

物体の三態 - [気体の法則] 物質の三態: 気体 液体 固体

元素中で常温で気体のものは 他は無色

Group	1	2	13	14	15	16	17	18
Period	1	2	3	4	5	6	7	8
Period	2	3	4	5	6	7	8	9

希ガスは
1原子元素、
他は
2原子元素
(共有結合)

固体 液体

分子 (化学結合により原子と原子が結びついた形態)

温度と圧力に依存して、3態が変化する => 熱運動

重要な法則、用語

Boyleの法則、Charles (Gay-Lussac)の法則、Avogadroの法則、Daltonの分圧の法則、気体分子運動論 (Bernoulliの式、Maxwell-Boltzmannの分子速度分布)、Van der Waalsの状態式など

圧力

E. Torricelli 1643年 (35歳) に大気圧を水銀柱の高さで示した。

1 atm = 760 mmHg = 760 Torr

SI単位による定義

$$\text{圧力 } P = \frac{N}{m^2} \text{ Pa}$$

底面積 1 m² の水銀柱 0.76 m の圧力: 水銀の密度 × 体積 × 重力 / 面積

— 最初に水銀の力 (重さ) W を計算 —

$$W [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = 13596 [\text{kg}/\text{m}^3] \times 0.76 [\text{m}] \times 1 [\text{m}^2] \times 9.8066 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] = 101331 [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

底面積 1 m² の水銀柱 0.76 m の圧力 $W = 101331 [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$

気圧は、定義から $1 \text{ atm} = \frac{101331 [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]}{1 [\text{m}^2]} = 101331 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$

SI単位による定義から

圧力: 1 Pa = 1 N/m² = 1 kg·m/s²/m² = 1 kg·m⁻¹·s⁻²

∴ 1 atm = 10.133 × 10⁴ Pa = 101.33 kPa = 1013 hPa

現在の圧力 (1 mmHg) の定義

密度 13.5951 × 10³ kg·m⁻³ の流体の高さ 1 mm の柱が重力加速度 9.80665 m·s⁻² 中で及ぼす圧力

現在の定義から、1 atm = 10.1325 × 10⁴ Pa = 101.325 kPa

ボイル (Boyle) の法則 - 体積と圧力の関係

1660年 (R. Boyle 33歳) 水銀柱を用いた実験

この空気の圧力は H に比例している。体積は h に比例している。

$$P = \frac{H + 73.99}{73.99} [\text{atm}]$$

$$V = h \pi^2 / [\text{cm}^3]$$

圧力 P と体積 V との積は一定になる。 = Boyleの法則

(温度一定の時)

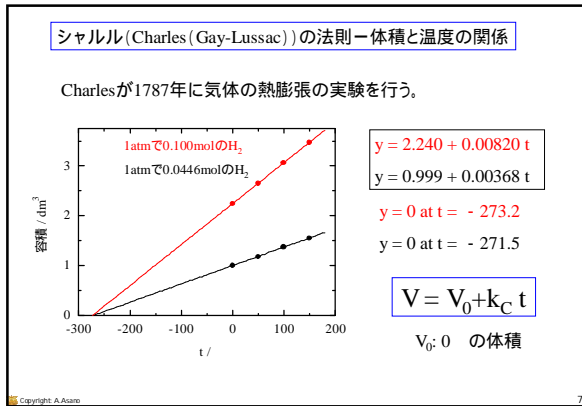
$$PV = k_B$$

1の状態と2の状態の温度が等しい時には、

解答

例題

ポテトチップスの袋を高い山に持って行った時の体積の変化は? ただし温度変化はないものとする。また、最初の体積を 800 ml、圧力を 1.2 atm、山頂の圧力を 0.7 atm とする。



1802年: Gay-Lussac - 圧力・体積と絶対温度の関係

$V = V_0 + k_C t \rightarrow V = V_0 - (V_0/t_0) t$ t_0 : 絶対零度 ()
現代 $t_0 = -273.15$

絶対温度 $T = t - t_0$ とおくと

同様に体積一定で圧力と温度との関係を調べ、

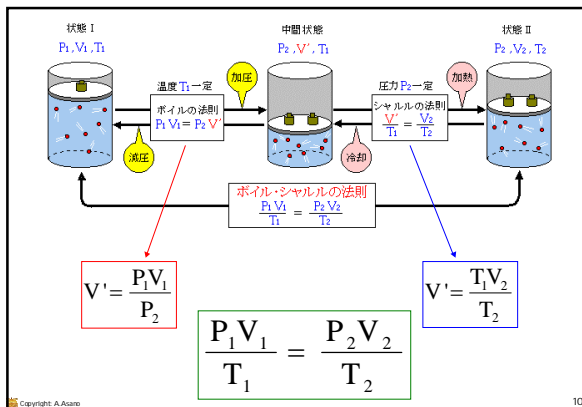
ボイルの法則 $PV = k_B$ と比較して、

1787年: 一定の圧力では気体の膨張係数は気体の種類によらず一定 → Charlesの法則

1802年: 一定の圧力では気体の体積は絶対温度に比例し、一定体積では気体の圧力は絶対温度に比例する。 → Gay-Lussacの法則

1の状態と2の状態の圧力が等しい時には、

圧力の関係もいれると、 Boyle - Charlesの法則



アボガドロ (Avogadro) の法則 - モル体積

1 atmにおける気体の体積

$PV = aT$ a は比例定数

同温同圧では、1 mol の気体はすべて同じ体積を占める。
同温同圧では、上式は、 $V = a$ と書ける。
体積は物質に比例する。

$a = nR$ n: 物質質量, R: 気体定数 (gas constant)

この式に従う気体を (ideal gas) といい、この式を の状態式という。

気体定数 R を求める

$PV = nRT$ $n = 1 \text{ mol}, T = 273.15 \text{ K}, P = 1 \text{ atm}$

$R = \frac{1 [\text{atm}] \times 22.414 [\text{dm}^3]}{1 [\text{mol}] \times 273.15 [\text{K}]} = 0.08206 [\text{atm} \cdot \text{dm}^3 \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}]$

SI単位に変更すると
 $1 \text{ atm} = 10.1325 \times 10^4 \text{ Pa} = 101325 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$

$R = 0.08206 \times 101325 \times 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}] = 8.3145 [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}] = 8.3145 [\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}]$

現在の定義による正確な値
 $R = 8.314472 [\text{J} \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}] \approx 8.314 [\text{J} \text{K}^{-1} \text{mol}^{-1}]$

$1 \text{ dm}^3 = 101.325 \text{ J atm}^{-1} = 101.325 / 101325 \text{ J Pa}^{-1} = 0.001 \text{ J Pa}^{-1} = 0.001 \text{ m}^3$

例題 $2 \text{HgO (固)} \longrightarrow 2 \text{Hg (液)} + \text{O}_2 \text{(気)}$

の化学反応から酸素を発生させる実験を行った。用いた酸化水銀 HgO は 3.08 g であった。温度 30 °C、気圧 91.2 kPa であった。この時の発生した酸素は何 dm³ で何 mol であったか答えよ。

解答:

実在気体: van der Waals の状態式

$n=1 \text{ mol}$ の時の理想気体の状態式より、次式のようにパラメータ Z を定義する。

$$Z = \frac{PV_{\text{real}}}{RT} = \frac{V_{\text{real}}}{V_{\text{ideal}}}$$

Z を圧縮因子 (compression factor) と呼ぶ。

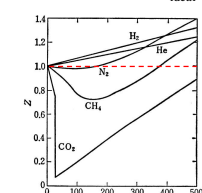
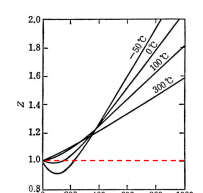
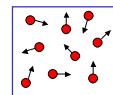



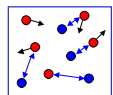
図 1.3 気体の $Z-P$ 曲線 (0°C) 図 1.4 温度の $Z-P$ 曲線

実際の変化を説明するために、van der Waals は 圧力と体積に分子の と を考慮に入れた。

圧力 P への の補正



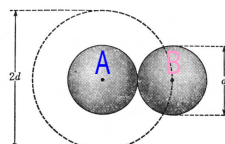
実際には、分子間に が働くので、圧力はその分だけ はず。



単位体積あたりの分子の数 (n/V に比例) と
単位時間に単位面積に衝突する分子の数 (n/V に比例)
の両方に比例する。比例係数を a とおけば、実際の圧力 P は

$$P_{\text{ideal}} \Rightarrow P_{\text{real}} + a \frac{n^2}{V^2}$$

体積 V への分子の大きさ (, excluded volume) の補正



分子を直径 d の剛体球と仮定してモデルを描くと左図のように自由に体積を占められない部分が存在する。この体積のことを という。気体 1 mol あたり $b \text{ m}^3$ の が存在すると、実際の体積は、

$$V_{\text{ideal}} \Rightarrow V_{\text{real}} - nb$$

剛体球を仮定すると、 B 球が A 球の中心から半径 d の体積には自分自身を完全には入れられない。

 b は $b = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi d^3 \times L = \frac{2}{3} L \pi d^3$

上記は 2 個の球に対してだから 1 個の球では $1/2$ をかける。 L は Avogadro 定数

van der Waals の状態式

$$P_{\text{ideal}} \Rightarrow P_{\text{real}} + a \frac{n^2}{V^2}$$

$$V_{\text{ideal}} \Rightarrow V_{\text{real}} - nb$$

$$(P + a \frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$

a と b は気体の種類に依存するパラメータ (定数) である。

N_2 ガスの実測値と計算値との比較

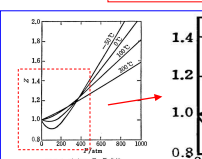
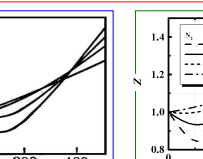
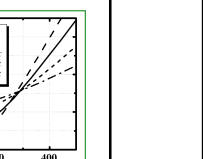
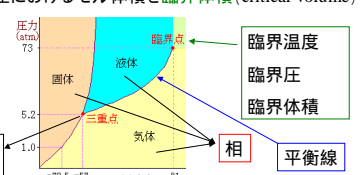




図 1.4 温度の $Z-P$ 曲線

補遺 1 気体の液化と相

- 気体が液体になるためには分子間力により運動が阻害されることが必要。この時の温度を **臨界温度** (critical temperature) という。臨界温度以上では圧力に関係なく気体である。
- 臨界温度において、気体から液体になる圧力を **臨界圧** (critical pressure) という。
- 臨界温度、臨界圧におけるモル体積を **臨界体積** (critical volume) という。

以上を CO_2 の相図を用いて図示すれば、



固、液、気の共存 (triple point) 臨界温度 臨界圧 臨界体積 相 平衡線

補遺2 [混合気体] **ドルトン(Dalton)の分圧の法則** 1/2

● 気体分子AとBとする。

左図のように体積Vの中に混合気体(A+B)が存在するとする。このときの圧力を**全圧(total pressure)**と言います。

ドルトンの分圧の法則 (Dalton's law of partial pressures)

このように混合気体の全体積Vを1つの成分だけが占めた時の圧力を**分圧(partial pressure)**という。

ドルトンの分圧の法則 (Dalton's law of partial pressures) 2/2

i成分の分圧を P_i , 全圧をPとおけば、

$$P = \sum_i P_i$$

この関係式に厳密に従う気体を**理想混合気体**という。

i成分の物質量を n_i とおき、各分子間の引力を無視できるとすると、各成分で**理想気体の状態式**が成り立つことになる。つまり、各成分では、 $P_1V = n_1RT, P_2V = n_2RT, \dots, P_iV = n_iRT$ が成り立つ。

したがって、 $PV = \sum_i P_iV = \sum_i n_iRT$

χ_i を成分iの**モル分率**という。混合気体の各成分の分圧は、全圧とモル分率の積に等しい。

$$P_i = \frac{n_i}{\sum_i n_i} P = \chi_i P$$

気体分子運動論 (kinetic theory of gases)
Bernoulliの式, Maxwell-Boltzman分布則

理想気体の分子運動論 $\Leftrightarrow PV = nRT$

1. 気体は連続的な運動をしている分子からなり、圧力は分子が壁に衝突する結果である。
2. 分子の衝突は常に弾性衝突であり運動エネルギーの変化は無視できる。
3. 分子間には引力がない。
4. 分子自身の体積は無視できる。
5. 分子の平均運動エネルギーは絶対温度に比例する。

分子運動論から圧力を求める **力 = 1 s 間の運動量変化**

気体分子●の質量をmとする。気体分子iの速度成分を u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} とする。x軸方向だけを考えると、運動量の変化は

$$\Delta(m|u_{xi}|) = m|u_{xi}| - (-m|u_{xi}|) = 2m|u_{xi}|$$

A面に衝突して再度衝突するには2aの距離を移動することになる。したがって、その時間間隔は $\Delta t = \frac{2a}{|u_{xi}|}$

力 = 運動量変化 / 時間 =

圧力 P = 全気体分子数の力 ÷ 面Aの面積 [N·m⁻²]

$$P = \sum_i \frac{mu_{xi}^2}{a} / bc = \frac{m \sum_i u_{xi}^2}{abc}$$

V: 直方体の体積 \bar{u}_x^2 : u_x の2乗平均 $\bar{u}_x^2 = \frac{\sum_i u_{xi}^2}{N}$

全体の平均2乗速度

$$\bar{u}^2 = \frac{\sum_i u_i^2}{N} = \frac{\sum_i (u_{xi}^2 + u_{yi}^2 + u_{zi}^2)}{N} = \bar{u}_x^2 + \bar{u}_y^2 + \bar{u}_z^2$$

3方向の速度が random であるという仮定から

$$\bar{u}_x^2 = \bar{u}_y^2 = \bar{u}_z^2 = \frac{\bar{u}^2}{3}$$

$$PV = \frac{1}{3} Nmu^2$$
 Bernoulliの式

気体のモル運動エネルギー (kinetic energy)

N個の気体の運動エネルギー E_k は平均2乗速度 \bar{u}^2 をもちいて

$$E_k = \frac{1}{2} Nmu^2$$

1 mol の気体に換算すると、

$$E_k (1 \text{ mol}) = E_m = \frac{1}{2} Lmu^2$$

LはAvogadro定数

1 mol の気体では、Bernoulliの式は $PV = \frac{1}{3} Lmu^2$

したがって、上2式よりただちに

$$E_m = \frac{3}{2} PV$$

ここで、 E_m を**モル運動エネルギー**と呼ぶ。

25 °Cでは $E_m = 3718 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}$

気体1分子あたりの平均の運動エネルギー $\bar{\epsilon}_k$ はモル運動エネルギー E_m をアボガドロ数 L で割った値であるから、

$$\bar{\epsilon}_k = E_m / L = \frac{3}{2} \frac{R}{L} T = \frac{3}{2} kT =$$

k は Boltzman 定数と呼ばれる、1分子あたりの気体定数である。

$$k = \frac{R}{L} = \frac{8.31447 [\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}]}{6.0221367 \times 10^{23} [\text{mol}^{-1}]} = 1.38065 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}]$$

1分子が x, y, z の3方向を自由に動きまわるので、

1方向あたりの平均の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} m \bar{u}_x^2 = \frac{1}{2} m \bar{u}_y^2 = \frac{1}{2} m \bar{u}_z^2 = \frac{1}{2} m \frac{u^2}{3} = \frac{1}{2} kT$$

Copyright A.Azaro

25

気体の速度と分布: Maxwell-Boltzman 分布

Bernoulliの式 $PV = \frac{1}{3} N m \bar{u}^2$ から $\bar{u}^2 = \frac{3PV}{Nm} = \frac{3nRT}{Nm}$

$N = nL$ であり、また 1 mol あたりの気体の質量を M とおけば $Lm = Nm / n = M$ より

$$\sqrt{\bar{u}^2} = u_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3nRT}{Nm}} = \sqrt{\frac{3RT}{Lm}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

ここで u_{rms} は平均2乗速度の平方根 (root mean square speed)。

M は気体の種類によって違うので、温度が与えられれば、その温度でのその気体の平均的な速度が求められることを意味している。また、速度は気体分子の種類に依存していることを示している。

Copyright A.Azaro

26

Maxwell-Boltzmanの速度分布

x 方向に運動している気体分子を考える。 N 個の気体分子は random に運動していると仮定しているから、速度にも分布があるはずである。そこで、速度 u_x と $u_x + du_x$ の間の速度をもつ分子の数を dN とする。

$$dN = N f(u_x) du_x \quad dN \text{ は } N \text{ と速度範囲 } du_x \text{ に比例する。}$$

$f(u_x)$ を分子速度分布関数 (distribution function for molecular velocities)

$$W_x = \frac{dN}{N} = f(u_x) du_x = c \cdot e^{-\frac{1}{2} m u_x^2 / kT} du_x \quad \text{Boltzman 分布}$$

$$\int_0^{\infty} f(u_x) du_x = 1$$

W_x は存在確率

Maxwellの分子速度の分布則 (law of distribution of molecular velocities) 1860年

Copyright A.Azaro

27

$$\int_0^{\infty} c \cdot e^{-\frac{1}{2} m u_x^2 / kT} du_x = 1 \quad \text{から} \quad c = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} m u_x^2 / kT} du_x}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} m u_x^2 / kT} du_x \text{ は公式(補遺参照)により } \sqrt{\frac{kT\pi}{2m}} \text{ だから、}$$

$$c = \sqrt{\frac{2m}{kT\pi}} \quad f(u_x) = \sqrt{\frac{2m}{kT\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} m u_x^2 / kT} \quad \text{単位長さあたりの存在確率を表す。}$$

x, y, z の3次元方向に拡張する (補遺参照) と、

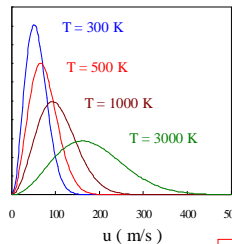
$$W = f(u_x) \cdot f(u_y) \cdot f(u_z) \cdot du_x du_y du_z = c \cdot e^{-\frac{1}{2} m (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) / kT} \cdot du_x du_y du_z$$

$$= c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) \cdot du$$

Copyright A.Azaro

28

$$f(u) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) \quad u - f(u) \text{ 関係を下図に示す。}$$



温度の上昇とともに速度 u の成分が増加していく様子がわかる。また、_____の増大も同時に起こる。

速度分布の極大の速さ u_{mp} は、 $f(u)$ を u で微分した $df(u)/du=0$ から求められる。この時の速度のことを、最大確率速度 (most probable velocity) という。

• 平均2乗速度の平方根はどの辺？

• u_{mp} との関係は？

Copyright A.Azaro

29

最大確率速度 (most probable velocity) u_{mp} と
2乗平均速度の平方根 (root mean square speed) u_{rms} と
平均速度 (average speed) u_{Ave} の関係

$$\frac{df(u)}{du} = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2u \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) + 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} u^2 \cdot \frac{-mu}{kT} \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) = 0$$

$$2u - u^2 \cdot \frac{mu}{kT} = 0, \quad u_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$u_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{Lm}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$u_{\text{Ave}} = \int_0^{\infty} u f(u) du$$

$$u_{\text{Ave}} = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} u^3 \cdot \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right) du = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Copyright A.Azaro

30

$u_{mp} : u_{Ave} : u_{rms} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} : \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} : \sqrt{\frac{3kT}{m}}$
 $= \sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3}$
 $= 1 : 1.128 : 1.225$

Copyright A.Azaro 31

補遺: ガウス関数の積分 - 1

ガウス関数の積分 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

$f(x)$ の 2乗 を考えると、右式の $(f(x))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$ ように変更できる。 $f(x) \times f(y)$ の積分のかけ算は、全ての平面の積を表すので、 x, y 方向に無限に計算することと同じである。そこで $e^{-a(x^2+y^2)}$ を計算する。ここで x^2+y^2 は半径 r の円を考えると $r^2 = x^2+y^2$ となる。上式の積分は、円座標で計算すると便利。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta$$

ここで $dx dy = r dr d\theta$ をヤコビアンという。

Copyright A.Azaro 32

補遺: ガウス関数の積分 - 2

ヤコビアン $dx dy = r dr d\theta$ の説明

左の面積を x, y をそれぞれから r, θ をそれぞれから r, θ までとから 2π まで積分して求める。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{e^{-ar^2}}{2a} \right]_0^{\infty} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a} d\theta = \left[\frac{\theta}{2a} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{a}$$

したがって、

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Copyright A.Azaro 33

補遺: 分子速度分布関数の3次元の拡張 - 1

$$W = c \cdot e^{-\frac{1}{2}m(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)/kT} \cdot du_x du_y du_z = c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du$$

$du_x du_y du_z$ は 3 方向の単位速度の積の微小変化 dV なので、単位速度 u で広がる球を考えると、 $u + du$ にできる du 分の球の体積となる。

$$dV = \frac{4}{3}\pi(u+du)^3 - \frac{4}{3}\pi u^3 = \frac{4}{3}\pi u^3 + 4\pi u^2 du + 4\pi u du^2 + \frac{4}{3}\pi u^3 - \frac{4}{3}\pi u^3$$

$$\approx 4\pi u^2 du \quad u^2 du \text{ と } du^2 \text{ は } u^2 du \text{ に比べて極端に小さいので無視できる。}$$

また、 dV を積分で求めるやり方もある。
 この場合、直行座標を球座標に変換し、ヤコビアンを求める。
 => 次のページ

Copyright A.Azaro 34

補遺: 分子速度分布関数の3次元の拡張 - 2

上図の du 球の体積は、右図のように、球座標で表した時の微小体積を θ は 0 から π までと、 ϕ は 0 から 2π まで積分すると求められる。

$$dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} du \cdot u d\theta \cdot u \sin \theta d\phi = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} u^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\phi du$$

$$= u^2 du \cdot [-\cos \theta]_0^{\pi} \cdot [\phi]_0^{2\pi} = 4\pi u^2 du$$

ちなみにさらに u を 0 から r まで積分すると半径 r の球の体積

Copyright A.Azaro 35

補遺: 分子速度分布関数の3次元の拡張 - 3

規格化条件から定数 c を求める。

$$W = c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du \quad \int_0^{\infty} c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du = 1$$

$$\int_0^{\infty} c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du = 4\pi c \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-a^2 u^2} du, \quad a = \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$

$\int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-a^2 u^2} du$ を部分積分法を用いて求める。

$$\int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-a^2 u^2} du = \int_0^{\infty} u \cdot \left[\frac{-1}{2a^2} e^{-a^2 u^2} \right]' du = \left[\frac{-u}{2a^2} e^{-a^2 u^2} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{2a^2} e^{-a^2 u^2} du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2a^2} e^{-a^2 u^2} du = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a} = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} \rightarrow 0 \text{ になる。}$$

Copyright A.Azaro 36

補遺: 分子速度分布関数の3次元の拡張 - 4

したがって、 $4\pi c \int_0^\infty u^2 \cdot e^{-a^2 u^2} du = 4\pi c \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{a^3} c = 1$

$$c = \frac{(m/2kT)^{3/2}}{\pi^{3/2}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

$W = c \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du$ から、3次元の分子速度分布関数 $f(u)$ は

$$f(u) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} u^2 \cdot e^{-\frac{mu^2}{2kT}}$$