

一様流れの中の半没円筒および 垂直平板の造波抵抗について

別所正利* 水野俊明**

(昭和37年12月18日受付)

緒 論

造波抵抗の2次元問題は3次元のそれに比してかなり簡単になる一方、流れの様子は3次元問題と非常に異ってきて、とくに我々のように船の問題を目的とする場合は殆んど参考にならないように見えるけれども幾つかの点で興味ある事実を知ることができる。

まず第1節では解析的に解ける場合として半没垂直平板を、第2節では数値解法の例として半没円筒を扱った。

前者の例では幾ら低速になっても吃水線付近で全く鏡像近似とは異っていることがよく判る。また後の例ではとくに流れの不定さに興味がある。

1. 垂直平板

座標軸の原点を水面にとり、 y 軸を垂直上方に正とする。流れは x 軸の負の方向に向い、無限上流で単位速度をもつものとする。平板は y 軸上で原点から垂直下方水中に立ち、単位長さをもつものとする。水面条件を満足する速度ポテンシャルは次のように書けよう¹⁾。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 m(\eta) d\eta \left(\frac{1}{z-i\eta} - \frac{1}{z+i\eta} \right) + \frac{\kappa_0}{\pi i} \int_{-1}^0 m(\eta) d\eta S\{\kappa_0(z+i\eta)\} \quad (1.1)$$

ただし

$$S(\kappa_0 z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-i\kappa z} d\kappa}{\kappa - \kappa_0 - \mu i}, \quad y < 0 \quad (1.2)$$

κ_0 はこの単位系の重力の常数とする。

さて、 S は次の微分方程式を満足する。

$$\left(\frac{d}{dz} + i\kappa_0 \right) S(\kappa_0 z) = -\frac{1}{z} \quad (1.3)$$

そこでこの左辺の演算を(1.1)の両辺に施すと

$$\frac{df}{dz} + i\kappa_0 f = \frac{iz}{\pi} \int_{-1}^0 m(\eta) \eta d\eta \left\{ \frac{\kappa_0}{(\eta^2 + z^2)} - \frac{2}{(\eta^2 + z^2)^2} \right\} \quad (1.4)$$

* 機械工学科教室 助教授

** 機械工学科教室 助手

この実部は水面条件であるから当然水面で消える。然し板の上では消えないで次のような境界条件を満足しなければならない。今流れ函数を ψ とし無限遠で水面下 α の所を流れていた流線が板の上にくると考えれば左辺の実部は

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \kappa_0 \psi = -1 + \kappa_0(y + \alpha), \quad 0 > y > 1 \quad (1.5)$$

さて (1.4) を一度積分して右辺第1項は部分積分して実部をとると、積分は主値の意味に解して、

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_0}{2} y^2 + (\kappa_0 \alpha - 1)y - \alpha \\ &= \frac{\kappa_0}{2\pi} \log |1 - y^2| \int_{-1}^0 m d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \left\{ m(\eta) + \kappa_0 \int_{\eta}^0 m d\eta \right\} \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - y^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

この積分方程式はよく知られた形であってその解は、

$$\begin{aligned} m(y) + \kappa_0 \int_y^0 m dy &= -\frac{\kappa_0}{2} \cot \theta \cos 2\theta - \frac{4}{\pi} (1 - \kappa_0 \alpha) \left\{ \cot \theta - \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \\ &+ \kappa_0 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} - \frac{2}{\pi} \cot \theta \log 2 \right) \int_{-1}^0 m dy + 2\alpha \cot \theta \\ &y = -\cos \theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

問題を簡単にするために板の下端で

$$m(-1) = 0 \quad (1.8)$$

とおこう。そうすればこの条件から α は決ってくるがその前に上の式は

$$\begin{aligned} m(y) + \kappa_0 \int_y^0 m dy &= \kappa_0 \sin \theta \cos \theta + \frac{4}{\pi} (1 - \kappa_0 \alpha) \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \\ &+ \kappa_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta \right) \int_{-1}^0 m dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

となってこれから m を解き、更に右辺第3項の常数を決めれば

$$\left. \begin{aligned} m(-\cos \theta) &= M_1(\theta) + (1 - \kappa_0 \alpha) M_2(\theta), \\ M_1(\theta) &= \kappa_0 \left[C_2(\theta) - \frac{C_2(0)}{C_0(0)} C_0(\theta) \right], \\ M_2(\theta) &= \frac{4}{\pi} \left[C_{-1}(\theta) - \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} C_0(\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C_0(\theta) &= e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} d\vartheta, \\ C_2(\theta) &= -e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} \cos 2\vartheta d\vartheta, \\ C_{-1}(\theta) &= e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) - 1 \right\} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

α は (1.8) の条件からこれらの解を入れて

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} \log 2 + \frac{\kappa_0 \pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{C_2(0)}{C_0(0)} \log 2 \right) \right] \div$$

$$\div \left[1 + \frac{2\kappa_0}{\pi} \left(1 + \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} \log 2 \right) \right] \quad (1.12)$$

これらの函数は虚変数のベッセル函数等で表現できるが (1.11) の不定積分は面倒なのでここでは数値的に積分し、その結果を表 1, 表 2 に示してある。此等で見ると実際の分布の変動は僅かなものであるから、以下式の上で漸近関係を確かめよう。

さて κ_0 が充分小さければ

$$C_0(0) \approx \frac{\pi}{2}, \quad C_2(0) \approx C_{-1}(0) \approx 0, \quad \alpha \approx \frac{2}{\pi} \quad (1.13)$$

$$C_0(\theta) \approx \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad C_2(\theta) \approx \sin \theta \csc \theta, \quad C_{-1}(\theta) \approx \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.14)$$

よって

$$m(-\cos \theta) \approx -\frac{4}{\pi} \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.15)$$

となって、最初に (1.6) 式で κ_0 を省略して得る方程式の解に一致する。

次に κ_0 が充分大きいとすると

$$C_0(0) \approx -C_2(0) \approx -C_{-1}(0) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_0}}, \quad \alpha \approx \pi(1 + \log 4)/8(1 + \log 2) \quad (1.16)$$

充分深い所では $\kappa_0 \sin \theta \gg 1$ として

$$\begin{aligned} C_0(\theta) &\approx \frac{1}{\kappa_0 \sin \theta}, \quad C_2(\theta) \approx -\frac{\cos 2\theta}{\kappa_0 \sin \theta}, \\ C_{-1}(\theta) &\approx \frac{1}{\kappa_0} \left[\log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

よって

$$m(-\cos \theta) \approx 2 \sin \theta - \frac{4}{\pi} \alpha \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.18)$$

この式の右辺第 1 項は (1.6) で形式的に κ_0 の最高次の項のみをとり出して作った方程式の解で、以下鏡像近似解と呼ぶ。うんと浅い所では (1.17) よりむしろ (1.14) が適当とみなされるから

$$m(-\cos \theta) \approx \kappa_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \left[2 - \frac{4}{\pi} \alpha \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \kappa_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \ll 1 \quad (1.18)$$

また後続波の波高から造波抵抗 R を出すと

$$R/4\pi^2 \rho g = \kappa_0^2 \{ F(\kappa_0) + (1 - \kappa_0 \alpha) G(\kappa_0) \}^2 \quad (1.20)$$

$$F(\kappa_0) + (1 - \kappa_0 \alpha) G(\kappa_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(-\cos \theta) e^{-\kappa_0 \csc \theta} \sin \theta d\theta \quad (1.21)$$

$$\left. \begin{aligned} F(\kappa_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2\theta + \frac{C_2(0)}{C_0(0)} \right) (e^{-\kappa_0 \csc \theta} - e^{-2\kappa_0 + \kappa_0 \csc \theta}) d\theta \\ G(\kappa_0) &= \frac{1}{\pi^2 \kappa_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} \right\} (e^{-\kappa_0 \csc \theta} - e^{-2\kappa_0 + \kappa_0 \csc \theta}) d\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

表 1

	$\theta(\text{indeg})/\kappa_0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	4.0	$100 \times \frac{1}{2 \sin \theta}$
$M_1(\theta) \times 10^3$	90.0	0	0	0	0	0	0	0	2,000
	82.5	33	69	106	145	227	311	650	1,983
	75.0	64	130	197	266	403	536	995	1,932
	60.0	108	214	317	416	602	767	1,225	1,732
	45.0	122	237	344	444	620	766	1,112	1,414
	30.0	104	199	285	363	496	599	823	1,000
	15.0	59	113	161	203	273	326	434	518
	7.5	31	58	82	103	138	164	216	261
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_2(\theta) \times 10^3$					$\left[1000 \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \downarrow$				
	90.0	0	0	0	0	0	0	0	0
	82.5	457	460	462	463	463	460	429	453
	75.0	667	664	659	652	635	615	514	668
	60.0	817	793	768	742	689	635	446	838
	45.0	756	719	681	645	575	510	319	794
	30.0	567	530	495	461	399	346	202	606
	15.0	302	279	258	238	202	173	97	326
	7.5	153	141	130	120	101	86	48	166
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2

$m(-\cos \theta) \times 1000$								
$\theta(\text{indeg})/\kappa_0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	4.0	
90.0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha(\kappa_0=0)$ $= \frac{2}{\pi}$ $= 0.6366$ $\alpha(\kappa_0=\infty)$ $= 0.5535$
82.5	418	385	353	324	272	226	96	
75.0	625	586	549	518	464	422	331	
60.0	795	759	727	703	669	649	649	
45.0	759	731	708	694	676	672	700	
30.0	581	563	549	542	534	535	562	
15.0	314	304	298	295	292	294	309	
7.5	160	155	151	150	149	148	154	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1000α	632	626	619	613	602	593	573	
$10^4 \times F(\kappa_0)$	113	195	251	289	327	336	279	
$10^4 \times G(\kappa_0)$	863	740	638	553	421	327	141	
$10^4 \times F_0(\kappa_0)$	2253	2039	1853	1691	1426	1220	740	
$10^4 \times G_0(\kappa_0)$	888	782	692	614	490	396	191	
$10^5 \times R/\rho g$	109	305	487	624	753	747	365	

特に κ_0 が充分大きければ

$$F(\kappa_0) \approx \frac{1}{2\pi\kappa_0}, \quad G(\kappa_0) \approx \frac{1}{\pi^2\kappa_0^2} (\log 2\gamma\kappa_0 - 2) \\ \log \gamma = C = \text{オイラーの常数} \quad (1.23)$$

よって

$$R/\rho g \approx \left\{ 1 + \frac{2}{\pi\kappa_0} (1 - \kappa_0\alpha) (\log 2\gamma\kappa_0 - 2) \right\}^2 \quad (1.24)$$

ただし α は (1.16) で与えられるものとする。

また (1.21) でそれぞれ第 1 近似値を入れれば

$$\left. \begin{aligned} F_0(\kappa_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta e^{-\kappa_0 \cos \theta} d\theta \xrightarrow{\kappa_0 \gg 1} \frac{1}{\pi\kappa_0} \\ G_0(\kappa_0) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) e^{-\kappa_0 \cos \theta} \sin \theta d\theta \xrightarrow{\kappa_0 \gg 1} \frac{2}{\pi^2\kappa_0^2} (\log 2\gamma\kappa_0 - 1) \end{aligned} \right\}$$

此等の値は表 2 に示す通りである。此等の計算は (1.21) 式により表 1 の値から数値積分して求めた。

2. 半没円筒

座標は前と同じにとり単位半幅の円筒の中心が原点にあるものとする。速度ポテンシャルは m を実函数として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{m(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{m(\zeta)}{\bar{\zeta} - z} d\bar{\zeta} \\ - \frac{\kappa_0}{\pi i} \int_{-1}^1 m(\zeta) d\bar{\zeta} S\{\kappa_0(z - \bar{\zeta})\} \quad (2.1)$$

$\bar{\zeta}$ は ζ の共軛複素数とし、 S は (1.2) 式によるものとする。

円筒の上でこの積分の虚部を求めれば左辺は流れ函数となるから、前節と同じく無限遠の水面下 α の流線が円筒の上にくるものとする

$$2(\sin \theta + \alpha) = m(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 m(\vartheta) \{1 + K(\theta, \vartheta)\} d\vartheta \quad (2.2)$$

$$x + iy = e^{i\theta}, \quad \bar{\zeta} = e^{-i\vartheta}, \quad -\pi < \theta < 0$$

$$\left. \begin{aligned} K(\theta, \vartheta) &= 2\kappa_0 \{B(\theta, \vartheta) \cos \vartheta - A(\theta, \vartheta) \sin \vartheta\} \\ S\{\kappa_0(z - \bar{\zeta})\} &= A(\theta, \vartheta) + iB(\theta, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)^{11}$$

此等の函数値は文献 2 等に詳しい表があるが、今必要な部分では間隔が粗いのでここでは展開式から直接計算した。(2.2) を解くに当っては円筒上に 30° おきに 7 個の点をとって (2.2) の右辺の積分はシンプソン法則で積分して一次方程式とし、これを解いて求めた。 κ_0 が 2 以上では水面の近くで点が足りないようであるので計算は $\kappa_0 = 2$ で止めた。また (2.2) の解は左辺 $2 \sin \theta$ のものと 2α のものとはそれぞれ独立に求めて $2 \sin \theta$ に対する解を m , $\alpha = 1$ に対する解を n と記して表 3 にその結果を示した。

さて、(2.2) 式において κ_0 が充分小さければ常に

$$K(\theta, \vartheta) \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

となるから

表 3

	$\theta(\text{indeg})$ $/\kappa_0$	0.2	0.8	1.0	1.2	1.5	1.6	2.0
$m(\theta)$	0	7.91	35.00	76.6	131.4	23.9	49.91	16.00
	- 30	6.31	23.95	49.0	77.0	37.1	23.46	5.44
	- 60	5.13	15.64	29.0	39.8	13.9	7.34	- 0.32
	- 90	4.50	8.18	10.9	7.4	- 4.4	- 4.81	- 3.84
	- 120	4.49	0.52	- 8.3	- 26.1	- 21.2	- 15.21	- 5.65
	- 150	5.13	- 7.82	- 31.2	- 67.2	- 39.8	- 25.64	- 5.54
	- 180	6.41	-14.97	- 57.4	-123.0	- 69.9	- 43.5	- 5.07
$n(\theta)$	0	-11.00	- 72.1	-173.1	-320.9	-199.7	-139.3	-50.3
	- 30	- 9.99	- 50.7	-112.1	-189.5	-101.8	- 67.0	-18.8
	- 60	- 9.23	- 34.6	- 67.9	- 99.8	- 40.3	- 23.3	- 2.1
	- 90	- 8.61	- 19.2	- 27.1	- 20.7	9.0	10.5	8.7
	- 120	- 8.14	- 2.3	17.5	62.6	55.7	40.9	15.7
	- 150	- 7.98	17.1	71.9	165.5	108.4	72.8	17.9
	- 180	- 8.46	34.5	134.2	305.9	193.8	126.7	20.0

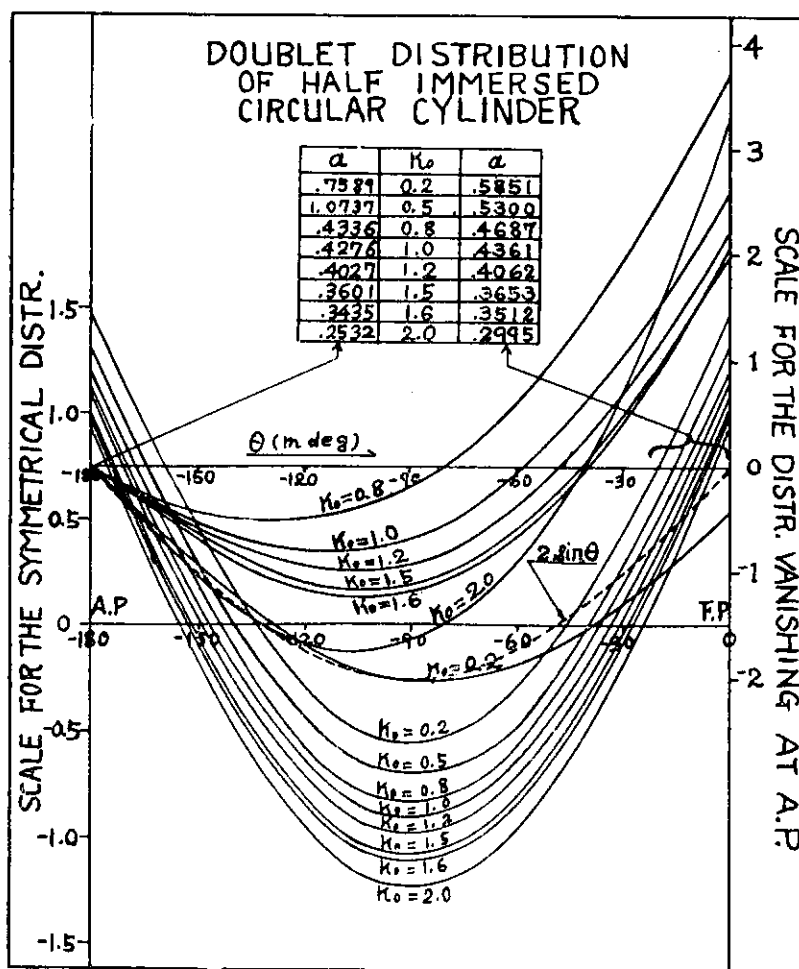


図 1

$$2(\sin \theta + \alpha) = m(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 m(\vartheta) d\vartheta \quad (2.5)$$

となつてこの解は

$$m(\theta) = 2 \sin \theta + C, \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \quad (2.6)$$

となる。ただし C は任意常数である。

κ_0 が充分大きい時で、かつ波長に比して深い所では

$$K(\theta, \vartheta) \rightarrow -1, \quad \kappa_0 |y + \eta| \gg 1 \quad (2.7)$$

然しこの場合水面の近くでは上の関係は成立しないで、後端は波の影響を受ける点を除けば、前節の場合と同じような関係にあるようである。(2.7) が仮に水面迄成立つとすれば

$$m(\theta) = 2 \sin \theta + 2\alpha \quad (2.8)$$

これが鏡像近似解である。

さて α , あるいは円筒上にどの流線がくるかを決めるのは全く物理的な問題であろうが、ここでは特に後端で m が零になるような場合と、前後端で等しくなる場合を計算して図 1 に示した。表 3 では全く整理のつかなかつた解も夫々綺麗に揃ってきて、特に後者の場合は略々計算誤差の範囲内で確実に対称となり、かつ (2.6) 式の形 (ただし C , α は速度によって変る) で表わされる事が判った。

次に造波抵抗は後続波の波高から

$$R/4\pi^2\rho g = \kappa_0^2 |F_1(\kappa_0) + iF_2(\kappa_0) + \alpha\{G_1(\kappa_0) + iG_2(\kappa_0)\}|^2 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} F_1(\kappa_0) + iF_2(\kappa_0) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^0 m(\zeta) e^{-i\kappa_0\zeta} d\zeta \\ G_1(\kappa_0) + iG_2(\kappa_0) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^0 n(\zeta) e^{-i\kappa_0\zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.9) 式右辺は絶対値の自乗をとるものとする。 α は不定であるから、この中には R を最小にするものがある筈である。それは簡単な計算で

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{(F_1G_1 + F_2G_2)}{(G_1^2 + G_2^2)}, \\ \frac{R_{\min}}{4\pi^2\rho g} &= \kappa_0^2 \frac{(F_1G_2 - F_2G_1)^2}{(G_1^2 + G_2^2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

これは実は対称分布に一致して、抵抗は高速を除けば誤差範囲内で略々零になる。図 2 にはそれらの値を示した。なお、第 1 近似値とは (2.8) 式で $\alpha=0$ として (2.10) を求めて計算した値である。

結 論

以上のような計算によって 2 次元問題に関する知識はかなり増えた訳であ

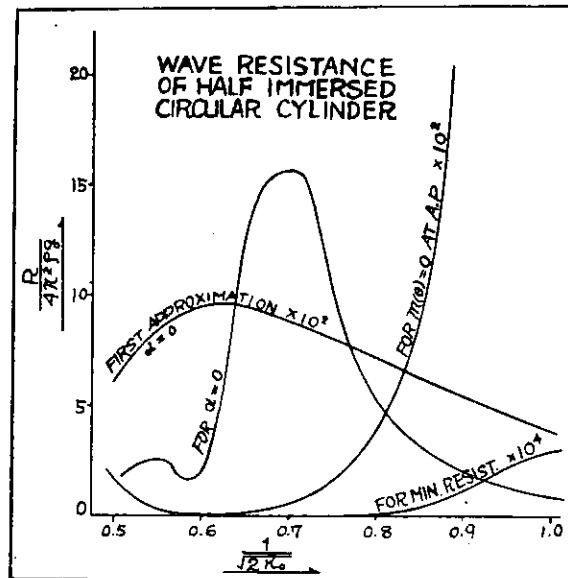


図 2

る。それらを要約すれば、半没体の速度ポテンシャルは

1. 高速で問題なく重力を無視した自由表面条件を満足するようなポテンシャルに近づいてゆく。
2. 低速では、一般に充分深い所では略々鏡像近似解に近づくし、また特異点を充分離れていれば水面に近くても平均的極限としてそれに近づく。然し一般には水面と物体との交点は特異点であるからこの近くでは複雑な関係になっている。この場合、解は常に任意常数を含んでいるので、その決め方によっても上の関係は幾分変わってくる。
3. 低速の造波抵抗については上記の任意常数のとり方によって種々変わってくる。従って一般には、その中で最も抵抗の小さい値がある。またそのような任意常数がある場合は鏡像解を使った抵抗値よりオーダーが一つ大きくなる。然し垂直平板でそれのない場合、少くとも水面の流線が上流から後流迄連続しているような場合は鏡像近似の抵抗値の $1/4$ となる。

以上の考察は著者の一人の従来主張³⁾⁴⁾ に一つの理論的基礎を提供するものと考えることができよう。

参 考 文 献

1. T. H. Havelock.; Proc. Roy. Soc. A, Vol. 155, 1936.
2. "Tables of the exponential integral for Complex argument." A. M. S. 51, National Bureau of Standards. 1958.
3. 別所正利 造船協会論文集 105号 (昭和34年)
4. 別所正利 造船協会論文集 106号 (昭和35年)

Abstract

In this paper, the authors deal with two dimensional problems in the theory of the wave making resistance.

At first, the solution for a half immersed vertical plate is given analytically, and shown its character, which differs from that of the mirror image approximation in very low speed.

Secondly, the problem of a half immersed circular cylinder is solved numerically, the arbitrariness in this case is an interesting theme.

This character admits various stream around a cylinder, and one of those has a symmetric doublet distribution and the minimum wave resistance.