防衛大学校理工学研究報告
第 7 巻 第 1 号
昭 和 44 年 6 月

「船の波形解析への一寄与」

（この論文を遠藤山田両教授に捧ぐ）

別　所　正　利*

(昭和 44 年 3 月 31 日受付)

1. 序　　言

乾教授が船の造波抵抗理論において波模様の観察が重要である事を強調して以来波形の測定から造波抵抗等を求める研究が続出した。

これらの所謂波形解析では船の後方に出来るケルビン波系を測定してそれから

1. 造波抵抗を直接計算する
2. それをフーリエ変換して振幅函数を求める
3. 船の等価特異点分布を求める

等の事を目的として研究され幾つかの方法がある。

いづれの方法にしても得られた大量の波形記録を計算機に入れて処理しなければならないので最も望ましい近似値に関する考察が必要であると考えられる。以下に夫々の方法を列挙してこのような見地から考察を試みる次第である。

2. 関　係　式[1)]

考察に入る前に必要な式類をまとめて掲げて置こう。

原点を船体中央水線上に置き z 軸を鉛直上方に x 軸を前進方向にとって右手座標系を考え船速は V であるとする。船が浸水表面上 S の吹出し分布 $V\sigma(S)$ で表わされるものとし，その振幅函数を

$$F(\kappa_0, \theta) = \iint_S \sigma(S) e^{\kappa_0 z \sec^2\theta + i(px+qy)} dS, \tag{1}$$

但し $\kappa_0 = g/V^2$, $p = \kappa_0 \sec\theta$, $q = \kappa_0 \sec^2\theta \sin\theta$, とすると船の充分後方における水面変位 ζ は次式で与えられる。

$$\zeta(x, y) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ F e^{-i(px+qy)} + \overline{F} e^{i(px+qy)} \right\} \sec^3\theta d\theta, \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_0}^{\infty} \left\{ \quad \text{〃} \quad \right\} \frac{dp}{\sin\theta\cos\theta}, \tag{2'}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \quad \text{〃} \quad \right\} \frac{dq}{1+\sin^2\theta}, \tag{2''}$$

以下上横棒は複素共役値を示すものとする。

* 防衛大学校　機械工学教室　教授

(2) 式で与えられる波形を測定しそれをフーリエ変換すれば振幅函数が求められる。即ち縦切り方式では

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y)\, e^{ipx} dx = \frac{e^{-iqy}}{\sin\theta\cos\theta} F(\kappa_0, \theta), \tag{3}$$

又横切り方式では

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y)\, e^{iqy} dy = \frac{2\, e^{-ipx}}{1+\sin^2\theta} F(\kappa_0, \theta), \tag{4}$$

となる。振幅函数が求まれば造波抵抗 R_W は次式で計算出来る。

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{\kappa_0}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|F(\kappa_0, \theta)\right|^2 \sec^3\theta\, d\theta, \tag{5}$$

なお以下船は左右対称と考える。

所でこのような解析方法では後方の波形が同じならば F も R_W も同じである事は明らかであるが一方波が同じでも船形は異なる場合があるので (1) 式の特異点分布は一義的には定められず所謂波無し分布だけ常に不定である[5)]。つまりいわば波源特異点分布しか求められない。このような波源の形式等は多分に任意性を含んでいるがともかく波系を表現出来なければならない。こゝでは簡単の為に水線上船体中心線に沿う線分布を与えて振幅函数は次のように表わされるものと考えて置こう。

$$F(\kappa_0, \theta) = \frac{\cos\theta}{i\kappa_0}\int_{-L/2}^{L/2} m(x)\, e^{ipx} dx, \tag{1'}$$

これを (2) 式に代入して θ について積分すると

$$\zeta(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2} m(x')\, P_{-2}^*(\kappa_0\overline{x-x'}, \kappa_0 y)\, dx', \tag{6}$$

となり又 (1′) を (5) に代入して θ について積分すると

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{1}{\pi\kappa_0}\int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} m(x)\, m(x')\, P_{-1}(\kappa_0\overline{x-x'})\, dx\, dx', \tag{7}$$

となる。ここに[6)]

$$P_{-1}(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sec\theta)\sec\theta\, d\theta,$$

$$P_{-2}^*(x, y) = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x\sec\theta)\cos(y\sec^2\theta\sin\theta)\sec^2\theta\, d\theta, & \text{for } x<0 \\ 0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{for } x>0 \end{cases}$$

ここで (6) 式の積分中上式の部分は普通不定積分の形に書かれているがこの理論の近似の範囲内では上式のように取っても変りはなく且つこの積分は計算に都合のよい積分表示がある[6)]ので便利であろう。

又 Newman によれば (3) 式を (5) 式に代入して θ について先に積分すれば

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{\kappa_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y)\, \zeta(x', y)\, K(x-x')\, dx\, dx', \tag{8}$$

但し

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(\kappa_0 x\sec\theta)\sec\theta\sin^2\theta\, d\theta,$$

つまり波形がわかれば造波抵抗が計算出来る訳であるが2重積分であるから計算は大変面倒である。もし波形の微分や積分が求められるならば次のようにして造波抵抗を求める事が出来る。

即ち2つの波系について

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1(x,\ y)\zeta_2(x,\ y)\,dx=\kappa_0\int_0^{\pi/2}(F_1\bar{F}_2+F_2\bar{F}_1)\frac{d\theta}{\sin\theta\cos^4\theta},\tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1(x,\ y)\zeta_2(x,\ y)\,dx=2\kappa_0\int_0^{\pi/2}(F_1\bar{F}_2+F_2\bar{F}_1)\frac{\sec^3\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta},\tag{10}$$

となる事は容易に証明出来よう。但し (9) 式右辺の積分は一般には存在しないので注意しなければならない。(9), (10) 式を使えば次式が成立つ事は容易に示されよう。

$$\frac{R_W}{\rho g}=\frac{\kappa_0^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,\ y)\zeta_y{}^{xxx}(x,\ y)\,dx,\tag{11}$$

$$\frac{R_W}{\rho g}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x,\ y)\left\{\zeta(x,\ y)+\frac{\kappa_0^2}{2}\zeta^{xx}(x,\ y)\right\}dy,\tag{12}$$

ここに下添字 y は y に関する偏微分右肩添字 x はxに関する積分 $\left(\int_{\infty}^{x}dx\right)$ を意味するものとする。

なお二つの波系に関して次の可逆性がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1\zeta_{2y}{}^{xxx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_2\zeta_{1y}{}^{xxx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1{}^{xx}\zeta_{2y}{}^{x}\,dx,\tag{13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1\zeta_2{}^{xx}\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_2\zeta_1{}^{xx}\,dy=-\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_1{}^{x}\zeta_2{}^{x}\,dy,\tag{14}$$

3. 最小自乗法

直接最小自乗法を使って波形解析を行うのは Pien の方法だけである。彼は縦切り方式によって充分な数の測定点を選び出しその点における波高と仮想した振幅函数による計算した波高との誤差の自乗の総和が最小になるように振幅函数を決める事を提唱した[2)]。

この方法で総和のかわりに積分をとると

$$E(X)=\int_{-X}^{\infty}\left[\zeta_E(x,\ y)-\frac{\kappa_0}{2\pi}\,\mathcal{R}e\int_{-\pi/2}^{\pi/2}Fe^{-i(px+qx)}\sec^3\theta\,d\theta\right]^2dx,\tag{15}$$

を最小にするように F を決める訳である。ここに下添字 E は今後共測定値を示すものとする。

この方法によれば縦切り方式の欠点である有限な長さで打切るための修正を必要としないと言う利点がある。

又上式は (6) により

$$E(X)=\int_{-X}^{\infty}\left[\zeta_E(x,\ y)-\frac{2}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2}m(x')P_{-2}{}^{*}(\kappa_0\overline{x-x'},\kappa_0 y)\,dx'\right]^2dx,\tag{16}$$

と書きかえると今度は等価特異点分布 m を求める問題となり池畑の所謂逆解析[4)] が出来る事になる。

更にこの際局部波系をも計算して自由波系に加えておきそれを ζ^* と記し

$$E(X)=\int_{-X}^{\infty}[\zeta_E-\zeta^*]^2\,dx, \tag{17}$$

と置くと充分ではないが波高計測位置が船に近寄ってもよい事になり実験上有利である。

後述の方法に比しこの方法で不利な点は只一つ (9) 式により

$$\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{\infty}\zeta_E{}^2\,dx\to\infty, \tag{18}$$

となる事である。

しかしこの方法を横切り方式に適用すれば (10) 式により

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}(\zeta_E-\zeta)^2dy=4\kappa_0\int_0^{\pi/2}[F\bar{F}-(F\bar{F}_E+\bar{F}F_E)+F_E\bar{F}_E]\,\frac{\sec^3\theta\,d\theta}{1+\sin^2\theta}, \tag{19}$$

となって有限である。

4. 池畑の逆解析[4)]

池畑等は縦切り方式で得られた振幅函数から等価特異点分布を求める為の積分方程式の解法を試みた。

この問題を最適近似値問題として考えるには

$$E=\int_0^{\pi/2}\left|F_E-F\right|^2 w(\theta)\,d\theta, \tag{20}$$

なる積分を考えて，これが最小になるように F を決める事を考えればよい。但し w は適当な正の重味とする。特に $w=\sec^3\theta$ とすると上式は真の値との誤差の造波抵抗を最も小さくするような近似値を求めると言う事であり合理的であろう。

実行上は

$$I=\int_0^{\pi/2}(F\bar{F}_E+\bar{F}F_E-F\bar{F})\,w\,d\theta, \tag{21}$$

なる積分の最大値問題を解く事と同じになるので

$$Max.\,[I]=\frac{\pi}{\rho g\kappa_0}R_W\ (w=\sec^3\theta\ \text{として}) \tag{22}$$

なる事も考えるとこの形の方が便利であろう。

(1′) 式中 $m(x)$ をマシウ函数に展開して上の変分問題をラグランジュの未定係数法で解く事を考えると結局 F_E を虚変数のマシウ函数（抵抗積分に関して直交系を作っている）に展開する事に帰着し実際上池畑等の試みた解法[4)] に一致する。彼等の計算例ではあまり良い結果が得られていない事から考えると w の選定にあたって造波抵抗に拘わるのは必ずしも得策ではないかも知れない。つまり実験上精度の悪い所では重味をもつと小さくして置く事が考えられる。そうすると異なった形の解法が出て来る事は自ら明らかであろう。この事は次節の考察についても言える事である。

5. 変 分 法

波高の測定値から (3) 又は (4) 式の積分を実行して振幅函数を求める方法は非常に手数がかゝる。しかし前節，前々節におけるように振幅函数の形をあらかじめ仮定しておけ

ば最適近似を求める問題になって来て手数も省ける事が考えられる。そして又この際の誤差の評価函数として抵抗積分を採用すれば物理的にも好ましいであろう。この節ではこのような方法について述べる。

さて横切り方式では (12), (14) 式を考慮して

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\zeta_E\left(\zeta+\frac{\kappa_0}{2}\zeta^{xx}\right)-\zeta\left(\zeta+\frac{\kappa_0}{2}\zeta^{xx}\right)\right]dy, \tag{23}$$

なる積分を考える。この変分が0になれば $\zeta=\zeta_E$ となり且つ

$$Max.\ [I]=\frac{2\pi}{\rho g}R_W, \tag{24}$$

となる。

(23) 式中振幅函数を求める時は ζ として (2) 式の表現を用いるものとする。そうすると右辺の最初の積分の演算は (4) 式のフーリエ変換と同じになる。しかし等価特異点分布を仮定して例えば (6) の表現を用いる事にするとフーリエ積分をする必要がなく且つあらかじめ仮定した特異点分布に対する ζ 等の数表を用意して置く事も出来計算を簡単化する事が可能である。

又 (24) 式によって I の極値は真の造波抵抗に対し下からの近似値を与える。

同様にして縦切り方式では (11), (13) を考慮して

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}[2\zeta_E\zeta_y{}^{xxx}-\zeta\zeta_y{}^{xxx}]dx, \tag{25}$$

なる積分の極値問題を解いて最適近似を求めればよい。

この時

$$Max.\ [J]=\frac{2\pi}{\rho g\kappa_0{}^2}R_W, \tag{26}$$

となるがこの場合の難点は所謂打切修正である。附録に記すように Newman の方式に従って推定して見るとその修正量は $y/|x|$ に比例する。従ってフーリエ変換を行う場合に比して小さいと考えられる[1] がやはり面倒である事は変わりない。もしも波傾斜とその積分が求められるならば3節の方法にならって

$$E(X)=\int_{-X}^{\infty}(\zeta-\zeta_E)(\zeta_y{}^{xxx}-\zeta_{Ey}{}^{xxx})\,dx, \tag{27}$$

の最小値問題を解く事にすれば打切り修正を必要としない。そして

$$\lim_{X\to\infty}\int_{-X}^{\infty}\zeta\zeta_x{}^{xxx}\,dx=\frac{2\pi}{\rho g\kappa_0{}^2}R_W, \tag{28}$$

となるが近似値が求まった後では抵抗は (7) 式等で計算する方が早い。

6. 結　　論

船の後方に出来るケルビン波系を観測してその船の造波特性を調べる所謂波形解析に関するこれまでの方法を比較検討して最適近似法の観点から一つの提案を行なった。その結果をまとめて見ると次のようになろう。

1. Pien の最小自乗法は打切修正を必要とせず又完全ではないが局部波の影響も修正出来る点で極めて有利であり，さらに等価特異点分布を許容函数として選べば一層便

利であろう。

2. 池畑等の逆解析法は誤差の造波抵抗を最小にするような特異点分布を求める事に略々等価である。しかしこの方法は振幅函数を求めてから行う必要はなく直接波高の測定値から前項の或いは後項の方法によって行う方が計算技術上からも望ましい。

3. 以上の考察から抵抗積分を誤差の評価函数とする変分問題に変えて最適近似の等価特異点を求めそれから振幅函数造波抵抗を計算する方法を提案した。

参　照　文　献

1) Eggers, K.W.H., Sharma, S. D. and Ward, L. W.; T. S. N. A. M. E. vol. 75 (1967)

2) Pien, P.C. and Moore, W. L.; International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Ann Arbor, Michigan (1963)

3) 池畑，野沢；造船協会論文集 121号 (昭和42年)

4) 〃 ; 〃 124号 (〃 44 〃)

5) 別所，水野； 〃 116号 (〃 39 〃)

6) Bessho, M; Mem. Defense Academy, vol. 4 (1964)

附録　漸近展開について

(2) 式の右辺を $|x|/y > 2\sqrt{2}$ なる場合について定常点法で漸近値を求めるとよく知られているように

$$\zeta(x, y) \doteqdot \kappa_0 \sqrt{\frac{2}{\pi|f''(\theta_1)|}}\ \mathcal{R}e\left[F(\theta_1)e^{if(\theta_1)-\pi/4i}\sec^3\theta_1\right]$$

$$+\kappa_0 \sqrt{\frac{2}{\pi|f''(\theta_2)|}}\ \mathcal{R}e\left[F(\theta_2)e^{if(\theta_2)+\pi/4i}\sec^3\theta_2\right] \qquad (A\cdot1)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &f(\theta)=\kappa_0\sec^2\theta(x\cos\theta+y\sin\theta) \\ &f''(\theta)=(1-2\tan^2\theta)f(\theta)\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned}\tan\theta_1\\ \tan\theta_2\end{aligned}\right\}=\frac{1}{4}\left(m\pm\sqrt{m^2-8}\right) \\ &m=x/y>2\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot3)$$

波形測定を打切るのは m のかなり大きい所であると考えてよいので更に m が充分大きいと仮定すると (A·3) から

$$\left.\begin{aligned} &\tan\theta\doteqdot m/2,\ \tan\theta_2\doteqdot 1/m \\ &f(\theta_1)\doteqdot\kappa_0 x^2/(4y),\ f(\theta_2)\doteqdot\kappa_0 x \\ &f''(\theta_1)\doteqdot m^2 f(\theta_1)/2,\ f''(\theta_2)\doteqdot -f(\theta_2)\end{aligned}\right\} \qquad (A\cdot4)$$

のようになるから (A·1) はさらに

$$\zeta(x, y)\doteqdot\frac{m\kappa_0}{2\sqrt{\pi\kappa_0 y}}\ \mathcal{R}e\left[F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{m}\right)e^{-\pi/4\,i}+{}^{i\kappa_0 x^2/y}\right]$$

$$+\kappa_0\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa_0|x|}}\ \mathcal{R}e\left[F\left(\frac{1}{m}\right)e^{\pi/4\,i+i\kappa_0 x}\right] \qquad (A\cdot5)$$

となる。右辺第1項の発散波と第2項の横波との振幅の比を求めると

$$\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{m}\right)}{F\left(\frac{1}{m}\right)}\left(\frac{m}{2}\right)^{3/2} \qquad (A\cdot6)$$

となるので振幅函数が $\theta=\frac{\pi}{2}$ の近くでつまり発散波成分が充分小さくないとこれを横波のみで近似するのは難かしいように見える。しかし実際上横波のみと見なしてもあまり不都合とも思われないので Newman にならって[3)]

$$\zeta\doteqdot\frac{A}{\sqrt{\kappa_0|x|}}\cos(\kappa_0 x+\varepsilon) \qquad (A\cdot7)$$

と近似する事にすると同様な方法で

$$\zeta_y{}^{xxx}\doteqdot-\frac{A}{m\kappa^2{}_0\sqrt{\kappa_0 x}}\cos(\kappa_0 x+\varepsilon), \qquad (A\cdot8)$$

なる近似式が得られる。

従って

$$\int_{-\infty}^{-X}\zeta\zeta_y{}^{xxx}dx\doteqdot-\frac{A^2}{2\kappa_0{}^3}\int_{X/y}^{\infty}\frac{dm}{m^2}\left[1+\cos(2\kappa_0 x+2\varepsilon)\right]$$

$$\doteqdot-\frac{A^2 y}{2\kappa_0{}^3 X}, \qquad (A\cdot9)$$

となるから (25) 式の打切り修正は $0(y/X)$ であると推定出来る

"A Contribution to Ship Wave-Analysis"

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

There are various methods of ship wave-analysis by which wave-making characteristics can be calculated from the observation of its Kelvin wave pattern. The author studies them in the stand point of the optimum approximation and obtains the following conclusion:

1. Pien's method of the least square is very much favorable, especially if we don't take the amplitude function but the equivalent singularity as its admissible function.
2. Ikehata's method to obtain the equivalent sigularity from the amplitude function is very similar to the one which minimizes the wave-making resistance of the error singularity and it is recommended to use the first or third method directly for this purpose.
3. The variational method to minimize the wave-making resistance of the error of the amplitude function of the singularity is proposed.

* Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.