

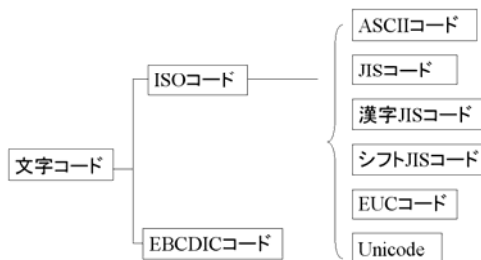
情報源 (マルコフ情報源)

前回の補足

文字データは英語の場合はほとんどアルファベットなので、1バイトコード(256種類)でよいが、日本語の場合漢字があるので2バイトコードを用いる。

ASCIIコード: (American National Standards Institute; 米国規格協会)が定めた文字コードです。制御コード、記号、数字、アルファベットを1バイトで表現します。ASCIIコード体系は国際的な標準コードのISO (International Organization for Standardization)コードに採用されている。

		上位3ビット							
		0	1	2	3	4	5	6	7
下4ビット	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	^	p
	1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
	2	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
	4	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
	7	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
	8	BS	CAN	(8	H	X	h	x
	9	HT	EM)	9	I	Y	i	y
	A	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
	B	VT	ESC	+	;	K	[k	{
	C	FF	FS	,	<	L	\	l	
	D	CR	GS	-	=	M]	m	}
	E	SD	RS	.	>	N	^	n	~
	F	SI	US	/	?	O	_	o	DEL



シフトJISコード: マイクロソフト社によるコード。漢字コードが始まる前と後にESCを入れる必要がない。

EUCコード: Unix系のワークステーションでよく用いられている。

Unicode: 世界の文字を1つの文字コードで統一しようとしたもの。

問1 数値の0~9をASCIIコードの'0'~'9'までに変換する簡単な規則を見つけよ。

情報源の種類

対応する確率のことは

- 記憶のない情報源 (**無記憶情報源**)
 独立な事象
 (現在何が起こるかが過去の履歴に依存しない情報源)
 例: コイン投げとかさいころ
- 記憶のある情報源 (**マルコフ情報源**)
 条件付確率

記憶のある情報源 (m重マルコフ情報源) とは...

任意の時点での出力の確率分布がその直前のm個の出力だけから決めることができる情報源.

単純マルコフ情報源 (1重マルコフ情報源) の例題



ここで \oplus は**排他的論理和**とよばれるもので、情報の授業でよく出てきます。

排他的論理和の演算

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \oplus 0 = 1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dフリップフロップ (遅延素子) とよばれる (超重要)

排他的論理和を用いると入出力関係は $X_i = Y_i \oplus X_{i-1}$

問2 $P_{X_i|X_{i-1}}(0|0), P_{X_i|X_{i-1}}(1|1), P_{X_i|X_{i-1}}(1|0), P_{X_i|X_{i-1}}(0|1)$ を求めよ. また,
 $P_{X_i|X_{i-1}X_{i-2}}(0|00) = P_{X_i|X_{i-1}X_{i-2}}(0|01) = P_{X_i|X_{i-1}}(0|0) = 1-p$ に等しいことを示せ.

シャノン線図(1)

次のような図を状態図(シャノン線図)という(問2の1単位遅延素子の状態図になっている)。(黒板の図を写す)

問3 次のような2重マルコフ情報源の状態図を描け。

X_i, X_{i-1} のとり得る状態の集合 $S = \{00, 01, 10, 11\}$ を

状態集合ということにする。簡単のために

$$P_{X_i | X_{i-1}, X_{i-2}}(x_i | x_{i-1}, x_{i-2}) = P(x_i | x_{i-1}, x_{i-2})$$

と略す。

$$\begin{aligned} P(0 | 00) &= a, P(1 | 00) = 1 - a, P(0 | 01) = b, \\ P(1 | 01) &= 1 - b, P(0 | 10) = c, P(1 | 10) = 1 - c, \\ P(0 | 11) &= d, P(1 | 11) = 1 - d \end{aligned}$$

答

シャノン線図(2)

このような状態図においては各状態は直前の m 個の状態に対応しているが、この状態をなくし、状態をより抽象的に定義しても情報源を定義することができる。

たとえば上の状態図で $00 \rightarrow s_1, 01 \rightarrow s_2, 10 \rightarrow s_3, 11 \rightarrow s_4$

このような状態図であらわされる情報源を
一般化マルコフ情報源

という。

あるいは単に**マルコフ情報源**という。

また、状態の遷移にのみ注目するときは
このモデルを**マルコフ連鎖**という。

状態遷移行列(1)

状態 s_k から状態 s_l へ変化する確率を P_{kl} とする。 P_{kl} を (k, l) とするような行列を
状態遷移行列という。問2と問3の状態遷移行列を
それぞれ示す。

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

問2

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 0 \\ b & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & d & 0 & 1-d \end{pmatrix}$$

問3

状態遷移行列(2)

状態遷移行列と初期分布 $u(0) = (u_1(0), u_2(0), \dots, u_n(0))$ が決まれば時刻 t の状態確率 $u(t)$ を計算することができる。

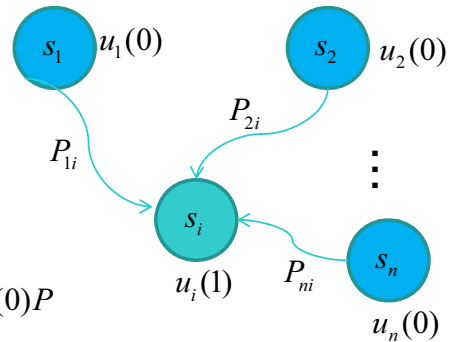
たとえば

$$u_i(1) = \sum_{k=1}^n u_k(0) P_{ki}$$

だから

$$u(1) = (u_1(1), \dots, u_i(1), \dots, u_n(1))$$

$$= (u_1(0), \dots, u_n(0)) \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1i} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \dots & P_{ni} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} = u(0)P$$



よって $u(t) = u(0)P^t$ が成り立つ。

行列 P の t 乗という意味ですよ

$u(t) = u(t-1)P$ も成り立つ。

状態遷移行列(3)

問4 問3で初期分布が $u(0) = (P(00), P(01), P(10), P(11)) = (1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$ のとき時刻1における状態01の状態確率を求めよ。

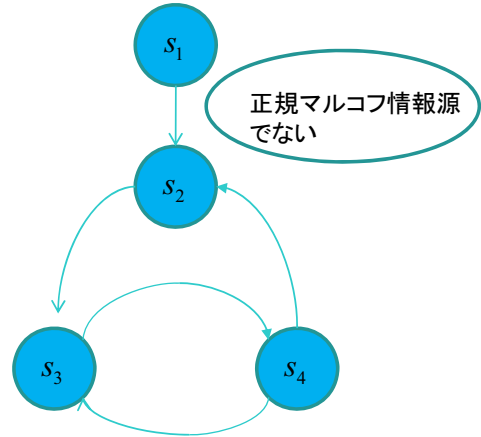
答

正規マルコフ情報源(1)

以下では簡単のため単純マルコフ情報源 $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ を仮定する。
状態遷移行列を次のようにする。

情報源が**正規マルコフ情報源**であるとは
⇨ある時刻tが存在して状態遷移行列Pのt乗の全ての要素が正となる

状態遷移図で表現すると、「どの状態からも任意の状態へtステップ後に移動可能な時」



ここに問3の状態遷移図を再び描いてみよ。
任意の s_i から任意の s_j へ2ステップで
移動可能なことがわかる。

正規マルコフ情報源(2)

正規マルコフ情報源は時刻無限大での確率分布 $u(\infty)$ (**定常状態**)は
初期確率分布によらない

実際にPが与えられたとき、簡単に正規マルコフ情報源であることを示すには、
実際に P^2, P^3, \dots を計算し、全ての成分が0でないことを確認すればよい。

実際にPが与えられたとき、簡単に正規マルコフ情報源であることを示すには、実際に P^2, P^3, \dots を計算し、全ての成分が0でないことを確認すればよい。具体的には次の例のようにPの非ゼロ成分をxとおき、それを2乗し、結果の非ゼロ成分をまたxとおけばよい。これを繰り返せば楽に累乗が計算できる。

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ x & x & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix}$$

正規マルコフ情報源(3)

さて時刻無限大での確率分布(定常分布)が初期確率分布によらないという性質があると言ったが, 実際定常分布を求めるには次のようにする.

問5 状態遷移行列が

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で与えられているとする. 定常分布 z を求めよ.

正規マルコフ情報源(4)

問6 4元マルコフ情報源 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ が次のような状態遷移行列をもつとき, その状態遷移図を描け.

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}$$