

浅吃水船の造波抵抗理論について

(木村康之教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(平成 3 年 3 月 3 日受付; 平成 3 年 5 月 10 日再受付)

On the Theory of Wave Resistance of a Shallow Draft Ship

(Dedicated to Professor Yasuyuki Kimura)

By Masatoshi BESSHO

It is well known that a shallow draft ship can be represented by a surface pressure distribution in the theory of the wave-making resistance. But this theory can not deal with a ship like a destroyer having a transom stern.

The difficulty lies on a point that a solution of the boundary integral equation has insufficient arbitrariness to satisfy the Kutta condition at the transom stern. To overcome this difficulty, the source singularity is introduced around the periphery of the water plane area. This singularity represents a surface depression in a far downstream and adds a resistance, say a head resistance, to the well known splash and wave-making one.

The procedure to calculate a trim and sinkage is formulated for a given ship in free running. Lastly, a reciprocity is presented and it leads a theorem like Munk's in the theory of wing.

1. 序 論

高速船型は一般には大変吃水が浅いので線形造波抵抗理論では水面の圧力分布として取り扱えると考えられている^{1),4)}。しかし普通それらの船型はTransom (Destroyer) Sternとなっており、船尾で水を切って進む。それ故そこでクッタの流出条件を満たさなければならないが、従来の定式化では一般にそれは不可能である⁵⁾。そこでそれを満たす為に水線面積を変化させる解法が考えられた。しかし大型船では一般に船首部の側壁が垂直に近くて水線面積の変化は小さいのでそれはあまり有望な解法とは考えられない。そこで従来の特異性の他に船首部に沿って吹き出し特異点の線分布を加えてこの点を改良しようとするものである。その特異性は後流側水面に凹みが出るので仮に堰き止めポテンシャルと呼ぶことにする。その2次元理論

は別報⁶⁾に示すように従来の理論と継続する事がわかるので、本報ではそれを3次元の場合に拡張しようとするものである。

また高速では船体の沈下、トリムが大きいので与えられた速度におけるそれら姿勢を求める定式化を得る事も本報の目的の一つである。

2. 速度ポテンシャルと境界値問題

トランサム船尾を有し船首付近舷側が略々垂直で航走によって水線面積 F が変化しないと仮定する。その船が図1のように一様速度 V の流れの中にあつて船尾で水を切って進んでいるものとする。

速度ポテンシャルを ϕ 、水面上昇を ζ 、圧力を p とすると線形近似では水面で次式が成立つ。

$$\phi_x(x, y, 0) + K\zeta(x, y) = -p(x, y) \quad (1)$$

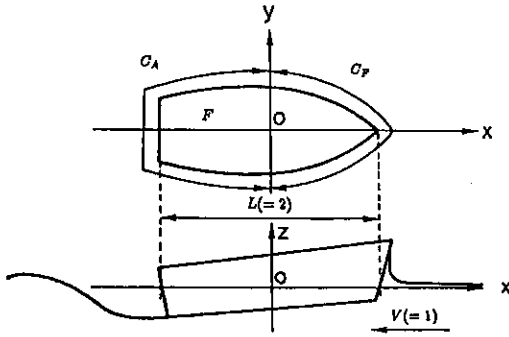


Fig. 1 Co-ordinate System

$$\phi_x(x, y, 0) = \zeta_x(x, y) \quad (2)$$

この解はよく知られているが、本報ではさらに新しく水の堰き止め効果を表す成分を取り込んで次のように表すことにする。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= - \iint_F p(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \\ &\quad - K \int_{C_F} A(\eta_F) T(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= - \iint_F p(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{C_F} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (4) \end{aligned}$$

ここに F は水線面、 C_F 、 C_A は F の周辺で最大幅から前部、後部を示すものとする。また (x_F, y_F) は C_F の座標とする。核関数 T などは付録 A、B に示し、 $A(y)$ は新しく導入した特異性の強さで (B. 6) に示すようにこれだけ後流側で水が凹んでいる。

クッタの条件は

$$p(x, y) = 0, \quad \text{on } C_A \quad (5)$$

となる。無限後流では

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &\xrightarrow{x \ll -1} \frac{K}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta} \\ &\quad \cdot H^*(K \sec^2 \theta, \theta) |\sec^3 \theta| d\theta \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &\xrightarrow{x \ll -1} \frac{K}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta} \\ &\quad \cdot H^*(K \sec^2 \theta, \theta) |\sec^3 \theta| \frac{d\theta}{\cos \theta} \quad (7) \end{aligned}$$

$$H(k, \theta) = \iint_F p(x, y) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H^*(k, \theta) &= H(k, \theta) \\ &\quad + i \cos \theta \int_{C_F} A(y_F) e^{ik(x_F \cos \theta + y_F \sin \theta)} dy_F \quad (9) \end{aligned}$$

さて船体底面の境界条件は静止時のそのオフセットを $f(x, y)$ 、トリムを τ 、上昇量を h とすると

$$\zeta(x, y) = -f(x, y) + \tau x + h \quad (10)$$

これを (4) 式の左辺においてクッタの条件 (5) の下に積分方程式を解けば良いことになる。

この時堰き止めポテンシャルを導入しなければ (5) を満足出来ないなどの事は別報に述べる通りであるが、一方では上式が舷側でも成り立つべきであるとする。舷側波形を予め指定するということになり、舷側後半部では当然であるが前半部では少し無理があるように見える。しかし前半部には特異性があるので舷側波形は上式では与えられずこの理論では決まらない。

さて線形理論であるから境界条件 (10) の解は別々に解いて加え合わせる事が出来る。そこでそれらの解を例えば次のように記す事にしよう。

Table 1 Basic Solution

$p(x, y)$	$\zeta(x, y)$ on F	$A(y)$ on C_F
$p_f(x, y)$	$-f(x, y)$	$A_f(y)$
$p_h(x, y)$	1	$A_h(y)$
$p_\tau(x, y)$	x	$A_\tau(y)$
$p_c(x, y)$	$\frac{1}{2}(x^2 - 1)$	$A_c(y)$

そうすると (10) の解は

$$p(x, y) = p_f(x, y) + \tau p_\tau(x, y) + h p_h(x, y) \quad (11)$$

$$A = A_f + \tau A_\tau + h A_h \quad (12)$$

と表される。

さて静止時排水量は

$$V = \iint_F f(x, y) dx dy \quad (13)$$

で浮心位置

$$V l_{O.B.} = \iint_F f(x, y) x dx dy \quad (14)$$

であるが、航走時もそれが保たれるとすると

$$V = \iint_F p(x, y) dx dy = L_f + \tau L_r + h L_h \quad (15)$$

$$V_{l_{0, B}} = \iint_F p(x, y) x dx dy = M_f + \tau M_r + h M_h \quad (16)$$

ここに

$$\iint_F p_i dx dy = L_i, \quad \iint_F p_i x dx dy = M_i \quad (17)$$

なる2式が成り立たねばならないから、これから τ と h が求まり自由航走時の姿勢が定まる。

そして $A(y)$ は (12) から定まる。2次元問題では A が 0 となるように浸水長を変える事が出来たが今はそれは不可能に見える。

翼理論的に考えれば境界条件は船底の垂直速度で与えられ (2), (4) から、クッタの条件を満たす解 p^* は

$$\zeta_x(x, y) = - \iint_F p^*(\xi, \eta) T_{xx}(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \quad (18)$$

によって与えられる。この解を (4) に代入して ξ を計算すると

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) + h(y) &= - \iint_F p^*(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{\sigma_F} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (19) \end{aligned}$$

となって $h(y)$ だけ (4) の解 $p(x)$ のそれと異なつて来ると考えられる。

上式から (4) を辺々相引くと

$$\begin{aligned} h(y) &= - \iint_F [p^*(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)] T_x(x - \xi, y - \eta, 0) p \xi d\eta \\ &\quad + \int_{\sigma_F} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (20) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \delta(y - y') &= - \iint_F p_A(\xi, \eta; y') T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{\sigma_F} A_A(\eta_F; y') S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (21) \end{aligned}$$

ただし

$$\int \delta(y - y') dy' = 1$$

なる積分方程式の解 p_A を導入すると、(20) の解は唯一であるから次の関係が成り立たねばならない。

$$\begin{aligned} p^*(x, y) - p(x, y) + \int_{\sigma_F} h(y') p_A(x, y; y') dy' \\ = 0 \quad (22) \end{aligned}$$

$$A(y_F) + \int_{\sigma_F} A_A(y_F; y') h(y') dy' = 0 \quad (23)$$

3. 抵抗

抵抗は船底圧力による部分と付録Bで考察した堰き止め抵抗を加えて

$$\begin{aligned} D &= \iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ &\quad + K \int_{\sigma_F} A(\eta_F) [\zeta(\xi_F, y_F) + A(\eta_F)] d\eta_F \quad (24) \end{aligned}$$

のように与えられる¹⁾。(A. 8), (A. 12), (A. 13), (4) 等から

$$\begin{aligned} \zeta_x(x, y) &= \frac{K^2}{\pi} \iint_F p(\xi, \eta) [Q_{-s}(K(x - \xi), K(y - \eta), 0) \\ &\quad + P_{-s}(K(x - \xi), K(y - \eta), 0)] d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \iint_F p(\xi, \eta) \frac{(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \\ &\quad + K \int_{\sigma_F} A(\eta_F) T_x(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (25) \end{aligned}$$

と書けるのでそれに p をかけて積分すると Q_{-s} は奇関数なので消えて

$$\iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy = I_1 + I_2 + I_3 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ &\quad \cdot \iint_F \frac{p(\xi, \eta)(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{K^2}{\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ &\quad \cdot \iint_F p(\xi, \eta) P_{-s}(Kx - \xi, Ky - \eta, 0) d\xi d\eta \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= K \iint_F p(x, y) dx dy \\ &\quad \cdot \int_{\sigma_F} A(\eta_F) T_x(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (29) \end{aligned}$$

一方 (4) によって

$$\begin{aligned} \zeta(\xi_F, \eta_F) = & - \iint_F p(x, y) T_z(\xi_F - x, \eta_F - y, 0) dx dy \\ & + \int_{\sigma_F} A(\eta_F) S^*(\xi_F - x_F, \eta_F - y_F, 0) dy_F \end{aligned}$$

であり、また S^* の対称性を考えると

$$\begin{aligned} K \int_{\sigma_F} A(\eta_F) d\eta_F \int_{\sigma_F} A(\eta_F) S^*(\xi_F - x_F, \eta_F - y_F, 0) dy_F \\ = \frac{K}{2} \int_{\sigma_F} A^2(\eta_F) dy_F - \frac{K^2}{\pi} \int_{\sigma_F} A(\eta_F) d\eta_F \\ \cdot \int A(\eta_F) P_{-3}(K\xi_F - x_F, K\eta_F - y_F, 0) dy_F \quad (30) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} I_3 = & -K \int_{\sigma_F} A(\eta_F) \left[\zeta(\xi_F, \eta_F) + \frac{1}{2} A(\eta_F) \right] d\eta_F \\ & + \frac{K^2}{\pi} \int_{\sigma_F} A(\eta_F) d\eta_F \\ & \cdot \int A(\eta_F) P_{-3}(K\xi_F - x_F, K\eta_F - y_F, 0) dy_F \quad (31) \end{aligned}$$

それ故これらを (24) に代入して (A. 18) の関係を使いコッチン関数 (9) を使えば最終的に

$$D = D_S + D_W + D_H \quad (32)$$

$$D_S = \frac{\pi}{4} \int_{\sigma_F} \sigma^2(y) dy \quad (33)$$

$$D_W = \frac{K^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |H^*(K \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta \quad (34)$$

$$D_H = \frac{K}{2} \int_{\sigma_F} A^2(y) dy \quad (35)$$

D_S は飛沫抵抗で I_1 を付録 C によって変形したものである。 D_W は造波抵抗であり、 D_H は 2 次元理論で水頭抵抗となすけたものであり、夫々が独立している点は興味深い。

4. 可逆定理

Flax に従って一樣流れを逆にした流れを考えてそれを逆流れと呼びその諸量は上に (～) 印をつけて示す事にしよう²⁾。(1), (2) に対応する関数は

$$-\bar{\phi}_x(x, y, 0) + K\bar{\zeta}(x, y) = -\bar{p}(x, y) \quad (36)$$

$$\bar{\phi}_z(x, y, 0) = -\bar{\zeta}_x(x, y) \quad (37)$$

核関数については流れの方向が逆になっただけであ

るから、 x の符号をかえるだけでよいが、 y 方向の対称性も考えると

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}(x, y, z) &= T(-x, -y, z) \\ \bar{T}_x(x, y, z) &= T_x(-x, -y, z) \\ \bar{T}_{xz}(x, y, z) &= T_{xz}(-x, -y, z) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$\bar{S}^*$ については今度は x の正の側で凹むとして

$$\bar{S}^*(x, y, z) = S^*(-x, -y, z) - \frac{z}{\pi \rho^2} \quad (39)$$

と採る事にする。そうすると

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, y, z) &= \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_x(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \\ &+ K \int_{\sigma_A} \bar{A}(\eta_A) \bar{T}(x - \xi_A, y - \eta_A, z) d\eta_A \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(x, y) &= - \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &+ \int_{\sigma_F} \bar{A}(\eta_A) \bar{S}^*(x - \xi_A, y - \eta_A, 0) d\eta_A \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_z(x, y) &= - \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_{xz}(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &+ K \int_{\sigma_F} \bar{T}_x(x - \xi_A, y - \eta_A, 0) d\eta_A \quad (42) \end{aligned}$$

そうすると花岡の第 1 定理は²⁾

$$\begin{aligned} \iint p(x, y) \bar{\zeta}_x(x, y) dx dy - \iint_F \bar{p}(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ = K \int_{\sigma_F} A(\eta_F) \bar{\zeta}(\xi_F, \eta_F) d\eta_F \\ - K \int_{\sigma_A} \bar{A}(\eta_A) \zeta(\xi_A, \eta_A) d\eta_A \quad (43) \end{aligned}$$

となる。

先ず (21) で定義した解の逆流れ解を上式に代入すると

$$\begin{aligned} KA(y') &= K \int_{\sigma_A} \bar{A}(\eta_A; y') \zeta(\xi_A, \eta_A) d\eta_A \\ &- \iint_F \bar{p}_A(x, y; y') \zeta_x(x, y) dx dy \quad (44) \end{aligned}$$

表 1 で定義した p_i の逆流れ解を代入すると

$$L = \iint_F p(x, y) dx dy$$

$$= \iint_F \bar{p}_r \zeta_x(x, y) dx dy + K \int_{OF} A(\eta_F) \zeta_F d\eta_F - K \int_{OF} \bar{A}_r(\eta_A) \zeta(\xi_A, \zeta_A) d\eta_A \quad (45)$$

となる。

$\xi(x, y)$ が与えられると $p(x, y)$ を求めなくとも, p_A , p_r がわかっていれば (44) より $A(y)$ がわかり, それを (45) に代入すると揚力がわかることになる。

モーメントについて同じく表 1 の p_c の逆流解があれば同様で翼理論の Munk の定理に相当するものが得られたことになる。

さらに適当な基本解を導入すれば, (33) の σ , (34) のコッチン関数等を船底オフセットから計算出来る式が導かれるが煩雑になるのでここでは記さない。

5. 結 論

船首付近の舷側が切り立っていて船尾はいわゆるトランサム・スターンである高速船型を浅吃水船理論, つまり水面の圧力分布で表現する線形理論を確立した。

従来この種の理論では翼理論同様船底の垂直方向速度を与えて境界値問題を解いていたがそれでは船底の Rise of Floor が表現出来ない。そこで前半の水線面の縁に沿って吸い込み特異性を分布させる試みを記した。この特異性はいわゆる線積分項であるが, ここではそれが後流側で水が凹むと考えて, 堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にした。この導入によって境界値問題を定式化し, 幾つかの基本解を計算しておく, 自由航走時における船体の沈下量とトリムを求める式が出来る。また抵抗については従来知られている飛沫抵抗, 造波抵抗の他に水頭抵抗と名付けた成分が加わる。これは前述の堰き止めポテンシャルのみに関係する。最後にこの場合にも可逆定理が成立し, 翼理論の Munk の定理に相当するものが得られる事を示した。

参 照 文 献

- 1) 丸尾孟, 水面滑走体の造波抵抗理論, 造船協会々報81号, 1949
- 2) T. Hanaoka, On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory, 9th Japan Nation Congress for Appl. Mech., 1959
- 3) M. Bessho, On the Fundamental Function in the Theory of the Wave-Making Resistance of Ships, Mem. of the Defense Academy vol. 4, No. 2, 1964
- 4) T. Shen, F. Ogilvie, Non-linear hydrodynamic theory of finite-span planing surface, J. of Ship Research, vol. 16, No. 1, 1972
- 5) M. Bessho, Line Integral, Uniqueness and

Diffraction of Wave in the Linearized Theory, Intern. Semi. on Wave Resistance, Tokyo, 1976

- 6) 別所正利, 浅吃水船の2次元造波抵抗理論について, 防衛大学校理工学研究報告投稿中, 1991

付録 A 核関係

原点に吸い込みのある速度ポテンシャルを基本特異性として次のように定義する。

$$T(x, y, z) = - \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos \theta + y \sin \theta)} dk d\theta}{k \cos^2 \theta - K + \mu i \cos \theta} \quad (A.1)$$

これは著者の前に定義した関数記号を使えば³⁾

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi} O_{\frac{1}{2}}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) \quad (A.2)$$

となる。

先ず次の微分方程式を満たす。

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial}{\partial z} \right) T(x, y, z) &= - \frac{z}{2\pi r^3} \\ r &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

この関数は x が正ならば単調で, x の負の半面にケルビン波系を有すし, x が負の時は

$$T(-x, y, z) = T(x, y, z) - \frac{2}{\pi} P_{-2}(Kx, Ky, -Kz), \quad x > 0 \quad (A.4)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} &P_{-2n}(Kx, Ky, -Kz) \\ &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{Kz \sec^2 \theta} \cos(Ky \sec^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad \cdot \sin(Kx \sec \theta) \sec^{2n} \theta d\theta \\ &P_{-2n-1}(Kx, Ky, -Kz) \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{Kz \sec^2 \theta} \cos(Ky \sec^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad \cdot \cos(Kx \sec \theta) \sec^{2n+1} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

原点の近くでは

$$T(x, y, 0) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \quad (A.6)$$

上流側では

$$T(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{2\pi Kr} \quad (A.7)$$

数値計算には次の分解が便利である。

$$\left. \begin{aligned} O_n^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) \\ = Q_n(Kx, Ky, -Kz) \\ + P_n(Kx, Ky, -Kz) \\ O_n^{(1)}(-Kx, Ky, -Kz) \\ = (-1)^n [O_n^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) \\ - 2P_n(Kx, Ky, -Kz)] \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

特に $z \rightarrow 0$ ではつぎの積分表示が出来る。

$$\left. \begin{aligned} Q_{-2n}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-Ky \sin u \cos u} \\ \cdot \cos(Kx \sin u) \sin^{2n-1} u \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2-\phi} \sin[Kx \sec \theta \\ - Ky \sec \theta \tan \theta] \sec^{2n} \theta d\theta \\ \tan \phi = \frac{y}{x}, \frac{\pi}{2} > \phi > 0, x > 0 \\ Q_{-2n-1}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-Ky \sin u \cos u} \\ \cdot \sin(Kx \sin u) \sin^{2n} u du \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2-\phi} \cos[K(x \\ - y \tan \theta) \sec \theta] \sec^{2n+1} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (A.9)$$

微分は

$$T_x(x, y, z) = \frac{K}{\pi} [O_3^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + q_{-3}(Kx, Ky, -Kz)] \quad (A.10)$$

$$T_z(x, y, z) = -\frac{K}{\pi} [O_4^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + q_{-4}(Kx, Ky, -Kz)] \quad (A.11)$$

$$T_{xz}(x, y, z) = -\frac{K^2}{\pi} [O_5^{(1)} + q_{-5}] - \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} q_{-3} \quad (A.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{\pi} q_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \\ = -\frac{1}{2\pi} \frac{xz}{r\rho^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{\pi} q_{-4}(Kx, Ky, -Kz) \\ = \frac{r^2 y^2 - z^2 x^2}{r\rho^4} \rightarrow \frac{r}{2\pi y^2} \\ \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} q_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \\ = -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{r\rho^2} - \frac{xz^2}{r^2 \rho^4} (\rho^2 + 2r^2) \right] \rightarrow \frac{-x}{2\pi r y^2} \\ q_{-5}(Kx, Ky, -Kz) = - \int^x dx \frac{\partial}{\partial z} q_{-4} \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.13)$$

最後に

$$\begin{aligned} S^*(x, y, z) &= K \int_{-\infty}^x T_x(x, y, z) dx \\ &= -\frac{K}{\pi} O_3^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi \rho^2} \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} S^*(-x, y, z) &= \frac{K}{\pi} O_3^{(1)}(Kx, Ky, Kz) \\ &\quad - \frac{2K}{\pi} P_{-3}(Kx, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi \rho^2} \\ &\rightarrow \frac{z}{\pi \rho^2} - \frac{2K}{\pi} P_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \end{aligned} \quad (A.15)$$

特に

$$S^*(0, y, z) = -\frac{K}{\pi} P_{-3}(0, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi \rho^2} \quad (A.16)$$

$$\begin{aligned} S_x^*(x, y, 0) &= K T_x(x, y, 0) \\ &= K T_x(-x, y, 0) \\ &\quad - \frac{2K^2}{\pi} P_{-4}(Kx, Ky, 0) \end{aligned} \quad (A.17)$$

無限下流側では次の値に漸近する。

$$\left. \begin{aligned} T_x(x, y, z) &\rightarrow \frac{2K}{\pi} P_{-3}(k|x|, Ky, -Kz) \\ T_z(x, y, z) &\rightarrow \frac{2K}{\pi} P_{-4}(K|x|, Ky, -Kz) \\ T_{xz}(x, y, z) &\rightarrow -\frac{2K^2}{\pi} P_{-5}(K|x|, Ky, -Kz) \end{aligned} \right\} \quad (A.18)$$

なお P_{-n} については次の表現も出来る。

$$\begin{aligned} P_{-n}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{i^{n-1}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta} |\sec^n \theta| d\theta \end{aligned} \quad (A.19)$$

付録B 堰き止めポテンシャル

$$\phi(x, y, z) = -K \int_{OF} A(y_F) T(x - x_F, y - y_F, z) dy_F \quad (B.1)$$

$$\zeta(x, y) = \int_{OF} A(y_F) S^*(x - x_F, y - y_F, z) dy_F \quad (B.2)$$

も今、堰き止めポテンシャルと呼んでおこう。(A. 13) により

$$S^*(x - x_F, y - y_F, z) = -K \int_{-\infty}^{x_F} T_z(x - \xi, y - y_F, z) d\xi \quad (B.3)$$

となるから、これは一定圧力が x_F より無限後流まで続くポテンシャルと解される。上流側では

$$S^*(x, y, z) \rightarrow \frac{z}{x \gg 1} \left(1 - \frac{x}{r}\right) \rightarrow 0 \quad (B.4)$$

となり、下流側では (A. 14) のように近似されるから上流側では

$$\zeta(x, y) \rightarrow 0 \quad (B.5)$$

下流側では

$$\begin{aligned} \zeta(-x, y) &\rightarrow -A(y) \\ &- \frac{2K}{\pi} \int_{OF} A(y_F) P_{-3}(Kx - x_F, Ky - y_F, 0) dy_F \end{aligned} \quad (B.6)$$

となって $A(y)$ なる水面の凹みが無限に後流に続いている。自由表面から系外に出て行く流量は

$$\begin{aligned} Q &= - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_x(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(-\infty, y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} A(y) dy \end{aligned} \quad (B.7)$$

抗力は

$$\begin{aligned} D &= K \int \int A(y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ &= K \int_{OF} A(y) [\zeta(x_F, y) + A(y)] dy \end{aligned} \quad (B.8)$$

付録C 飛沫積分

積分 (21) の核の $y = \eta$ 付近の特異性は強いから

$$\begin{aligned} D_S &= \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ &\cdot \iint_F \frac{p(\xi, \eta)(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \iint_F p(\xi, \eta) I(x - \xi) d\xi \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (C.2)$$

のようになると考えられる。

さて

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zx}{\rho^2 r} \right) \rightarrow \frac{x}{y^2 r} \quad (C.3)$$

であつたから元にかえて調和関数である事を考える

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zx}{\rho^2 r} \right) &= - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^x \frac{dx}{r} \\ &= - \frac{x}{r^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^x \frac{dx}{r} \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zx}{\rho^2 r} \right) dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{dy}{r} \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \\ &= \left[\frac{-2xy}{(x^2 + z^2)r} - \frac{2xy}{\rho^2 r} \right]_{y=\infty} \\ &\simeq - \frac{2x}{x^2 + z^2} \xrightarrow{z \rightarrow 0} - \frac{2}{x} \end{aligned} \quad (C.5)$$

それ故

$$D_S = \frac{1}{\pi} \int dy \int p(x, y) dx \int \frac{p(\xi, \eta)}{\xi - x} d\xi \quad (C.6)$$

となり、右辺の x, ξ に関する積分を実行すると

$$D_S = \frac{\pi}{4} \int \sigma^2(y) dy \quad (C.7)$$

$$\sigma(y) = \lim_{x \rightarrow x_F} \left[p(x, y) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_F} \right)^2} \right] \quad (C.8)$$