関西造船協会論文 237 号 (2002.3) 追加資料
題名:非定常境界層の非線形効果による摩擦抵抗の低減
2002 年 1 月 16 日

リンの理論と伸縮する平板上の非定常境界層

防衛大学校 機械システム工学科
藪下和樹
yabu@nda.ac.jp

リンの理論

以下の境界層方程式が基礎方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

平板の境界層の外部流れが高周波数で振動するとき解析解が見つかっている。この理論をリンの理論 [3][2][1] という。以下リンの理論を紹介する。

境界層外部では粘性の影響がなく理想流体となっている。また境界層は薄いので y 方向の流速もない ($V=0$)。外部流の流速を U とすればその支配方程式は式 (1) より

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4}$$

である。ここで式 (2) より境界層の内部と外部の流速が等しいことが分かるので、式 (4) の圧力 P は境界層内部の方程式である式 (1) の圧力 p と同じである。よって $\frac{\partial p}{\partial x}$ に $\frac{\partial P}{\partial x}$ を代入すれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5}$$

である。ここで振動境界層内の流速をその時間平均と変動分に分離する。

$$u = \overline{u}+u' \tag{6}$$

$$v = \overline{v}+v' \tag{7}$$

$$U = \overline{U}+U' \tag{8}$$

これらを式 (5) に代入すれば

$$\begin{aligned}&\underbrace{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}}_{(0)}+\frac{\partial u'}{\partial t}+(\overline{u}+u')\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x}+(\overline{v}+v')\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial y}\\ =\ &\underbrace{\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}}_{(0)}+\frac{\partial U'}{\partial t}+(\overline{U}+U')\frac{\partial(\overline{U}+U')}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

である。ここで時間平均の時間微分はゼロであることを使った。さらに演算を進めれば

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}\\
=\ &\frac{\partial U'}{\partial t}+\overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+U'\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+\overline{U}\frac{\partial U'}{\partial x}+U'\frac{\partial U'}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

である。上式の時間平均をとれば

$$
\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}=\overline{U}\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+\underbrace{\overline{U'\frac{\partial U'}{\partial x}}-\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}-\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(*)}+\nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}
\tag{11}
$$

である。$(*)$ の項が定常の境界層と違う項であり、これらの項を擬似圧力勾配と呼ばれこの分ブラジウスの解から平均流速が変化することがある。式 (10) から式 (11) を引けば

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\partial u'}{\partial t}}_{(a)}+u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\underbrace{v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}}_{(*)}+\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\underbrace{\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}}_{(*)}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+\underbrace{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}_{(*)}-\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}-\underbrace{\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(*)}\\
=\ &\underbrace{\frac{\partial U'}{\partial t}}_{(b)}+U'\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}+\overline{U}\frac{\partial U'}{\partial x}+U'\frac{\partial U'}{\partial x}-\overline{U'\frac{\partial U'}{\partial x}}+\underbrace{\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}}_{(c)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

である。ここで (a)(b)(c) の 3 項だけが大きく後の項が無視できれば解析的に解くことができることが数学的に知られている。そこで時間項を大きくするために高周波数の仮定を立てる。

$$
s=\omega t
\tag{13}
$$

ここでωは 1 よりはるかに大きなオーダー関数である。高周波数のとき通常の境界層より薄い非定常境界層が境界層の底部に生じることが予想されるので、その非定常境界層を拡大してみるため

$$
\eta=\frac{y}{\delta}
\tag{14}
$$

とする。ここでオーダー関数δは非定常境界層の厚さを表す。式 (13)(14) を式 (12) の (a)(b)(c) の項に代入すれば

$$
(a)\ =\ \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial u'}{\partial s}=\omega\frac{\partial u'}{\partial s}
\tag{15}
$$

$$
(b)\ =\ \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial U'}{\partial s}=\omega\frac{\partial U'}{\partial s}
\tag{16}
$$

$$
(c)\ =\ \nu\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial \eta}\right)=\nu\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2}
\tag{17}
$$

である。式 (15)(16)(17) のオーダーがつりあうための条件は

$$
\omega=\frac{1}{\delta^2}
\tag{18}
$$

である。式 (12) の x 方向の微分の項のオーダーは 1 であるのでωのオーダーより小さい。また式 (12) の (*) で表した y 方向の微分は

$$
\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial \eta}=\sqrt{\omega}\frac{\partial}{\partial \eta}
\tag{19}
$$

でオーダーは$\sqrt{\omega}$である。よってωが 1 より大きいオーダーであるので自動的に (a)(b)(c) のみの項が残ることになる。さて式 (12) のω の大きさの項のみ抜き取れば

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial U'}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \tag{20}$$

である。以後上記微分方程式を解くことを試みる。まず外部流の振動を

$$U' = \hat{U} \cos \omega t \tag{21}$$

とする場合について考える。外部の振動流の角振動数がωなので内部の流体の角振動数もωであるという物理的考察にたてばこの微分方程式は比較的簡単に解ける。

$$u' = f(y) \cos \omega t + g(y) \sin \omega t \tag{22}$$

この式を式 (20) に代入すれば

$$\omega g(y) \cos \omega t - \omega f(y) \sin \omega t = -\omega \hat{U} \sin \omega t + \nu \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \sin \omega t + \nu \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \cos \omega t \tag{23}$$

である。sin cos で整理すれば

$$\left(\omega g(y) - \nu \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} \right) \cos \omega t = \left(\omega f(y) - \omega \hat{U} + \nu \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} \right) \sin \omega t \tag{24}$$

である。この式がいつでも成立するためには

$$\omega g(y) - \nu \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2} = 0 \tag{25}$$

$$\omega f(y) - \omega \hat{U} + \nu \frac{\partial^2 g(y)}{\partial y^2} = 0 \tag{26}$$

であればよい。式 (26) を 2 階微分し式 (25) に代入すれば

$$\omega g(y) + \frac{\nu^2}{\omega} \frac{d^4 g(y)}{dy^4} = 0 \tag{27}$$

である。ここで $4k^4 = \frac{\omega^2}{\nu^2}$ とおけば

$$\frac{d^4 g(y)}{dy^4} + 4k^4 g(y) = 0 \tag{28}$$

なる 4 階の常微分方程式が得られる。特性方程式は$\lambda^4 + 4k^4 = 0$ を解いていく。

$$\lambda^4 = -4k^4 \tag{29}$$

$$\lambda^2 = \pm 2ik^2 \tag{30}$$

$$\lambda = \begin{cases} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} k & = \pm (1+i) k & = \begin{cases} (1+i)k \\ (-1-i)k \end{cases} \\ \pm i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} k & = \pm (-1+i) k & = \begin{cases} (-1+i)k \\ (1-i)k \end{cases} \end{cases} \tag{31}$$

ここで

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{32}$$

の関係を使った。式 (31) より式 (28) の解は

$$g(y) = C_1 e^{ky}\cos ky + C_2 e^{ky}\sin ky + C_3 e^{-ky}\cos ky + C_4 e^{-ky}\sin ky \tag{33}$$

である。平板上では流速はゼロなので $g(0) = 0$ 故に $C_1 = C_3 = 0$ である。また $g(\infty) \neq \infty$ なので $C_2 = 0$ である。よって

$$g(y) = C_4 e^{-ky}\sin ky \tag{34}$$

である。次に式 (26) から $f(y)$ が求まる。

$$\begin{aligned}
f(y) &= \hat{U} - \frac{\nu}{\omega}\frac{d^2 g(y)}{dy^2} \\
&= \hat{U} - \frac{\nu}{\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(-C_4 k e^{-ky}\sin ky + C_4 k e^{-ky}\cos ky\right) \\
&= \hat{U} - \frac{\nu}{\omega}\left(C_4 k^2 e^{-ky}\sin ky - C_4 k^2 e^{-ky}\cos ky - C_4 k^2 e^{-ky}\cos ky - C_4 k^2 e^{-ky}\sin ky\right) \\
&= \hat{U} + 2\frac{\nu}{\omega} C_4 k^2 e^{-ky}\cos ky \\
&= \hat{U} + C_4 e^{-ky}\cos ky
\end{aligned} \tag{35}$$

ここで最後の式には k の定義 $k^2 = \frac{\omega}{2\nu}$ を使った。$f(y), g(y)$ が求まったので式 (22) に代入して

$$\begin{aligned}
u' &= f(y)\cos\omega t + g(y)\sin\omega t \\
&= \left(\hat{U} + C_4 e^{-ky}\cos ky\right)\cos\omega t + C_4 e^{-ky}\sin ky \sin\omega t \\
&= \hat{U}\cos\omega t + C_4 e^{-ky}\left(\cos ky\cos\omega t + \sin ky\sin\omega t\right) \\
&= \hat{U}\cos\omega t + C_4 e^{-ky}\cos(\omega t - ky)
\end{aligned} \tag{36}$$

最後に $u'(0) = 0$ であるためには $C_4 = -\hat{U}$ である。よって外部流が高周波数で振動する平板上の解の変動分は

$$u' = \hat{U}\cos\omega t - \hat{U} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \tag{37}$$

となる。mathematica でグラフを書く手順を次に示す。

```
In[1]:=Om = 20*Pi
In[2]:=Nu = 10^{-6}
In[3]:=a = Sqrt[Om/2/Nu]
In[4]:=F[t_, y_] := 0.1*Cos[Om*t] - 0.1*Exp[-a*y]*Cos[Om*t - a*y]
In[5]:=Plot[Evaluate[Table[F[t, y], {t, 0, 0.1, 0.005}]], {y, 0, 0.002},
 AxesLabel -> {y, u'}]
```

図 1 より外部流の振動に対して内部の振動は位相が遅れている。また非定常境界層の外端部で外部流の振動振幅より大きいオーバーシュートがおきているようである。このオーバーシュート量は式 (37) から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
u' &= \hat{U}\left(\cos\omega t - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\left(\cos\omega t\cos\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y + \sin\omega t\sin\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\right) \\
&= \hat{U}\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\cos\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\cos\omega t + \hat{U} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\sin\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\sin\omega t
\end{aligned}$$

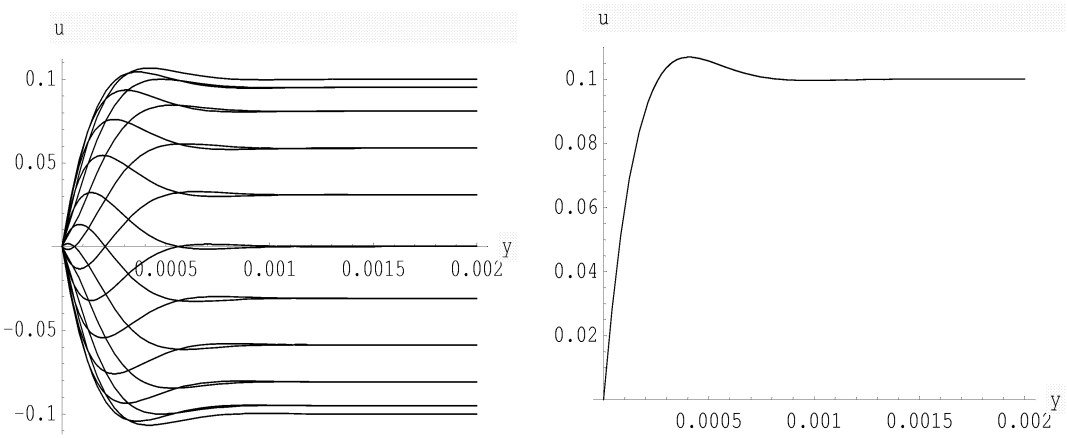

図 1: リンの振動境界層

$$
\begin{aligned}
&= \hat{U}\sqrt{\left(1-e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\cos\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)^2+\left(e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\sin\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)^2}\sin(\omega t+\varepsilon) \\
&= \hat{U}\sqrt{1-2e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\cos\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y+e^{-2\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}}\sin(\omega t+\varepsilon) \qquad (38)\\
|u'| &= \hat{U}\sqrt{1-2e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}\cos\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y+e^{-2\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

mathematica でオーバーシュートをグラフで書けば以下の通りである。(図 1)

```
In[6]:=Plot[0.1*Sqrt[1 - 2*Exp[-a*y]*Cos[a*y] + Exp[-2*a*y]], {y, 0, 0.002},
  PlotRange -> {0, 0.11}, AxesLabel -> {y, "|u|"}]
```

この図より通常の境界層の厚さより薄い非定常境界層がよく見える。またそのオーバーシュートも観察できる。

一様流中の平板が前後振動・伸縮する場合の境界層

前節では平板上の外部流れが高周波数で振動する場合の振動境界層について解説した。本章では非圧縮性流体中に流れに対して平行に置かれた厚さゼロの平板がその前端は固定され、後端がゴムのように流れの主流方向に伸び縮みするとき、その平板上の非定常境界層について考察する。また平板の摩擦抵抗に変化について考察する。

非圧縮性流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を境界層の厚さ程度に拡大してみると境界層方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_x+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (40)\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \qquad (41)\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \qquad (42)
\end{aligned}
$$

ここで x は流れの主流方向の座標で y は境界層の厚さ方向の座標である。

境界層の外部の流れは一様流であり圧力はゼロである。また境界層の内部でその厚さ方向に圧力勾配がゼロであるので (式 (41)) 境界層に内部でも圧力はゼロである。よって式 (40)-(42) は

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_x + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{44}$$

である。流速を時間平均と変動分に分ければ

$$u = \overline{u} + u' \tag{45}$$

$$v = \overline{v} + v' \tag{46}$$

と書き表せる。これを式 (43) に代入すれば

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}}_{(0)} + \underbrace{\frac{\partial u'}{\partial t}}_{(a)} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \underbrace{\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}}_{(a)} + \underbrace{u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}}_{(a)} + u'\frac{\partial u'}{\partial x}$$
$$+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \underbrace{\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}}_{(a)} + \underbrace{v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}}_{(a)} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}}\right)_{(a)} \tag{47}$$

となる。ここで (0) とマークした項は時間平均の時間微分でありゼロである。式 (47) の時間平均をとれば (a) の項はゼロである。

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \underbrace{-\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(*)} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \tag{48}$$

ここで (*) でマークした項は定常の N-S 方程式に新たに加わった項でこれらの項の影響で平均流も定常流れとは異なってくる。式 (47) から式 (48) を引けば

$$\underbrace{\frac{\partial u'}{\partial t}}_{(b)} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + u'\frac{\partial u'}{\partial x}$$
$$+\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y} + v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + v'\frac{\partial u'}{\partial y} = \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} + \nu\underbrace{\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}}_{(b)} \tag{49}$$

である。前節と同じように高周波数で振動するとすれば式 (49) の (b) でマークされた項のみが残る。詳しくは前節を読んでいただきたい。結局、式 (20) に相当する方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \tag{50}$$

を得る。この偏微分方程式の境界条件は $y = \infty$ の時 $u'(x, \infty, t) = 0$ であり、$y = 0$ すなわち平板上では

$$u'(x, 0, y) = U(x)\cos\omega t \tag{51}$$

とする。上式が平板の伸縮を表す式である。前節同様解析解を求めれば

$$u'(x, y, t) = U(x)e^{-ky}\cos(\omega t - ky) \tag{52}$$

を得る。ここで $k=\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$ である。次に連続の式から v' をもとめる。連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{53}$$

である。式 (45) と式 (46) を代入すれば

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{54}$$

である。いま $\overline{u}^*=0$ であるような運動を仮定すれば上式をさらに時間平均をとり

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v}}{\partial y}=0 \tag{55}$$

である。式 (54) から式 (55) を引けば

$$\frac{\partial \hat{u}'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{56}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'}{\partial y} &= -\frac{\partial u'}{\partial x} \\
&= -\frac{dU}{dx}e^{-ky}\cos(\omega t-ky) && (57)\\
v' &= -\int_0^y \frac{dU}{dx}e^{-ky}\cos(\omega t-ky)dy \\
&= -\int_0^y \frac{dU}{dx}e^{-ky}(\cos\omega t\cos ky+\sin ky\sin\omega t)dy \\
&= -\frac{dU}{dx}\cos\omega t\int_0^y e^{-ky}\cos kydy-\frac{dU}{dx}\sin\omega t\int_0^y e^{-ky}\sin kydy \\
&= -\frac{dU}{dx}\cos\omega t\frac{1}{2k}(1+e^{-ky}\sin ky-e^{-ky}\cos ky) \\
&\quad -\frac{dU}{dx}\sin\omega t\frac{1}{2k}(1-e^{-ky}\sin ky-e^{-ky}\cos ky) \\
&= -\frac{dU}{dx}\frac{1}{2k}(\cos\omega t+\sin\omega t+e^{-ky}(\cos\omega t\sin ky-\cos\omega t\cos ky \\
&\quad -\sin\omega t\sin ky-\sin\omega t\cos ky)) \\
&= -\frac{dU}{dx}\frac{1}{2k}(\cos\omega t+\sin\omega t-e^{-ky}(\cos(\omega t-ky)+\sin(\omega t-ky))) && (58)
\end{aligned}$$

である。ここで次の関係を使った。

$$\int_0^y e^{-ky}\cos kydy = \frac{1}{2k}(1+e^{-ky}\sin ky-e^{-ky}\cos ky) \tag{59}$$

$$\int_0^y e^{-ky}\sin kydy = \frac{1}{2k}(1-e^{-ky}\sin ky-e^{-ky}\cos ky) \tag{60}$$

さて擬似圧力勾配を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^*}{\partial x} &= \overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} \\
&= -\frac{1}{2}U\frac{dU}{dx}(-1-e^{-2ky}+2e^{-ky}\cos ky)+\frac{1}{2}U\frac{dU}{dx}e^{-ky}\sin ky \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}U\frac{dU}{dx}}_{F_1(x)}\underbrace{(e^{-2ky}+e^{-ky}\sin ky)}_{F_2(y)} && (61)
\end{aligned}$$

上式の $F_1(x)$ は x のみの関数である。また、$F_2(y)$ は y のみの関数である。図 2 にこの $F_2(y)$ を図示する。もし $F_1(x)$ が正の場合を考えれば $F_2(y)$ はほとんどの y で正であり擬似圧力勾配は正となり流れを押し戻そうとして平板表面の剪断応力は減少し粘性抵抗は減少する。このような流れはたとえば

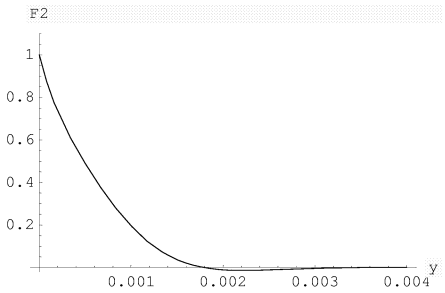

図 2: 擬似圧力勾配 ($\omega = 20\pi, \nu = 10^{-5}$)

$$u^* = U_0 x_0 \cos\omega t \tag{62}$$

のように前端が固定され後端がゴムのように伸び縮みする平板である。逆に後端が固定され前端が伸び縮みする場合粘性抵抗は増加する。ここで x_0は伸縮する平板の時間平均座標であり、U_0は平板後端速度で定数である。このような平板の伸縮は式 (62) を積分すれば簡単に得られる。

$$x = x_0 + \frac{U_0}{\omega} x_0 \sin\omega t \tag{63}$$

また前後端が固定されその間の部分が振動する場合は抵抗の減少と増加がつりあい、動かない平板の抵抗と変わらない。

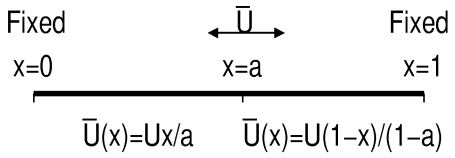

図 3: 両端固定平板

このことを図 3 で示す。$F_2(y)$ は y のみの関数なので計算に含めないで $F_1(x)$ の部分を平板長で積分すれば抵抗増加や低減がないことが理解できる。(式 (64)) このような単純な伸び縮みだけでなくいかなる伸び縮みでも粘性抵抗は理論的には変わらない。

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1}{2}U\frac{dU}{dx}dx + \int_a^1 \frac{1}{2}U\frac{dU}{dx}dx &= \int_0^a \frac{1}{2}\overline{U}\frac{x}{a}\frac{\overline{U}}{a}dx + \int_a^1 \frac{1}{2}\overline{U}\frac{1-x}{1-a}\left(-\frac{\overline{U}}{1-a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{\overline{U}^2}{a^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a - \frac{1}{2}\frac{\overline{U}^2}{(1-a)^2}\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_a^1 = \frac{1}{4}\overline{U}^2 - \frac{1}{4}\overline{U}^2 = 0\end{aligned} \tag{64}$$

以上のことをまとめて解釈すれば抵抗増減や低減を決める $F_1(x)$ の部分の積分は

$$\int_0^1 \frac{1}{2}U(x)\frac{dU(x)}{dx}dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\frac{dU^2(x)}{dx}dx = \frac{1}{4}[U^2(x)]_0^1 = \frac{1}{4}(U^2(1) - U^2(0)) \tag{65}$$

であり、$U(1)=U(0)=0$ すなわち両端固定の場合は抵抗の増減はない。また $U(1)=U(0)$ のように前後端は同じように振動する場合も抵抗の増減はない。この場合に平板が単純に伸縮なしに前後揺する場合が含まれる。また端点の運動が重要でありその間の伸縮の関数は抵抗値には影響を及ぼさない。こうしてみればもっとも抵抗低減する可能性があるのは前端が固定で後端が前後に振動する場合である。

低周波数の場合

ここまで平板が伸縮を含め高周波数で振動した場合の振動境界層について調べてきた。ここでは低周波数の場合について考えてみる。低周波数で振動・伸縮する場合は流速の振動分は平均流速に比べ小さいので式 (45) は

$$u = \overline{u} + \varepsilon u' \tag{66}$$

$$v = \overline{v} + \varepsilon v' \tag{67}$$

と書けるであろう。そうすれば同様な手順で計算し式 (48) は

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \underbrace{-\varepsilon^2\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \varepsilon^2\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(*)} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \tag{68}$$

となり、擬似圧力勾配は摂動論的にはゼロである。よってこの方程式は定常の境界層方程式そのものである。つまり平均流速勾配は定常解と同じであり平板上の摩擦応力も同じで結局定常の場合と同じ抵抗値を持つことになる。

乱流境界層への拡張の可能性

前章同様基礎方程式は

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_x + \hat{u}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{69}$$

である。流速を

$$u = \overline{u} + u' + u'' \tag{70}$$

$$v = \overline{v} + v' + v'' \tag{71}$$

と分解する。ここで$\overline{u}$は流速の時間平均、u'はその変動分、u''は乱流による変動分である。v についても同様である。まず連続の式について考えておく。式 (70)(71) を連続の式に代入すれば

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial y} = 0 \tag{72}$$

である。さらに時間平均をとれば

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \tag{73}$$

である。式 (72) から式 (73) を引けば

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial v''}{\partial y} = 0 \tag{74}$$

で変形すれば

$$\frac{\partial u''}{\partial x}+\frac{\partial v''}{\partial y}=-\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{\partial v'}{\partial y}=0 \tag{75}$$

である。乱流の乱動の拡散が伸縮の流速の変動で書き表せた。

次に境界層方程式について考える。式 (70)(71) を式 (69) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}}_{(0)}+\underbrace{\frac{\partial u'}{\partial t}}_{(a)}+\underbrace{\frac{\partial u''}{\partial t}}_{(a)}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\underbrace{\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}}_{(a)}+\underbrace{\overline{u}\frac{\partial u''}{\partial x}}_{(a)}+\underbrace{u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}}_{(a)}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+u'\frac{\partial u''}{\partial x}\\
&+\underbrace{u''\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}}_{(a)}+u''\frac{\partial u'}{\partial x}+u''\frac{\partial u''}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\underbrace{\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}}_{(a)}+\underbrace{\overline{v}\frac{\partial u''}{\partial y}}_{(a)}\\
&+\underbrace{v'\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}}_{(a)}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+v'\frac{\partial u''}{\partial y}+\underbrace{v''\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}}_{(a)}+v''\frac{\partial u'}{\partial y}+v''\frac{\partial u''}{\partial y}\\
&=\nu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}+\underbrace{\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}}_{(a)}+\underbrace{\frac{\partial^2 u''}{\partial y^2}}_{(a)}\right)
\end{aligned} \tag{76}$$

となる。ここで (0) でマークされた項は時間平均の時間微分でゼロであり、(a) でマークされた項は時間平均をとればゼロになる項である。時間平均をすれば

$$\begin{aligned}
&\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\underbrace{\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}}_{(b)}+\underbrace{\overline{u'\frac{\partial u''}{\partial x}}}_{(c)}+\underbrace{\overline{u''\frac{\partial u'}{\partial x}}}_{(c)}+\underbrace{\overline{u''\frac{\partial u''}{\partial x}}}_{(r)}\\
&+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\underbrace{\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(b)}+\underbrace{\overline{v'\frac{\partial u''}{\partial y}}}_{(c)}+\underbrace{\overline{v''\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(c)}+\underbrace{\overline{v''\frac{\partial u''}{\partial y}}}_{(r)}=\nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{77}$$

となる。(b) でマークした項は付加項で (r) でマークした項はレイノルズ応力がでてくる項で式 (75) を使って次のようにさらに変形でき

$$\begin{aligned}
(r) &= \overline{u''\frac{\partial u''}{\partial x}}+\overline{v''\frac{\partial u''}{\partial y}}\\
&= \overline{\frac{\partial u''u''}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial u''v''}{\partial y}}-\overline{u''\frac{\partial u''}{\partial x}}-\overline{u''\frac{\partial v''}{\partial y}}\\
&= \underbrace{\overline{\frac{\partial u''u''}{\partial x}}}_{(d)}+\underbrace{\overline{\frac{\partial u''v''}{\partial y}}}_{(e)}+\underbrace{\overline{u''\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)}}_{(c)}
\end{aligned} \tag{78}$$

となる。レイノルズ応力$\overline{u''u''}$と$\overline{u''v''}$ の規模が同じでも元々境界層方程式を基礎方程式にしていたので y 方向の微分 (e) が x 方向の微分 (d) より遙かに大きいので (d) の項は無視する。また (c) でマークされた項は１つのダッシュの項と２つのダッシュの項の相関である。平板に伸縮による流速の変動と乱流の変動とに相関が小さいと仮定すれば (c) の項はすべて消えて

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}+\underbrace{\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}}_{(b)}+\underbrace{\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}}_{(b)}=\nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}-\overline{\frac{\partial u''v''}{\partial y}} \tag{79}$$

を得る。最後の項はレイノルズ応力である。(b) の項は付加項でその他の項は乱流境界層の項なので平均流速は乱流境界層に対して付加項の分変化することになり、乱流の場合も層流と同じように摩擦抵抗の低減が期待できる。

参考文献

[1] Schlichting, H. et al., Boundary Layer Theory, Springer, 2000

[2] Telionis, D.P., Unsteady Viscous Flows, Springer, 1981

[3] Lin, C.C., Motion in the Boundary Layer with a rapidly oscillating external flow, Proc. 9th Intern. Congress Appl, Mech. Brussels, Vol.4,pp.155-167, 1957