

動揺しながら前進する2次元浅吃水船に働く流体力について

別 所 正 利

(平成4年4月17日受付；平成4年5月15日再受付)

Hydrodynamical Forces Acting on a Oscillating Two-Dimensional Shallow Draft Ship Advancing with a Constant Speed

By Masatoshi BESSHO

The theory of a two-dimensional shallow draft ship represented by a surface pressure distribution advancing and oscillating in a sea way suffers from the difficulty, that is, if the flow satisfies Kutta's condition at her stern her wetted length must vary and contrarily if her wetted length does not vary Kutta's condition cannot be satisfied. To overcome this difficulty and to construct a consistent theory of a shallow-draft ship, who has a vertical stern and transom stern, the source singularity is introduced and formulas to give hydrodynamical forces acting on the ship are given.

Especially for the resistance augmentation in sea way, a new component, say a head resistance, has appear from this singularity.

1. 序 論

動揺しながら前進する船の境界値問題については定常問題と同様いわゆる線積分項が出て来て、その解釈をめぐって議論が多い⁷⁾⁸⁾。

吃水が充分浅いとして近似的に船は水面の圧力分布で表されるとするとこの線積分項は消えてこの問題はなくなるけれども、一方船尾でクッタの条件を満たすものとする船底表面条件を満足させる事が出来なくなる。あるいは逆に船底表面条件を満たすと、クッタの条件は満足させられない⁵⁾⁶⁾。

滑走平板のようなものについて考えればこれは浸水面の変化を考えに入れて両者を満たすようにする事が出来るが、船首部がほぼ垂直で水線面がほぼ変化しない場合はこの考えではうまく行かない。そこで定常問題で導入した手法、水面における吹き出し特異性（線積分項に対応する）を考えてこの難点をさける為の定式化を試みようとするものである⁹⁾。この特異性は現

象的には船首前面で水を堰き止める、もしくは波を堰き返す事に対応していると考えられるので以下それを堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にする⁹⁾¹⁰⁾。

筆者は先に同じ問題を考え、また浸水長さが変化する場合についても考察したが、普通の船では船尾に浸み点を有する流れは物理的に考え難く、また一方船首が鉛直に近い場合は浸水長はほぼ変化しないので共に現実的でないと考えられる⁵⁾⁶⁾。

本報はそれらの難点を避ける為の試みで浅吃水で船首が垂直で、船尾でタック流出条件を満たすような場合の流体力、抵抗増加等の理論である。

2. 速度ポテンシャルと境界条件¹⁾²⁾⁷⁾

密度 ρ , 前進速度 V , 半船長をそれぞれ単位にとって Fig. 1 のように座標系をとるものとする。

船は前進しつつ、円周波数 ω で動揺するものとし、その速度ポテンシャルを $\phi(x, y)$, 圧力を $p(x)$, 水面変化を $\eta(x)$ とし、慣習に従って複素表示すると、水面ではベルヌーイの定理から

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

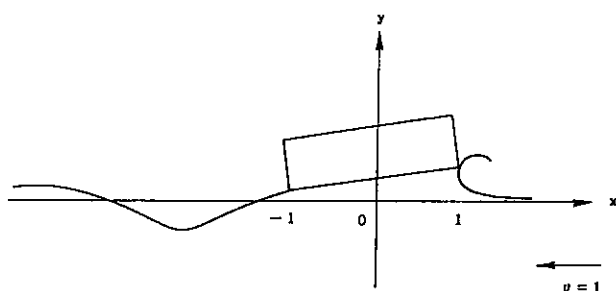


図1 座標系

Fig. 1 Co-Ordinate System

$$\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x, 0) - K\eta(x) = p(x), \quad K = g/U^2 \quad (1)$$

となり、また上向き速度は次のようになる。

$$\phi_y(x, 0) = -\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x) \quad (2)$$

このような条件を満たす速度ポテンシャルはよく知られているが、それに更に前縁に吹き出し特異性を導入して浸水長が変化しなくても後縁の流出条件を満たす事が出来るようにしておく。

このポテンシャルは定常問題では、水を堰き止める効果を表現していると考えられるのでその類推から今の場合も堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にする。そうすると付録の核関数を用いて次のように表される。

$$\phi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) S(x-\xi, y) d\xi + KAT(x-1, y) \quad (3)$$

$$\eta(x) = -\int_{-1}^1 p(\xi) T_y(x-\xi, 0) d\xi + AS^*(x-1, 0) \quad (4)$$

$$\phi_y(x, 0) = \int_{-1}^1 p(\xi) \left[\frac{1}{\pi(\xi-x)} + S'_y(x-\xi, 0) \right] \times d\xi + KAT_y(x-1, 0) \quad (5)$$

境界条件は(4)式または(5)式で指定されるが翼理論におけるように(5)式で指定すると η は $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定になるのでそれを避ける為に堰き止めポテンシャルを導入した訳である。

さて境界条件は船体の曲がりが少ないとすると上下揺れ、縦揺れ共 $y=0$ で指定されどんな船も平板と同じになる。前後揺れについては船型が関係して来るが通常の仮定に従って今は考えない事にする。そうすると問題を解くに必要な解は次表のようになる。

なお今は η を境界条件として(4)式を解くものと考えている。もし ϕ_y を与えて(5)式から解をうるものとする η は $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定となるので注意すべきである。

最後に散乱ポテンシャルについては入射波は

表1 基本解

Table 1 Basic Solution

Mode	Suffix	η	ϕ_y
heave	h	1	$-i\omega$
pitch	τ	ix	$i + \omega x$
stationary	0	$-\exp[i\omega(x-1)]$	0
diffraction	$j(1,2)$	$-\exp(iK_j x)$	$i(\omega - K_j)\exp(iK_j x)$
	$j(3,4)$	$-\exp(-iK_j x)$	$i(\omega + K_j) \times \exp(-iK_j x)$

$$\eta_{Lj}(x) = e^{iK_j x} \quad (6)$$

とし、 $\omega > \frac{K}{4}$ ならば $j=1, 2$ のみ、

$\omega > \frac{K}{4}$ ならば $j=1 \sim 4$ となる (付録A 参照)

これらの解はすべて下添字によって区別する事にする。

上表からわかるように上棒で複素共役値を示すものとする次の関係がある。

$$\eta(-x) = \overline{\eta(x)}, \quad \phi_y(-x, 0) = -\overline{\phi_y(x, 0)}, \quad \eta_x(-x) = -\overline{\eta_x(x)} \quad (7)$$

それ故入射波 η_j の中で動揺する場合の解は上下揺れ、縦揺れの振幅を h, τ として

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= h\phi_h(x, y) + \tau\phi_\tau(x, y) + \phi_j(x, y) \\ p(x) &= hp_h(x) + \tau p_\tau(x) + p_j(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

のように書ける。

無限遠方では(4)式および(A・24)式により

$$\begin{aligned} \eta(x)_{x \rightarrow -1} &= \frac{iK_1}{K_2 - K_1} H(-K_1) e^{iK_1 x} \\ &\quad - \frac{iK_2}{K_2 - K_1} H(-K_2) e^{iK_2 x} \\ &\quad + \frac{iK_4}{K_4 - K_2} H(K_4) e^{-iK_4 x} - A e^{i\omega(x-1)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta(x)_{x \rightarrow 1} = \frac{iK_3}{K_4 - K_3} H(K_3) e^{-iK_3 x} \quad (10)$$

となるが $\omega > \frac{K}{4}$ では K_3, K_4 の項はない。

ここに

$$\left. \begin{aligned} H(\pm K_1) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_1 x} dx - i \frac{\omega - K_1}{K_1} A e^{\pm iK_1} \\ H(\pm K_2) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_2 x} dx - i \frac{\omega - K_2}{K_2} A e^{\pm iK_2} \\ H(\pm K_3) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_3 x} dx - i \frac{\omega + K_3}{K_3} A e^{\pm iK_3} \\ H(\pm K_4) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_4 x} dx - i \frac{\omega - K_4}{K_4} A e^{\pm iK_4} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. 力, モーメント, 運動方程式

揚力, モーメントは次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 p(x) dx \\ M &= \int_{-1}^1 p(x) x dx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(8)式の解を代入すると入射波の圧力を考えて

$$\left. \begin{aligned} L &= hL_h + \tau L_\tau + L_j \\ M &= hM_h + \tau M_\tau + M_j \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となるから, 船の質量を m , 慣性モーメントを J とすると運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} (-\omega^2 m - L_h)h - \tau L_\tau &= L_j \\ -M_h h - (\omega^2 J + M_\tau)\tau &= M_j \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と与えられる故解は直ちに

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\omega^2 J + M_\tau)L_j + L_\tau M_j \right] \\ \tau &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\omega^2 m + L_h)M_j + M_h L_j \right] \\ \Delta &= (\omega^2 m + L_h)(\omega^2 J + M_\tau) - L_\tau M_h \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。

4. 可逆定理

可逆定理には花岡の第1, 第2定理があるが今は第2定理は少し複雑であり有用でないようなので第1定理についてのみに述べる²⁾⁵⁾⁶⁾。

その際従来は逆流の概念を導入したけれど, 2次元問題ではそれは x の符号を変えただけの事になるのでここでは簡単の為にそれを導入しないで考えよう。

さて先端特異性は(A・9)式から判るように先端から無限後方まで続く圧力分布と等価であるから花岡の第1定理は ϕ, ϕ' なる2つのポテンシャルについて

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p(x) \phi'_y(-x) dx + KA \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \phi'_y(-x) dx \\ &= \int_{-1}^1 p'(x) \phi_y(-x) dx + KA' \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \phi_y(-x) dx \end{aligned}$$

となるが水面では(2)が常に成立つので左右両辺の第2項は直ちに積分出来て

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p(x) \phi'_y(-x) dx - KA \eta'(-1) \\ &= \int_{-1}^1 p'(x) \phi_y(-x) dx - KA' \eta(-1) \end{aligned} \quad (16)$$

なる定理を得る。

ϕ' として Table 1 の解 (クッタの流出条件を満たす) を導入すると次のような等式を得る。

$$KA = \int_{-1}^1 p_0(x) \phi_y(-x) dx - KA_0 \eta(-1) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} i\omega \int_{-1}^1 p(x) dx - KA &= \int_{-1}^1 p_h(x) \phi_y(-x) dx \\ &- KA_h \eta(-1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x)(i - \omega x) dx + iKA &= \int_{-1}^1 p_\tau(x) \phi_y(-x) dx \\ &- KA_\tau \eta(-1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} i(\omega - K_j) \int_{-1}^1 p(x) e^{-iK_j x} dx + KA e^{-iK_j} \\ &= i(\omega - K_j) H(-K_j) \\ &= \int_{-1}^1 p_j(x) \phi_y(-x) dx - KA_j \eta(-1) \end{aligned} \quad (20)$$

上式は $j=1, 2$ に対するもので $j=3, 4$ については K_j の符号をかえるものとする。

これらの内(18), (19)式は Munk の定理の, (20)式は Haskind の定理の拡張であり, 式中の A は(17)式で与えられる。

さらに境界条件が

$$\phi_y(x) = \frac{1}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \right], \quad x = -\cos \theta \quad (21)$$

あるいは

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{\phi_y(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1, \quad \phi_y(x) = 0 \text{ for } 1 > x > \varepsilon - 1 \quad (21')$$

なる問題の解を p_s とすると

$$\sigma - KA \eta_s(-1) = \int_{-1}^1 p_s(x) \phi_y(-1) dx - KA_s \eta(-1) \quad (22)$$

となるので, この解から飛沫の強さがわかる。

(17)~(20)の式では $\eta(x)$ が与えられた境界条件と考えている。もし $\phi_s(x)$ が与えられたものとする, η は(2)式の微分方程式の解として求められる故 $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定であるので注意すべきである。従って(22)式の場合(21)式の境界条件によって(5)式を解いて p_s を求め, それを(4)式に代入して η_s を求める事になる。最後に一応第2定理を記しておく。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p(x) \eta'(-x) dx + A \left[\phi'(-1, 0) \right. \\ & \quad \left. - e^{-i\omega} \int_{-1}^1 p'(x) e^{-i\omega x} dx \right] \\ &= \int_{-1}^1 p'(x) \eta(-x) dx + A \left[\phi(-1, 0) \right. \\ & \quad \left. - e^{-i\omega} \int_{-1}^1 p(x) e^{-i\omega x} dx \right] \end{aligned} \quad (23)$$

5. 仕事, 減衰, 波浪中抵抗増加

さて次の積分を考えよう。

$$W(p, p') = \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\phi'_y(x)} dx + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \phi_y(x) dx \right] + I(p, p') \quad (24)$$

$$\begin{aligned} I(p, p') &= \frac{KA}{4} \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\phi'_y(x)} dx \\ &\quad + \frac{KA'}{4} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \phi_y(x) dx \\ &= \frac{K}{2} A \overline{A'} + \frac{K}{4} [A \overline{\eta'(1)} + \overline{A'} \eta(1)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$D(p, p') = \frac{i\omega}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\eta'(x)} dx - \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \eta(x) dx \right] + J(p, p') \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J(p, p') &= \frac{i\omega K}{4} \left[A \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\eta'(x)} dx - \overline{A'} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \eta(x) dx \right] \\ &= -\frac{i\omega A}{4} \left[\overline{\phi}(1, 0) + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} e^{i(\omega-1)x} dx \right] \\ &\quad + \frac{i\omega \overline{A'}}{4} \left[\phi(1, 0) + \int_{-1}^1 p(x) e^{-i\omega(x-1)} dx \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R(p, p') &= W(p, p') - D(p, p') \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\eta'_x(x)} dx + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \eta_x(x) dx \right] + F(p, p') \end{aligned} \quad (28)$$

$$F(p, p') = \frac{K}{4} \left[A \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\eta'_x(x)} dx + \overline{A'} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \eta_x(x) dx \right] \quad (29)$$

p と p' が等しければ W, D, R はそれぞれ水に与えられるパワー、減衰、抵抗である(前進速度 $U=1$ としてある事に注意)。

先端特異性を考えなければ I, J, F は考えなくて良く従来の式に一致する。

さて ϕ_y, η 等とその複素共役値の関係(式(A・25)～(A・29)式)に代入して上式を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} W(p, p') &= \frac{\pi}{8} \sigma \overline{\sigma'} + \frac{K}{4} A \overline{A'} + \frac{1}{4(K_2 - K_1)} \\ &\quad \times [K_1(\omega - K_1)H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) - K_2(\omega - K_2)H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{1}{4(K_4 - K_3)} [K_3(\omega + K_3)H(K_3)\overline{H'}(K_3) + K_4(\omega + K_4)H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D(p, p') &= \frac{\omega}{4(K_2 - K_1)} [K_1 H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) - K_2 H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{\omega}{4(K_4 - K_3)} [K_3 H(K_3)\overline{H'}(K_3) + K_4 H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} R(p, p') &= \frac{\pi}{8} \sigma \overline{\sigma'} + \frac{K}{4} A \overline{A'} \\ &\quad + \frac{1}{4(K_2 - K_1)} [K_1^2 H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) + K_2^2 H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{1}{4(K_4 - K_3)} [K_3^2 H(K_3)\overline{H'}(K_3) + K_4^2 H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (32)$$

なお以上の式で $\omega > \frac{K}{4}$ ならば K_3, K_4 を含む項は消える。

$$\left. \begin{aligned} p' &= p = h p_h + \tau p_\tau + p_j \\ \phi' &= \phi = h \phi_h + \tau \phi_\tau + \phi_j \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

とすると(32)式は単位入射波 η_j があるときの浅吃水船の波浪中の抵抗増加を与える式となる。その第1項は飛沫抵抗、第3項は造波抵抗であり、第2項は定常問題で水頭抵抗と名付けたものである⁹⁾¹⁰⁾。

6. 結 論

近似的に水面の圧力分布で表現されるような浅吃水船についてはそれが滑走する、つまり船尾でクッタの流出条件を満たすならば理論上浸水長が変化しなければならず、またそうでない、つまり後端に鋭み点を持つとすれば浸水長が変わらなくても良いが物理的に実現しそうな流れになると考えられる。

本報は先端に吹き出し特異点を置いて浸水長は変化しないで船尾の流出条件を満たす解を求め、その場合の流体力、抵抗等の理論式を求めたものである。

この先端吹き出しポテンシャルを今仮に堰き止めポテンシャルと呼ぶが、それは船尾が垂直になっている事に対応していると考えられ、また後流側に定在波を残している。この導入によって波浪中抵抗増加については従来の飛沫抵抗、造波抵抗の他に水頭抵抗と仮に呼ぶ成分が出て来る。

以上の事からこの理論は Transom stern を持ち船首が垂直な船の波浪中動揺に関するものと考えられるが、船尾形状が典型的な Transom 型でない場合も上述のようにそこで鋭み点を持つ流れは考え難いのでこの理論はかなり一般性を持つものと考えられる。

またそのような船では定常走航はフルード数0.61以上では不可能である事が理論上わかっており、この速度はまた動揺問題を解いて安定性を調べた結果とも一致している⁷⁾¹⁰⁾。いずれにしてもこの先端吹き出し特異点の導入によって始めて整合性を持った線形理論を構築する事が出来、そこから水頭抵抗と言う新しい成分が出て来ると言うのがもし正しいとすると実際上も大変興味深いと考えられる。

参考文献

- 1) 花岡達郎：非定常造波抵抗理論(その1)，造船協会論文集，89号，昭和26年
- 2) Hanaoka, T.: On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory, Proc. 9-th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech., 1959
- 3) Haskind, M.D.: Unsteady gliding on an undulating surface of a heavy fluid, Prikl. Math. Mech., vol. 19, 1955
- 4) M. Bessho & K. Nomura, A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Mem. of the Defense Academy vol. 10 No. 1, 1970
- 5) 別所正利，動揺する2次元浅吃水船に働く流体力の理論について，関西造船協会誌第165号 昭和52年6月
- 6) 別所正利，動揺する2次元滑走板に働く流体力について，関西造船協会誌第165号，昭和52年6月
- 7) 別所正利，鈴木勝雄，2次元動揺滑走板の安定性について，防衛大学校理工学研究報告 第25巻1号，昭和62年3月
- 8) 柏木正，前進しながら動揺する船の流体力学における2，3の問題点，九州大学応用力学研究所報 第35号，昭和62年12月
- 9) 別所正利，浅吃水船の2次元造波抵抗理論について，防衛大学校理工学研究報告 第29巻1号 平成3年9月
- 10) 別所正利，佐久間俊，2次元浅吃水船の航走姿勢について，関西造船協会 平成4年 春期講演会予稿集

付録A 核関数⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾

原点に吹き出し特異点のある速度ポテンシャルと流れ関数は次式で与えられる。

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right] e^{ky} dk \quad (A1)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right] e^{ky} dk \quad (A2)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} G(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= (k - \omega)^2 - kK = (k - K_1)(k - K_2) \\ B(k) &= (k + \omega)^2 - kK = (k - K_3)(k - K_4) \end{aligned} \right\} K = g \quad (A4)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \omega e^{\mp \alpha}, \tanh \alpha = \frac{\sqrt{K^2 + \omega K}}{2\omega + K} \\ K_2 & \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \begin{cases} \omega e^{\mp \beta}, \tanh \beta = \frac{\sqrt{K^2 - 4\omega K}}{K - 2\omega}, & f \text{ or } K > 4\omega \\ \omega e^{\mp \beta'}, \tanh \beta' = \frac{\sqrt{4\omega K - K^2}}{K - 2\omega}, & f \text{ or } K < 4\omega \end{cases} \\ K_4 & \end{aligned} \right\} \quad (A6)$$

であるが、これからの根の複素平面上の位置は図2に示す通りである。

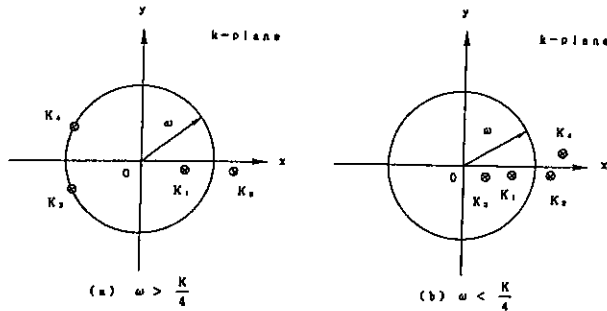


図2 根の位置

Fig. 2 Location of roots

これらの関数は次の微分方程式を満たす。

$$\left[\left(\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + K \frac{\partial}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} T(x, y) \\ G(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \\ -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} \end{Bmatrix} \quad (A7)$$

補助的に次の2つの関数を導入する。

$$S(x, y) = \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x, y) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} S^*(x, y) &= S(x, y) + \frac{e^{i\omega x}}{\pi} \int_x^\infty \frac{ye^{-i\omega \xi}}{\xi^2 + y^2} d\xi \\ &= -K \int_0^\infty e^{i\omega \xi} T_y(x - \xi, y) d\xi \\ y \rightarrow -0 \quad S(x, 0) &= \begin{cases} 0 & f \text{ or } x > 0 \\ e^{i\omega x} f & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A9)$$

よく知られているようにこれらの積分はよく知られた指数積分である。以下特に原点近傍の近似値を中心にその値を調べる事にする。

そこで更に

$$\left. \begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikx+ky}}{k - K_j} dk, \quad j=1, 2 \\ J_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikx+ky}}{k - K_j} dk, \quad j=3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (A10)$$

なる積分を定義しておくこれらは図2の根の位置を考えて文献(7)によって次のように表される。

$$I_j = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} [g(K_j \bar{z}) - if(K_j \bar{z})], & \bar{z} = x - iy, \\ & f \text{ or } x > 0 \\ \frac{1}{2\pi} [g(K_j \bar{z}) + if(-K_j \bar{z})] - ie^{iK_j z}, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \quad (A11)$$

J_j は ω と K の比により、少し表現が異なり次のようになる。なお簡単の為に $y=0$ の場合を記す事にする。

先ず $\omega < K/4$ では (K_3, K_4 は実で)

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} [g(K_3|x|) \pm if(K_3|x|)] \\ &+ \begin{cases} -ie^{iK_3 x}, & f \text{ or } x > 0 \\ 0, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(K_4|x|) \pm if(K_4|x|)] \\ &+ \begin{cases} 0, & f \text{ or } x > 0 \\ ie^{-iK_4 x}, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A13)$$

次に $\frac{K}{2} > \omega > \frac{K}{4}$ では ($\beta' < \frac{\pi}{2}$) ($K_3 K_4$ は複素数の時)

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{-i\beta'}) \pm if(\omega|x|e^{-i\beta'})] \\ &+ \begin{cases} -ie^{-iK_3 x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A14)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{i\beta'}) \pm if(\omega|x|e^{i\beta'})] \\ &+ \begin{cases} 0, & x > 0 \\ ie^{-iK_4 x}, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A15)$$

最後に $\omega > \frac{K}{4}$ では $(\beta' > \frac{\pi}{2})$

$$\left. \begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{-i\theta}) \mp if(\omega|x|e^{-i\theta})] \\ J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{i\theta}) \mp if(\omega|x|e^{i\theta})] \end{aligned} \right\} \quad (A16)$$

これらの I_j, J_j 関数によって核関数は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{I_1 - I_2}{K_2 - K_1} + \frac{J_3 - J_4}{K_4 - K_3} \\ G &= i \left(\frac{I_1 - I_2}{K_2 - K_1} - \frac{J_3 - J_4}{K_4 - K_3} \right) \\ S &= i \left[\frac{(\omega - K_1)I_1 - (\omega - K_2)I_2}{K_2 - K_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega + K_3)J_3 - (\omega + K_4)J_4}{K_4 - K_3} \right] \\ T_y &= \frac{K_1 I_1 - K_2 I_2}{K_2 - K_1} + \frac{K_3 J_3 - K_4 J_4}{K_4 - K_3} \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + i \left[\frac{(\omega - K_1)K_1 I_1 - (\omega - K_2)K_2 I_2}{K_2 - K_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega + K_3)K_3 J_3 - (\omega + K_4)K_4 J_4}{K_4 - K_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (A17)$$

さて f, g の極限值は次のようになる。

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}, \quad g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\log Cz, \quad \log C = .5772 \quad (A18)$$

$$f(z) \xrightarrow{z \gg 1} \frac{1}{z}, \quad g(z) \xrightarrow{z \gg 1} \frac{1}{z^2} \quad (A19)$$

(A・12)～(A・18)を使って以下原点の近くの核関数の近似値を計算する。

まず $\omega < \frac{K}{4}$ では x の正負に応じて

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} + \frac{\beta - \pi i}{2\pi\omega \sinh \beta} \\ G &= \frac{i\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} - \frac{i(\beta - \pi i)}{2\pi\omega \sinh \beta} \\ S &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\alpha(1 - \cosh \alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i(\beta - \pi i)(1 + \cosh \beta)}{2\pi \sinh \beta} \\ -T_x &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi i} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{i(\beta - \pi)}{2\pi} \coth \beta \\ T_y &= \frac{1}{\pi} \log |C\omega x| + \frac{i}{2} + \frac{\alpha}{2\pi} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{\beta - \pi i}{2\pi} \coth \beta \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{\omega}{\pi i} \log |\omega x| + \frac{1}{2}(\omega + K) \\ &\quad + \frac{\omega}{2} + \frac{i\alpha\omega(\cosh \alpha - \cosh 2\alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i\omega(\beta - \pi i)(\cosh \beta - \cosh 2\beta)}{2\pi \sinh \beta} \end{aligned} \right\} \quad (A20)$$

次に $\frac{K}{2} > \omega > \frac{K}{4}$ では $(\beta' < \frac{\pi}{2})$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} + \frac{\beta' - \pi}{2\pi\omega \sin \beta'} \\ G &= \frac{i\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} - \frac{i(\beta' - \pi)}{2\pi\omega \sin \beta'} \\ S &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\alpha(1 - \cosh \alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i(\beta' - \pi)(1 + \cos \beta')}{2\pi \sin \beta'} \\ -T_x &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi i} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{i(\beta' - \pi)}{2\pi} \cot \beta' \\ T_y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \log |C\omega x| + \frac{\alpha}{2\pi} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{\beta' - \pi}{2\pi} \cot \beta' \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{\omega}{\pi i} \log |C\omega x| + \frac{K + \omega}{2} \\ &\quad + \frac{K}{2} + \frac{\omega\alpha(\cosh \alpha - \cosh 2\alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{\omega(\beta' - \pi i)(\cos \beta' - \cos 2\beta')}{2\pi \sin \beta'} \end{aligned} \right\} \quad (A21)$$

最後に $\omega > \frac{K}{2} \left(\beta' > \frac{\pi}{2} \right)$ について計算して見ると (A・21) に等しくなるので $\omega > \frac{K}{4}$ ならば (A・21) で良い事がわかる。

また S^* については

$$S^*(x, 0) \rightarrow S(x, 0) - \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A22})$$

であるから (A・20), (A・21) より $S^*(x, 0)$ は $x=0$ において連続である。

また

$$S^*(x, y) = S_y(x, y) + \frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} \quad (\text{A23})$$

とにおいて S_y から右辺の特異性除いたものを定義しておく。最後に充分後流側での近似値を示すが簡単の為に $\omega > \frac{K}{4}$ の場合のみ記す。

$$\left. \begin{aligned} T_x &\approx -\frac{i}{K_2 - K_1} (e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ G &\approx \frac{1}{K_2 - K_1} (e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ S &\approx \frac{1}{K_2 - K_1} [(\omega - K_1)e^{iK_1x} - (\omega - K_2)e^{iK_2x}] \\ T_y &\approx \frac{i}{K_2 - K_1} [K_1e^{iK_1x} - K_2e^{iK_2x}] \\ S^* &\approx S - e^{i\omega x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A24})$$

なおそれぞれの複素共役値との間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} T(x, 0) - \overline{T(-x, 0)} &= -\frac{i}{K_2 - K_1} (e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ &\quad - \frac{i}{K_4 - K_3} (e^{iK_3x} + e^{iK_4x}) \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

$$\begin{aligned} T_y(x, 0) - \overline{T_y(-x, 0)} &= -\frac{i}{K_2 - K_1} (K_1e^{iK_1x} - K_2e^{iK_2x}) \\ &\quad - \frac{i}{K_4 - K_3} (K_3e^{-iK_3x} + K_4e^{-iK_4x}) \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

$$\begin{aligned} S(x, 0) + \overline{S(-x, 0)} &= \frac{1}{K_2 - K_1} [(\omega - K_1)e^{iK_1x} \\ &\quad - (\omega - K_2)e^{iK_2x}] + \frac{1}{K_4 - K_3} \\ &\quad [(\omega + K_3)e^{-iK_3x} \\ &\quad + (\omega + K_4)e^{-iK_4x}] \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

$$S^*(x, 0) + \overline{S^*(-x, 0)} = S(x, 0) + \overline{S(-x, 0)} - e^{i\omega x} \quad (\text{A28})$$

$$\begin{aligned} S_y(x, 0) + \overline{S_y(-x, 0)} &= \frac{1}{K_2 - K_1} [K_1(\omega - K_1)e^{iK_1x} \\ &\quad - K_2(\omega - K_2)e^{iK_2x}] \\ &\quad + \frac{1}{K_4 - K_3} [K_3(\omega + K_3)e^{-iK_3x} \\ &\quad + K_4(\omega + K_4)e^{-iK_4x}] \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

付録B 堰き止めポテンシャル

その速度ポテンシャルは次のように与えられる。

$$\phi(x, y) = KT(x, y) \quad (\text{B1})$$

それによる水面変化は

$$\eta(x) = S^*(x, 0) \quad (\text{B2})$$

速度は

$$u(x, 0) = -KT_x(x, 0) = K[S(x, 0) - i\omega T(x, 0)] \quad (\text{B3})$$

$$v(x, 0) = -\phi_y(x, 0) = (i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\eta(x) = -KT_y(x, 0) \quad (\text{B4})$$

一方このポテンシャルは原点の吹き出し特異性によるものであるが、一方原点から後流側無限にのびた圧力分布 ($K \exp(i\omega x)$) によるポテンシャルと等価である。無限後流側水面では進行水波の他に (A・9) 式により $-\exp(i\omega x)$ なる水面変位がある。この水面変位は他の水波と異なり、水と共に一様速度で船と共に進む定常的な変位である。

さて水面からの水の出入りは (B・3), (A・3), (A・20), (A・21) 式により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) dx &= -K \int_{-\infty}^{\infty} T_y(x, 0) dx \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x, 0) dx \\ &= K[G(\infty, 0) - G(-\infty, 0)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

となり平均的に水面から水の出入りは無い事になる。それ故 (A・20), (A・21) 式より x 方向の速度は原点で有限で1だけジャンプし、 y 方向速度は無限大となる。これからこの特異性は垂直な壁に当たる流れの線形モデルと考えてよいと思われる。

さてこの流れを起こすパワー等を求めるにはこれが原点から後流への半無限の圧力分布と等価である事を利用すれば次のようにもとめられる。

即ち外力のなすパワーは

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{i\omega K}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega x} \eta(x, 0) - e^{i\omega x} \bar{\eta}(x, 0)] dx \\
 &= \frac{i\omega K}{4} [T(-0, 0) - \overline{T(-0, 0)}] \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{4 \sinh \beta}, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ 0, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B6}$$

水の受けるパワーは

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{K}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega x} v(x, 0) + e^{i\omega x} \overline{v(x, 0)}] dx \\
 &= \frac{K}{4} [S^*(x, 0) + \overline{S^*(x, 0)}]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{2} + \frac{K}{4} \frac{1 + \cosh \beta}{4 \sinh \beta}, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ \frac{K}{2}, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B7}$$

それ故抵抗は

$$R = \frac{W - D}{U} = \begin{cases} \frac{K}{2} + \frac{K}{4} \tanh \beta, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ \frac{K}{2}, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases} \tag{B8}$$

となる。