$$

ここで  $U_h$  は中央部の流速の半分の流速でその位置は  $\eta_h$  である。  $B_h$  はその  $\eta_h$  における噴流の幅である。噴流中で運動量の保存則を作れば

$$\begin{aligned}
M &= \rho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u^2 r d\theta dr = 2\pi \rho \int_0^\infty u^2 r dr = 2\pi \rho \int_0^\infty x^{2\beta-4\alpha} \eta^{-2} f'^2 x^\alpha \eta \frac{dr}{d\eta} d\eta \\
&= 2\pi \rho \int_0^\infty x^{2\beta-2\alpha} \eta^{-2} f'^2 dr & (14)
\end{aligned}$$

である。運動量は  $x$  に関係なく保存されるので

$$\alpha = \beta \quad (15)$$

となる。結果、式 (12) は定数となり、軸対称噴流の場合  $\nu_t$  は一定値である。式 (7)-(11) を式 (15) を考慮しながら式 (1) に代入すれば

$$\begin{aligned}
&x^{-\alpha} \eta^{-1} f' (-\alpha x^{-\alpha-1} f'') + (-\alpha x^{-1} \eta^{-1} f + \alpha x^{-1} f') (-x^{-2\alpha} \eta^{-2} f' + x^{-2\alpha} \eta^{-1} f'') \\
&= a x^{-3\alpha} (2\eta^{-3} f' - 2\eta^{-2} f'' + \eta^{-1} f''') + a x^{-3\alpha} (-\eta^{-3} f' + \eta^{-2} f'') & (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underbrace{-\alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} f' f''}_{(*)} + \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-3} f f' - \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-2} f f'' - \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-2} f'^2 + \underbrace{\alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} f' f''}_{(*)} \\
&= a x^{-3\alpha} (\eta^{-3} f' - \eta^{-2} f'' + \eta^{-1} f''') & (17)
\end{aligned}$$

$$\alpha x^{\alpha-1} \eta^{-2} f f' - \alpha x^{\alpha-1} \eta^{-1} f f'' - \alpha x^{\alpha-1} \eta^{-1} f'^2 = a (\eta^{-2} f' - \eta^{-1} f'' + f''') \quad (18)$$

相似解を求めているのだからこの方程式は  $x$  の関数ではない。よって

$$\alpha = 1 \quad (19)$$

である。さらに変形を続ける。

$$(-\eta^{-1} f f')' = a (-\eta^{-1} f' + f'')' \quad (20)$$

$$\left( \frac{f f'}{\eta} \right)' = a \left( \frac{f' - \eta f''}{\eta} \right)' \quad (21)$$

$$f f' = a (f' - \eta f'') + C \quad (22)$$

式 (7) より

$$f'(\eta) = x \eta u \quad (23)$$

であることを使えば境界条件は

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad (24)$$

であることが分かる。よって  $C = 0$  である。また  $f(\eta) = aF(\eta)$  と置けば

$$FF' = F' - \eta F'' \quad (25)$$

を得る。この解は

$$F(\eta) = \frac{0.5\eta^2}{1 + 0.125\eta^2} \quad (26)$$

であることが知られている。このことは式 (26) を式 (25) に代入すれば明らかである。式 (7) より流速は

$$u = x^{-1} \frac{f'(\eta)}{\eta} \quad (27)$$

となり一応の解を得る。次に噴流中央部 ( $y = 0$ ) の最大流速 ( $U_0$ ) と流速は半分 ( $U_h = U_0/2$ ) になる位置 ( $y_h$ ) により流速分布を実軸  $y$  で記述する。まず式 (26) の微分を求めておく。

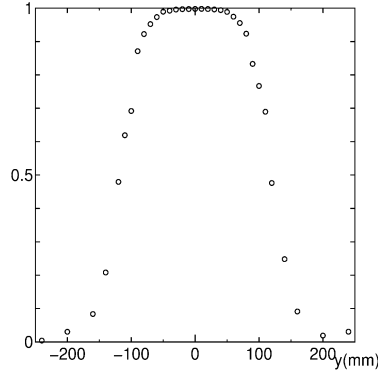


図 2: 実験から求めた軸対称噴流の間欠件数

$$F'(\eta) = \frac{\eta}{(1 + 0.125\eta^2)^2} \quad (28)$$

$$F''(\eta) = \frac{1 - 0.375\eta^2}{(1 + 0.125\eta^2)^3} \quad (29)$$

噴流中央部の流速は式 (27) より

$$U_0 = x^{-1} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{aF'(\eta)}{\eta} = x^{-1} \lim_{\eta \rightarrow 0} aF''(\eta) = ax^{-1} \quad (30)$$

である。同様に流速は半分になる場所でも

$$U_h = x^{-1} \frac{aF'(\eta_h)}{\eta_h} = U_0 \frac{F'(\eta_h)}{\eta_h} = U_0 \frac{1}{(1 + 0.125\eta_h^2)^2} \quad (31)$$

$$(1 + 0.125\eta_h^2)^2 = \frac{U_0}{U_h} = 2 \quad (32)$$

$$1 + \frac{1}{8}\eta_h^2 = \sqrt{2} \quad (33)$$

$$\frac{y_h^2}{x^2} = 8(\sqrt{2} - 1) \quad (34)$$

となる。改めて式 (27) から噴流の流速をもとめる。

$$u = x^{-1} \frac{aF'(\eta)}{\eta} = U_0 \frac{F'(\eta)}{\eta} = \frac{U_0}{(1 + \frac{1}{8}\eta^2)^2} = \frac{U_0}{(1 + \frac{1}{8} \frac{y^2}{x^2})^2} = \frac{U_0}{(1 + (\sqrt{2} - 1) \frac{y^2}{y_h^2})^2} \quad (35)$$

この式と実験値を併せて書いたものが図1である。この図から分かるように噴流中心では実験値とあっているが周辺部では若干違っている。これは2次元、軸対称噴流によらず Görtler 噴流の特質である。その理由としては $\nu_t$ が $x, y$ によらず定数であるが実際の流れでは噴流周辺部では乱流の中に層流が入り込み実質 $\nu_t$ の値が下がるためである。流れが乱流である時間の割合を間欠係数 (inttermittency factor) と呼び $\gamma$ で表せば

$$\nu_t = \gamma \nu_{tc} \quad (36)$$

となる。ここで $\nu_{tc}$ は層流になることがない噴流中心部の渦動粘性係数である。このように $\nu_t$ を修正する必要がある。図2は著者が噴流の間欠係数を計測した物である。図1と同じ実験であることを考え見比べていただきたい。

これとは逆に2次元でも軸対称でも Tollmien 噴流では噴流の中心部で実験値と一致せず周辺部で一致することが知られている。これは $\nu_t$ が平均流速の勾配に比例しているためである。すなわち噴流周辺部では勾配が小さく $\nu_t$ もまた小さくなり間欠係数に似た効果がある。また噴流に中心部では平均流速の傾きがゼロで $\nu_t$ も小さくなり実現象と異なるためである。

## 軸対称 Tollmien 噴流\*

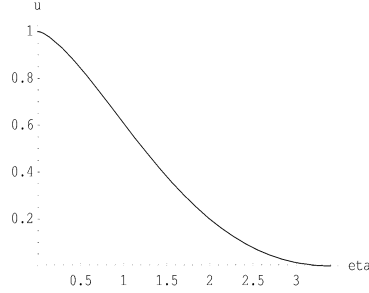


図 3: 軸対称 Tollmien 噴流

前節の式 (11) までと式 (15) は式の展開は共通であるのでまず前節を読んでいただきたい。Tollmien 噴流の場合も 2 次元と同じように

$$\begin{aligned}\nu_t &= -l^2 \frac{\partial u}{\partial r} = -K^2 r_h^2 (-x^{-2\alpha} \eta^{-2} f' + x^{-2\alpha} \eta^{-1} f'') = -K^2 x^{2\alpha} \eta_h^2 (-x^{-2\alpha} \eta^{-2} f' + x^{-2\alpha} \eta^{-1} f'') \\ &= -C(-\eta^{-2} f' + \eta^{-1} f'')\end{aligned}\quad (37)$$

を得る。 $\nu_t$  は  $\eta$  のみの関数であることがわかる。次に式 (1) の左辺を式 (15) を考慮しながら計算する。

$$\begin{aligned}u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= x^{-\alpha} \eta^{-1} f' (-\alpha x^{-\alpha-1} f'') + (-\alpha x^{-1} \eta^{-1} f + \alpha x^{-1} f') (-x^{-2\alpha} \eta^{-2} f' + x^{-2\alpha} \eta^{-1} f'') \\ &= -\alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} f' f'' + \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-3} f f' - \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-2} f f'' - \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-2} f'^2 \\ &\quad + \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} f' f'' \\ &= \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} (\eta^{-2} f f' - \eta^{-1} f f'' - \eta^{-1} f'^2) \\ &= \alpha x^{-2\alpha-1} \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (-\eta^{-1} f f')\end{aligned}\quad (38)$$

更に右辺を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \left( \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\nu_t}{r} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= x^{-\alpha} \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (x^\alpha \eta (-C(-\eta^{-2} f' + \eta^{-1} f'')) (-x^{-2\alpha} \eta^{-2} f' + x^{-2\alpha} \eta^{-1} f'')) \\ &= x^{-2\alpha} \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial r} (\eta (-C(-\eta^{-2} f' + \eta^{-1} f''))^2) \\ &= x^{-3\alpha} \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^{-1} (-C(-\eta^{-1} f' + f''))^2)\end{aligned}\quad (39)$$

式 (38) と式 (39) が相似解であるためにはいかなる  $x$  でも成立しなければならないので  $\alpha = 1$  である。微分の中身が積分定数をつけて等しいとすれば

$$C(-\eta^{-1} f' + f'')^2 = f f' + C_1 \quad (40)$$

となる。噴流の中心で  $f(0) = 0$  であり  $\frac{\partial u}{\partial r}(0) = x^{-2} \eta^{-1} (-\eta^{-1} f' + f'') = 0$  であるので  $C_1 = 0$  である。 $F(\eta) = C f(\eta)$  と置けば最終的に

$$(F'' - \eta^{-1} F')^2 = F F' \quad (41)$$

を得る。mathematica による描画の手順は以下のとおりである。 $\eta = 0$  で特別な取り扱いが必要である。

```
In[1]:=a = NDSolve[{f0'[y] == f1[y],
  f1'[y] == If[y == 0, 1, f1[y]/y] - (f0[y]*f1[y])^(1/2), f0[0] == 0,
  f1[0] == 0}, {f0[y], f1[y]}, {y, 0, 3.4}]
Out[1]:={{f0[y] -> InterpolatingFunction[{{0., 3.4}}, "<>"][y],
  f1[y] -> InterpolatingFunction[{{0., 3.4}}, "<>"][y]}}
In[2]:=g[y_] := Evaluate[f1[y] /. a]
In[3]:=Plot[If[y == 0, 1, g[y]/y], {y, 0, 3.4}, AxesLabel -> {"eta", "u"}]
```