防衛大学校理工学研究報告
第11巻 第2号
昭和48年9月

船体運動のイムパルス応答とその発散波について

(故玉井教授に捧ぐ)

別所正利*

(昭和48年2月28日受付)

序言

波を伴う船体運動は水面変形の線型性の仮定の下に解くことが可能であるけれども，定常運動，つまり一様な速度で前進する場合とか一様な円周波数で振動する場合を除けば問題は複雑で解くのは難しい。

しかし運動による変位が微少であるならば境界条件をその平均位置において指定することが出来るので任意の運動をするとしても問題は簡単になりカミンズの言うように自動制御理論的に考えて周波数応答もしくはイムパルス応答がわかればすべての運動は推定出来るはずである。

また実際それは実証されている[1)3)4)8)]。

一方アーセルは純解析的に半没円筒の上下動を求めている[2)]。

本文ではアーセルの方法に従って二次元運動で前進速度のない場合の上下動およびローリングをとりあげ波浪中の運動との関連において線型応答理論を組立てる。

その際ハスキントの関係を導入する[7)]ことによって発散波の応答と波浪中の運動との間に簡単な関係があることが推定出来る。つまり原理的には静水中で船を少し動かしてその運動と放射波を測定すれば波浪中の応答まで求まることになる。

さらに関連問題として竹沢の言う transient wave の性質特にその分散についても少し検討しまたハミルトンの変分原理による運動方程式等の誘導についても言及した。

1. 速度ポテンシャルおよび力のフーリェ変換[7)]

座標軸を図1のようにとって2次元筒体の運動を考えよう。

まず圧力 p は

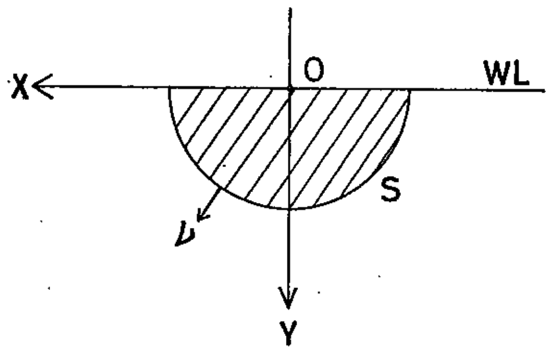
$$\frac{1}{\rho}p(x,y,t)=\phi_t(x,y,t)+gy \quad (1)$$

で与えられる。ここに ϕ は速度ポテンシャル，下添字は偏微分を意味し，g は重力の定数とする。

水面変位を η とすると水面条件は

$$\phi_t(x,0,t)=-g\eta(x,t)\,, \quad (2)$$

$$\eta_t(x,t)=-\phi_y(x,0,t)\,, \quad (3)$$



第1図 座標系

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

$$\phi_{tt}(x, 0, t)-g\phi_y(x, 0, t)=0\,. \tag{4}$$

物体の表面条件は

$$\phi_\nu=-\sum_{j=1}^{3}u_j(t)x_{j\nu}\ \text{on}\ S\,, \tag{5}$$

ここに

$$U_j(t)=a_j'\frac{d}{dt}=\dot{a}\,, \tag{6}$$

$a_1\equiv a_x$ (後には x); x 方向の変位,

$a_2\equiv a_y$ (後に y); y 方向の変位,

$a_3\equiv a_\theta$ (後に θ); 角変位,

また

$$x_{1\nu}=x_\nu$$

$$x_{2\nu}=y_\nu$$

$$x_{3\nu}=xy_\nu-yx_\nu$$

重心周りの運動としては添字3の替りに5を使うことにする。

船に働く水の力は

$$f_j=-\int_s px_{j\nu}ds=-\rho\int_s\phi_t x_{j\nu}ds$$

$j=1, 2$ はそれぞれ x, y 方向の力, $j=3, 5$ はモーメントとする。

$t=0$ まで $\phi=\phi_t=0$ としてこれらをフーリェ変換すると

$$\int_0^\infty\phi(x, y, t)e^{-i\omega t}dt=\Phi(x, y\,;\omega)=\overline{\Phi}(x, y\,;-\omega)$$

逆に

$$\phi(x, y\,;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x, y\,;\omega)e^{i\omega t}d\omega\,, \tag{8}$$

であり

$$\int_0^\infty\phi_t e^{-i\omega t}dt=i\omega\Phi$$

$$\int_0^\infty\phi_{tt}e^{-i\omega t}dt=-\omega^2\Phi$$

$$\left.\begin{aligned}H(x, \omega)&=\int_0^\infty\eta(x, t)e^{-i\omega t}dt=-\frac{i\omega}{g}\Phi\\ P(x, y, \omega)&=\rho\int_0^\infty\phi_t e^{-i\omega t}dt=\rho i\omega\Phi\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

がえられるから水表面条件は

$$\left.\begin{aligned}H&=-\frac{i\omega}{g}\Phi\\ i\omega H&=-\Phi_y\\ \frac{\omega^2}{g}\Phi&+\Phi_y=0\end{aligned}\right\}\ \text{on}\ y=0 \tag{10}$$

船体表面条件は

$$\int_0^\infty u_j(t)e^{-i\omega t}dt = u_j(\omega) \tag{11}$$

とおくと

$$\Phi_\nu(x, y;\omega)\Big|_{\text{on } S} = \int_0^\infty \phi_\nu\Big|_{\text{on } S} e^{-i\omega t}dt = -\sum_{0=1}^{3} U_j x_{j\nu} \tag{12}$$

となる。

今

$$\Phi = \sum_{j=1}^{3} U_j \Phi_j \ , \tag{13}$$

とおいて

$$\Phi_{j\nu} = -x_{j\nu} \text{ on } S \tag{14}$$

とすれば，(12) 式は満足され，それに対応して

$$\phi(x, y;t) = \sum_{j=1}^{3} \phi_j,\ \phi_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_j \Phi_j e^{i\omega t}d\omega \ , \tag{15}$$

となる。

力は

$$\begin{aligned} F_j(\omega) &= \int_0^\infty f_j e^{-i\omega t}d\omega = -\rho i\omega \int_S \Phi x_{j\nu} ds = -\rho i\omega \sum_{k=1}^{3} U_k \int_S \Phi_k x_{j\nu} ds \\ &= -\rho i\omega \sum_{k=1}^{3} U_k C_{jk} \ , \end{aligned} \tag{16}$$

ここに

$$C_{jk} = C_{kj} = \int_S \Phi_k x_{j\nu} ds = \int_S \Phi_j x_{k\nu} ds \ , \tag{17}$$

船の遠方では波だけになるので

$$\Phi(x, y;\omega) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \left. \begin{array}{ll} iD^+(K)e^{-Ky-iKx} \ , & \text{for } x>0 \\ iD^-(K)e^{-Ky+iKx} \ , & \text{for } x<0 \end{array} \right\} \tag{18}$$

ただし $K=\omega^2/g$ で $\omega>0$ とする。 $\omega<0$ に対しては $\Phi(-\omega)=\overline{\Phi(\omega)}$ である。以下同様。

$$D^\pm(K) = \int_s \left(\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{-Ky\pm iKx}ds = \sum_{j=1}^{3} U_j D_j^\pm(K) \tag{19}$$

$$H(x, \omega) = -\frac{i\omega}{g}\Phi(x, 0;\omega) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \left. \begin{array}{ll} \dfrac{\omega}{g} D^+ e^{-iKx} \ , & \text{for } x>0 \\ \dfrac{\omega}{g} D^- e^{+iKx} \ , & \text{for } x<0 \end{array} \right\} \tag{20}$$

よって

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} He^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [H(x, \omega)e^{i\omega t} + \overline{H(x}, \omega)e^{-i\omega t}]d\omega$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{x\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi g}\displaystyle\int_0^\infty [D^+(K)e^{-iKx+i\omega t} + \overline{D^+(K)}e^{iKx-i\omega t}]\omega d\omega \ , \\ \xrightarrow{x\to-\infty} \dfrac{1}{2\pi g}\displaystyle\int_0^\infty [D^-(K)e^{iKx+i\omega t} + \overline{D^-(K)}e^{-iKx-i\omega t}]\omega d\omega \ . \end{array} \right\} \tag{21}$$

これらの積分の漸近値は次のようになる。

一般に

$$
\left.\begin{aligned}
&I=\int_0^\infty f(\omega)e^{-i\omega^2x/g+i\omega t}=\int_0^\infty f(\omega)e^{-i\xi^2+igt^2/4x}\\
&\frac{\omega^2}{g}x-\omega t=\xi^2-\frac{gt^2}{4x}\ ,\\
&\xi=\omega\sqrt{\frac{x}{g}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{x}}t\ .
\end{aligned}\right\}\tag{22}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
I&=\sqrt{\frac{g}{x}}e^{igt^2/4x}\int_{-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x}}}^{\infty}f(\omega)e^{-i\xi^2}d\xi\\
&\xrightarrow[\frac{gt2}{4x}\to\infty]{}\sqrt{\frac{g}{x}}e^{igt^2/4x}f\left(\frac{gt}{2x}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi^2}d\xi=\sqrt{\frac{\pi g}{2x}}\ e^{igt^2/4x}f\left(\frac{gt}{2x}\right).
\end{aligned}\tag{23}
$$

なお

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_0^\xi\cos u^2du\xrightarrow{\xi\gg1}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\xi\sqrt{\pi}}\sin\xi^2\right),\\
&\int_0^\xi\sin u^2du\rightarrow\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\xi\sqrt{\pi}}\ \cos\xi^2\right).
\end{aligned}\right\}\tag{24}
$$

2. イムパルス応答による表現[1)3)]

前節の表現はまたイムパルス応答によって書直すことが出来る。

§1 (8) 式より

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y;t)&=\frac{1}{2\pi}\int\Phi e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_j\int u_j\Phi_je^{i\omega t}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{3}\int_0^\infty u_j(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_je^{i\omega(t-\tau)}d\omega\\
&=\sum_{j=1}^{3}\int_0^t u_j(\tau)\varphi_j(x,y;t-\tau)d\tau\ ,
\end{aligned}\tag{1}
$$

ここに

$$
\varphi_j(x,y;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(x,y;\omega)e^{i\omega t}d\omega\ .\tag{2}
$$

§1 (12) によって

$$
\varphi_{j\nu}|_s=-x_{j\nu}\delta(t)\ ,\tag{3}
$$

であるから，φ_j は $t=0$ の瞬間におけるイムパルス的運動に基づくポテンシャルとなる。

同様にして

$$
\begin{aligned}
f_j&=-\rho\sum_{k=1}^{3}\int_S x_{j\nu}ds\int_0^t u_k(\tau)\varphi_{t}(x,y;t-\tau)d\tau\\
&=\sum_{k=1}^{3}\int_0^t u_k(\tau)f_{jk}{}^{\delta}(t-\tau)d\tau\ ,
\end{aligned}\tag{4}
$$

ここに

$$
f_{jk}{}^{\delta}(t)=-\rho\int_S\varphi_{kt}x_{j\nu}ds
$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\omega e^{i\omega t}d\omega\int_S \Phi_k x_{j\nu}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}C_{jk}(\omega)e^{i\omega t}\omega d\omega\ , \tag{5}$$

であってこれは力のイムパルス応答である。

また

$$\eta(x,t)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\sum_{j=1}^{3}\int_0^t u_j(\tau)R_j{}^+(x,t-\tau)d\tau\ , \tag{6}$$

$$R_j{}^+(x,t)=\frac{1}{2\pi g}\int_0^{\infty}(D_j{}^+e^{-iKx+i\omega t}+\overline{D_j{}^+}e^{iKx-i\omega t})\omega d\omega\ , \tag{7}$$

となるからは R_j は発散波のイムパルス応答である。

3. 入射波と波の力[7]

入射波は次式によって与えられる x の正方向から負方向に向う波であるとしよう。

$$\left.\begin{aligned}&\eta_I(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{iKx+i\omega t}d\omega\ ,\\&K=\frac{\omega|\omega|}{g}\ ,\quad A(-\omega)=A(\omega)\ ,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$\mathscr{L}$ でフーリェ変換を代表させると,

$$\mathscr{L}\equiv\int_0^{\infty}e^{-i\omega t}dt$$

$$\mathscr{L}\eta^I=H_I(x,\omega)=A(\omega)e^{i\omega|\omega|x/g}\ , \tag{2}$$

(1) に対応する速度ポテンシャルは

$$\phi_I(x,y;t)=\frac{ig}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega}e^{iKx+i\omega t-|K|y}d\omega\ ,$$

であるから

$$\mathscr{L}\phi_I\equiv\Phi_i(x,y;\omega)=\frac{ig}{\omega}A(\omega)\Phi_0(x,y;\omega)\ , \tag{3}$$

ここに

$$\Phi_0(x,y;\omega)=e^{-\omega^2y/g+i\omega|\omega|x/g}\ ,$$

入射波 ϕ_I に対する船体の反射波のポテンシャルを ϕ_D とおけば

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{D\nu}+\phi_{I\nu}=0\\&\Phi_{D\nu}+\Phi_{I\nu}=0\end{aligned}\right\}\ \text{on}\ S \tag{4}$$

周波数面では

今

$$\Phi_D(x,y;\omega)=\frac{ig}{\omega}A(\omega)\Phi_d(x,y;\omega)\ ,$$

とすれば (4) は

$$\Phi_{d\nu}+\Phi_{0\nu}=0\ . \tag{5}$$

この波による力は

$$f_{Wj}=-\rho\int_S(\phi_{It}+\phi_{Dt})x_{j\nu}ds\ ,\tag{6}$$

つまり

$$\mathscr{L}f_{Wj}=F_{Wj}=\rho gA(\omega)\int(\Phi_0+\Phi_d)x_{j\nu}ds=-\rho gA(\omega)D_j{}^+(K)\ ,\tag{7}$$

この D_j は §1 (19) と同じものである。(ハスキントの関係式)

つまり

$$\begin{aligned}D_j{}^+(K)&=-\int_S(\Phi_0+\Phi_d)x_{j\nu}ds=\int_S(\Phi_0+\Phi_d)\Phi_{j\nu}ds\\&=\int(\Phi_0\Phi_{j\nu}-\Phi_j\Phi_{0\nu})ds\\&=\int\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi_j-\Phi_j\frac{\partial}{\partial\nu}\right)e^{-Ky+iKx}ds\ ,\end{aligned}\tag{8}$$

したがって (7) はまた次のようにも書ける

$$f_{Wj}=-\frac{\rho g}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)D_j{}^+(K)+\overline{A(\omega)D_j{}^+(K)}]\,e^{i\omega t}d\omega\ ,\tag{7'}$$

竹沢の研究はこの入射波として船体近くで集中波を作って船の応答を求めるものであるが，入射波は種々の簡単な特性をもっているので以下それを列挙しよう。

ある点 x における t に関するフーリェ変換が (2) で与えられるとすると

i) 時間 t において x に関するフーリェ変換は

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_I(k,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(x,t)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx\,\mathscr{R}\int_0^{\infty}Ae^{ikx}d\omega\\&\left.\begin{aligned}&=\sqrt{\frac{g}{k}}A(\sqrt{gk})e^{i\sqrt{gk}t}\ ,&&\text{for }k>0\\&=\sqrt{\frac{g}{|k|}}\overline{A}(\sqrt{g|k|})e^{-i\sqrt{g|k|}t}\ ,&&\text{for }k<0\end{aligned}\right\}\end{aligned}\tag{9}$$

従って $k=\omega^2/g$ の時は

$$\left|H_I(x,\omega)\right|^2=\left|A(\omega)\right|^2=\frac{k}{g}\left|\mathscr{H}_I(k,t)\right|^2\ ,\tag{10}$$

つまり波高の空間分布は時間分布から導かれる。

ii) このことを相関形式で表現すれば

$$\begin{aligned}\eta_I(x,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-\xi)+i\nu t}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(\xi,\tau)e^{-i\nu\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(\xi,\tau)\,W(x-\xi,t-\tau)d\tau\ ,\end{aligned}\tag{11}$$

ただし

$$W(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(kx+\omega t)d\omega\ ,\quad k=\omega^2/g\ ,\tag{12}$$

一方

$$\eta_I(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{H}(k,t)e^{ikx}dk$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(\xi,\tau)W^*(x-\xi,t-\tau)d\xi\ ,\tag{13}$$

$$W^*(x,t)=\frac{1}{\pi g}\int_0^{\infty}\omega\cos(kx+\omega t)d\omega\ ,\tag{14}$$

なる2種の表現がある。これを利用すると例えば $t=t_0$ において

$$\eta_I(x,t_0)=\delta(x-x_0)$$

なる波を作るにはこれを (9) に代入して直ちに

$$A(\omega)=\frac{\omega}{g}e^{-ikx_0-i\omega t_0}\ ,\tag{15}$$

であればよいことがわかる。

iii) 波のポテンシャルエネルギー V は

$$\frac{V}{\rho}=\frac{g}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I^2dx=\frac{g}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{H}(k,t)|^2dk=\frac{g^2}{\pi}\int_0^{\infty}|A(\omega)|^2\frac{d\omega}{\omega}\ ,\tag{16}$$

一方運動エネルギー T は

$$\frac{T}{\rho}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi\phi_y dx=\frac{g^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega,t)|^2dk=\frac{g^2}{\pi}\int_0^{\infty}|A(\omega)^2\frac{d\omega}{\omega}\ ,\tag{17}$$

従って

$$T=V\tag{18}$$

iv) 一方

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(x,t)\eta_I(x,t+\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|A(\omega)|^2e^{-i\omega t}d\omega\ ,\tag{19}$$

であるので η の自乗積分 (t に関する) はそのままポテンシャルエネルギーに一致しないので注意すべきである。

これに関連して次の積分がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(\xi,t)\eta_I(x+\xi,t)d\xi=\frac{g}{\pi}\int_0^{\infty}|A(\omega)|^2\cos kx\frac{dk}{k}$$

$$=\frac{2g}{\pi}\int_0^{\infty}|A(\omega)|^2\cos\left(\frac{\omega^2x}{g}\right)\frac{d\omega}{\omega}\ ,\tag{20}$$

v) 最後に (1) と (9) から

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(x,t)dt=A(0)\tag{21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta_I(x,t)dx=g\lim_{\omega\to 0}\frac{A(\omega)}{\omega}\tag{22}$$

となるが (20) は有限確定であると考えられるから $A(0)=0$ で少くとも $A(\omega)=0$ である。

従って (19) 式の η の時間平均は 0 でなければならない。また (22) 式によってその空間平均は時間に関係せず一定かまたは 0 である。

4. 上 下 運 動[2)]

$a_2=y(t)$, $\mathscr{L}y(t)=Y(\omega)$ を重心の上下運動とすると
運動方程式は

$$M\ddot{y}+\gamma By=f_2+q_2\,, \tag{1}$$

$\gamma=\rho g$, M 船体質量，q_2 は外力とする。

周波数領域では

$$M\ddot{Y}+\gamma BY=F_2+Q_2\,, \tag{2}$$

ここに

$$\ddot{y}=\mathscr{L}\ddot{y}$$

また

$$F_2=-\rho i\omega U_2C_{22}\,,$$

である。

i）§3 (1) のような波をうけると Q_2 は §3 (7) で与えられるから $y(0)=\dot{y}(0)=0$ として (2) 式は

$$[-\omega^2(M+\rho C_{22})+\gamma B]\,Y(\omega)=-\gamma A(\omega)D^+{}_2\left(\frac{\omega^2}{g}\right), \tag{3}$$

$$\therefore\quad Y(\omega)=A(\omega)M_2(\omega) \tag{4}$$

ここに

$$M_2(\omega)=\frac{-\gamma D_2{}^+(\omega^2/g)}{\gamma B-\omega^2(M+\rho C_{22})} \tag{5}$$

つまり規則波に対する Magnification factor である。

この時発散波は

$$\mathscr{L}\eta=H(x,\omega)\xrightarrow[x\to+\infty]{} i\frac{\omega^2}{g}A(\omega)M_2(\omega)D_2{}^+\left(\frac{\omega^2}{g}\right)e^{-i\omega 2x/g}\,, \tag{6}$$

となっている。

ii）次に $Q_2=0$ とし静水中の自由運動を考えよう。

$$t=0 \text{ で } y(0)=y_0\,,\quad \dot{y}(0)=0\,, \tag{7}$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned}U_2(\omega)&=\mathscr{L}\dot{y}=-y_0+i\omega Y\,,\\ \ddot{Y}(\omega)&=\mathscr{L}\ddot{y}=-i\omega y_0-\omega^2Y\,,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(2) 式は

$$[-\omega^2(M+\rho C_{22})+\gamma B]\,Y(\omega)=i\omega y_0(M+\rho C_{22})\,,$$

となって

$$\frac{Y(\omega)}{y_0}=\frac{i\omega(M+\rho C_{22})}{\gamma B-\omega^2(M+\rho C_{22})}=\frac{1}{i\omega}-\frac{\gamma B}{i\omega[\gamma B-\omega^2(M+\rho C_{22})]}\,, \tag{9}$$

また

$$U_2(\omega)=i\omega Y-y_0=\frac{-\gamma By_0}{\gamma B-\omega^2(M+\rho C_{22})}\,. \tag{10}$$

よって

$$H(x,\omega)\xrightarrow[\substack{x\to+\infty\\ \omega>0}]{}\frac{\omega}{g}By_0M_2(\omega)e^{-i\omega^2x/g}\,, \tag{11}$$

となって $y(t)$ のフーリェ変換は伝達関数を与え出て行く波のフーリェ変換から M_2 が求

まり，またこの計算の過程では造波理論としてはハスキントの関係だけ使っているので他の線型的減衰があってもハスキントの関係が妥当なものならば (11) は成り立つ。

(11) 式を物理面に戻すと

$$\eta(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{By_0}{\pi g}\mathscr{R}\int_0^\infty M_2(\omega)e^{-i\omega^2x/g+i\omega t}\omega d\omega$$

$$\xrightarrow[4gt/x^2\gg1]{} \frac{By_0t\sqrt{g}}{2\sqrt{2\pi x}x}\mathscr{R}M_2\left(\frac{gt}{2x}\right)e^{igt^2/4x}, \tag{12}$$

であるから波群の envelope が M_2 を与える訳である。

5. ローリング[7]

運動方程式は前同様にして

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} &= f_1+q_1 \\ I\ddot{\theta}+Wm\theta &= f_5+q_5 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

m はメタセンター高さとする。

周波数領域では

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{X} &= F_1+Q_1 \\ I\ddot{\Theta}+W_m\Theta &= F_5+Q_5 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

i) 波の中の運動は $t=0$ で $x=\dot{x}=\theta=\dot{\theta}=0$ として

$$\left.\begin{aligned} \ddot{X} &= -\omega^2X, \quad \dot{X}=i\omega X, \\ \ddot{\Theta} &= -\omega^2\Theta, \quad \dot{\Theta}=i\omega\Theta. \end{aligned}\right\}$$

となるから

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2(M+\rho C_{11})X(\omega)-\rho\omega^2C_{15}\Theta(\omega) &= -\rho gA(\omega)D_1^+\left(\frac{\omega^2}{g}\right), \\ -\rho\omega^2C_{15}X+[-\omega^2(I+\rho C_{55})+Wm]\Theta &= -\rho gAD_1^+. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad X(\omega) &= -iAM_1(\omega), \\ \Theta(\omega) &= \Theta_w(\omega)M_5(\omega), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} M_1(\omega) &= \frac{\rho g}{\Delta i}\left[\{Wm-\omega^2(I+\rho C_{55})\}D_1^+\left(\frac{\omega^2}{g}\right)+\rho\omega^2C_{15}D_5^+\right], \\ M_5(\omega) &= \frac{i\rho g^2}{\Delta}[D_5^+(M+\rho C_{11})-D_1^+\rho C_{15}], \\ \Delta &= -\omega^2(M+\rho C_{11})[Wm-\omega^2(I+\rho C_{55})]-(\rho\omega^2C_{15})^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

また

$$\Theta_w(\omega)=\frac{\omega^2}{g}A(\omega), \tag{6}$$

これは次のように波傾斜のフーリェ変換である。

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta_I(x,t)=\frac{i}{2\pi g}\int_{-\infty}^\infty A(\omega)e^{i\omega^2x/g+i\omega t}\omega^2d\omega$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\Theta_w(\omega)e^{i\omega^2x/g+i\omega t}-\overline{\Theta_w}(\omega)e^{-i\omega^2x/g-i\omega t}]d\omega\,, \tag{7}$$

さて

$$D_5{}^{+}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)\Big/D_1{}^{+}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)=l_w-l\,,\quad (\text{実数}) \tag{8}$$

なる関係があり，かつ $\omega\to0$ とすると

$$\left.\begin{aligned}&D_1{}^{+}\to-i\frac{\omega^2}{g}V(1+k_1)\,,\\&D_5{}^{+}\to-i\frac{\omega^2}{g}V[\overline{OM}+k_1l_1)-(1+k_1)l]\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\xrightarrow[\omega\to0]{}-\omega^2M(1+k_1)W_m\\&M_1\xrightarrow[\omega\to0]{}1\\&M_5\xrightarrow[\omega\to0]{}1\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

である。

ii）　波はなく，θ_0 だけ船を傾けて離すと（モーメントだけかけることにする）$t=0$ で $\theta(0)=\theta_0$, $\dot{\theta}=0=x=\dot{x}$ とすると

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\Theta}=-\theta_0+i\omega\Theta\,,\\&\ddot{\Theta}=-i\omega\theta_0-\omega^2\Theta\,,\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}&\dot{X}=i\omega X\,,\\&\ddot{X}=-\omega^2X\,.\end{aligned}\right\}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}&-\omega^2(M+\rho C_{11})X-\rho\omega^2C_{15}\Theta=i\rho\omega\theta_0C_{15}\\&-\rho\omega^2C_{15}X+[Wm-\omega^2(I+\rho C_{55})]\Theta=i\omega\theta_0(I+\rho C_{55})\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &X=\frac{i\theta_0}{\Delta}\rho\omega WmC_{15}\,,\\&\Theta=\frac{\theta_0}{i\omega}\left[1+\frac{\omega^2Wm(M+\rho C_{11})}{\Delta}\right]\,,\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&\dot{X}=-\frac{\theta_0}{\Delta}\rho\omega^2C_{15}Wm\,,\\&\dot{\Theta}=\frac{\theta_0}{\Delta}\omega^2Wm(M+\rho C_{11})\,.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

従って

$$H(x,\omega)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\omega}{g}(\dot{X}D_1{}^{+}+\dot{\Theta}D_5{}^{+})e^{-i\omega^2x/g}$$

$$=\frac{\theta_0\omega^3}{i\rho g^3}WmM_5(\omega)e^{-i\omega^2x/g}\,, \tag{14}$$

前同様 η に戻すと

$$\eta(x,t)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\frac{Wm\theta_0}{\pi\rho g^3}\mathscr{I}_m\int_0^{\infty}M_5(\omega)e^{-i\omega^2x/g+i\omega t}\omega^3d\omega$$

$$\to -\frac{Wm\theta_0\sqrt{g}}{\rho\sqrt{2\pi}}\frac{t^3}{x^{3.5}}\mathscr{I}_m M_5\left(\frac{gt}{2x}\right)e^{igt^2/4x}, \tag{15}$$

(12) 式において $\omega\to 0$ とすると

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow[\omega\to 0]{} \frac{\theta_0}{i\omega}\left[-\frac{k_1(l_1-l)}{1+k_1}\right], \\ \Theta(\omega) &\xrightarrow[\omega\to 0]{} 0, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow[t\to\infty]{} \theta_0\left[\frac{k_1(l_1-l)}{1+k_1}\right], \\ \theta(t) &\xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

である。つまり最終的に船は上の量だけドリフトすることになる。

また θ については Ursell[2] と同じように議論を進めれば漸近値を求めることが出来るが大変複雑であってここではふれないが見当としてはやはり t^{-n} (n は恐らく 4 以上) のように減衰するであろう。

一方勿論振動する部分もあるからこの項は振動が左右非対称になることを意味する。この非対称のために上述のドリフトが生ずるのであろう。

iii) 最後に $t=0$ で $x=\dot{x}=\theta=\dot{\theta}=0$ で重心上方 a の点で x 方向に $f\delta(t)$ なるインパルスを加えた場合を考えよう。

$Q(\omega)=\mathscr{L}f\delta(t)=f$: 定数となるから

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2(M+\rho C_{11})X-\rho\omega^2C_{15}\Theta &= f \\ -\rho\omega^2C_{15}X+[Wm-\omega^2(I+\rho C_{55})]\Theta &= af \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad X &= \frac{f}{\Delta}[-\omega^2(I+\rho C_{55})+Wm+\rho a\omega^2C_{15}], \\ \Theta &= \frac{f}{\Delta}[-a\omega^2(M+\rho C_{11})+\rho\omega^2C_{15}], \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$H(x,\omega)\xrightarrow[\substack{x\to+\infty\\ \omega>0}]{} -\frac{\omega^2}{\rho g^2}f\left[M_1(\omega)+\frac{\omega^2 a}{g}M_5(\omega)\right]. \tag{19}$$

よって例えば $a=0$ とすると M_1 が求まる。

またこの時

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow[\omega\to 0]{a=0} -\frac{f}{\omega^2(M+\rho C_{11})}, \\ \Theta(\omega) &\to -\frac{f\rho C_{15}}{Wm(M+\rho C_{11})}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

従って

$$x(t)\xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{f}{M(1+k_1)}t, \tag{21}$$

これは (少々奇異に見えるが) 波のない時と同じ運動である。

θ については前同様計算は大変面倒である。

6.　変分原理とエネルギー原理

物体の運動はハミルトンの変分原理から導かれるはずであるが，波のある場合にこれを適用した例は見られない。しかし問題が複雑になって来ると非常に有用な方法であるので以下に検討する。

今ラグランジアンを L, 運動エネルギー T, ポテンシャルエネルギー V とし下添字 s で船の，w で水のそれらを表わすことにしよう。

$$\left.\begin{aligned} L_s &= T_s - V_s\,, \\ L_w &= T_w - V_w\,, \end{aligned}\right\}\quad L = L_s + L_w\,. \tag{1}$$

外力のなす仕事を W とすれば，ハミルトンの原理は

$$\delta\int_0^\infty Ldt = \delta\int_0^\infty Wdt \tag{2}$$

である。船については

$$T_s = \frac{1}{2}[M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+I\dot{\theta}^2] \tag{3}$$

$$V_s = \frac{\rho g}{2}By^2 + \frac{Wm}{2}\theta^2 \tag{4}$$

流体のものは (radiation potential のみ)

$$\left.\begin{aligned} T_w &= \frac{\rho}{2}\iint_D (\phi_x{}^2+\phi_y{}^2)dxdy\,, \\ V_w &= \frac{\rho g}{2}\int_F \eta^2(x)dx\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

よって

$$L_w = T_w - V_w = -\frac{\rho}{2}\int_F (\phi\phi_y + g\eta^2)dx - \frac{\rho}{2}\int_S \phi\phi_\nu ds\,,$$

水面条件によって上式は

$$L_w = -\frac{\rho}{2g}\frac{d}{dt}\int_F \phi\phi_t dx - \frac{\rho}{2}\int_S \phi\phi_\nu ds \tag{6}$$

となる。$t=0$ および∞で ϕ, ϕ_t のどちらかが 0 になるものとすれば

$$\int_0^\infty L_w dt = -\frac{\rho}{2}\int_0^\infty dt\int_S \phi\phi_\nu ds \tag{7}$$

となって S 上の境界値のみでこの値は決まる。

ϕ の境界条件は

$$\phi_\nu = -\sum_j u_j x_{j\nu}\,,$$

であるから

$$\int_0^\infty L_w dt = \frac{\rho}{2}\int_0^\infty dt \sum_j u_j \int_S \phi x_{j\nu} ds = \frac{1}{2}\sum_j \int_0^\infty x_j f_j dt \tag{8}$$

今 $W=0$ として y 方向の運動のみ考えて (2) 式を適用すれば

$$\int_0^\infty \left[-(M\ddot{y}+\gamma By)\delta y + \frac{1}{2}(\delta y f_2 + y\delta f_2)\right]dt = 0\,, \tag{9}$$

を得る。

しかし

$$\int_S (\phi_1\phi_{2\nu}-\phi_2\phi_{1\nu})ds = -\int_F (\phi_1\phi_{2y}-\phi_2\phi_{1y})dx + \int_{x\to\pm\infty} [\,\text{〃}\,]dy$$

で $x\to\pm\infty$ の検査面は常に波の外側にとることにすれば消えて水面条件を入れると

$$= -\int_F (\phi_1\phi_{2tt}-\phi_2\phi_{1tt})dx$$

よって t で積分すれば

$$\int_0^\infty dt\int_S (\phi_1\phi_{2\nu}-\phi_2\phi_{1\nu})ds = -\int_F [\phi_2\phi_{1t}-\phi_1\phi_{2t}]_{t=0}^{\infty}dx = 0 \tag{10}$$

この相反定理を利用すれば

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y\delta f_2 dt &= -\int_0^\infty y\left[\frac{d}{dt}\rho\int\delta\phi_2 y_\nu ds\right]dt = \rho\int_0^\infty dt\left[y\int_S \delta\phi_2 y_\nu ds\right]\\ &= -\rho\int_0^\infty dt\int_S \phi_{2\nu}\delta\phi_2 ds = \rho\int_0^\infty dt\delta\dot{y}\int_S \phi_2 y_\nu ds\\ &= \int_0^\infty f_2\delta y dt\ ,\end{aligned} \tag{11}$$

なる相反性がある。

よって (9) 式から

$$M\ddot{y}+\gamma By = f_2\ . \tag{12}$$

なる運動方程式を得る。

これを周波数領域で考えれば

$$M\ddot{Y}(\omega)+\gamma BY(\omega) = F_2(\omega) \tag{13}$$

であるからこれに δY をかけて ω について積分すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_2-(M\ddot{Y}+\gamma BY)]\delta Y d\omega\\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_0^\infty [f_2-(M\ddot{y}+\gamma By)]\delta y^* dt\\ &\qquad = \frac{1}{2}\int_0^\infty (M\dot{y}\delta\dot{y}^*-\gamma By\delta y^*+f_2\delta y^*)dt\ .\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。ここに

$$\left.\begin{aligned} y^*(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \\ &\text{つまり} \\ y^*(t) &= y(-t)\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

となっているから y^* を time reversed motion と呼べる。

(13) 式から

$$\left.\begin{aligned} T_s^* &= \frac{M}{2}\dot{y}\dot{y}^* \\ V_s^* &= \frac{\gamma}{2}Byy^*\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\int_0^\infty L_w^* dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^* f_2 dt\ , \tag{17}$$

$$L^* = L_s^* + L_w^*\ , \tag{18}$$

とおき Modified Lagrangian と呼ぶことにするとそれらの積分の周波数領域における表現は

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty T_s{}^* dt &= \frac{M}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty \dot{Y}\{(\omega)\}^2 d\omega \\ \int_0^\infty V_s{}^* dt &= \frac{\gamma B}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty Y^2(\omega) d\omega \\ \int_0^\infty L_w{}^* dt &= -\frac{\rho}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty \{\dot{Y}(\omega)\}^2 C_{22}(\omega) d\omega \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

となるから L^* に対して変分原理を適用すると (13) が直ちに導ける。($\delta\dot{Y} = i\omega\delta Y$ である)

次に (12) の両辺に $\dot{y}$ をかけると，まず左辺は

$$M\dot{y}\ddot{y} + \gamma By\dot{y} = \frac{d}{dt}[T_s + V_s]$$

右辺は

$$f_2\dot{y} = -\rho\dot{y}\int_S \phi_t y_\nu ds = \rho\int \phi_t \phi_\nu ds = -\rho\iint_D \nabla\phi_t \nabla\phi dxdy - \rho\int_F \phi_t \phi_y dx\ ,$$

水面条件を入れると

$$= -\frac{d}{dt}[T_w + V_w]$$

よって

$$\frac{d}{dt}[T+V] = 0$$

$$T + V = T_s + V_s + T_w + V_w = \text{Const.} \tag{20}$$

すなわち外力がなければ全系のエネルギーは不変である。

周波数領域では

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{T}_s(\omega) &= \int_0^\infty T_s e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{2}\int_0^\infty \dot{y}^2 e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty (\dot{Y}\omega')\dot{Y}(\omega-\omega') d\omega' \\ \mathscr{V}_s(\omega) &= \mathscr{L} V_s = \frac{\gamma B}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty Y(\omega')Y(\omega-\omega') d\omega' \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_w(\omega) + \mathscr{V}_w(\omega) &= -\int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_0^t f_2\dot{y} dt = \frac{i}{\omega}\int_0^\infty f_2\dot{y} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\rho}{2\pi\omega}\int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega-\omega')\dot{Y}(\omega')C_{22}(\omega')\omega' d\omega' \end{aligned} \tag{22}$$

よって

$$\mathscr{T}(\omega) = \mathscr{T}_s + \mathscr{V}_s + \mathscr{T}_w + \mathscr{V}_w = \frac{1}{2\pi\omega i}\int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega-\omega')[M\ddot{Y} + \gamma BY + \rho i\omega' C_{22}\dot{Y}] d\omega'\ .$$

を得るが右辺 [　] の中は 0 であるので

$$i\omega\mathscr{T}(\omega) = 0 \tag{23}$$

つまり

$$\frac{d}{dt}T = 0 \tag{24}$$

従って外力の働かない場合はエネルギー保存則によって運動を求めることもできるわけである。

7. 変分原理と境界値問題[6)]

ハミルトンの原理を水そのものの運動に適用すると境界値問題に関する変分原理になる。

この時は次のような積分を考える方がより一般的であり，またハミルトンの原理になることが判っている。

$$P=\frac{1}{\rho}\iint_D p(x, y, t)dxdy\ , \tag{1}$$

ここに D は流体の全領域としまた

$$\frac{p}{\rho}=\phi_t-\frac{1}{2}q^2+gy\ . \tag{2}$$

これを別けて

$$P=M-T-V+\text{Const.}\ , \tag{3}$$

とすれば

$$\begin{aligned} M&=\iint_D \phi_t dxdy=\frac{d}{dt}\iint_D \phi dxdy+\int_F \phi v_\nu ds \\ &=\int_F \phi\eta_t dx+\frac{d}{dt}\iint_D \phi dxdy\ , \end{aligned} \tag{4}$$

$$v_\nu=\eta_t y_\nu\ .$$

$$T=\frac{1}{2}\iint_D (\nabla\phi)^2 dxdy=-\frac{1}{2}\int_F \phi\phi_\nu ds\ , \tag{5}$$

$$V=\frac{g}{2}\int_F \eta^2 dx\ , \tag{6}$$

となるから変分をとると，つまり

$$\delta\int Pdt=0 \tag{7}$$

から

$$\int_F \delta\phi(v_\nu+\phi_\nu)ds-\int_F \delta\eta\left(\phi_t-\frac{q^2}{2}+g\eta\right)ds=0 \tag{8}$$

を得る。

従って

$$\left.\begin{aligned} \phi_\nu+v_\nu&=0 \\ \frac{p}{\rho}&=0 \end{aligned}\right\}\ \text{on}\ F \tag{9}$$

と等価になる。

これは簡単でしかも非線型問題も取扱かえるので便利であり，Whitham 等は波の分散の問題に応用しているが，実際上の計算は複雑であってまたさらに簡単化が要求される。次節には別の方法でこの問題を扱う。

なおこの方法は物体があっても勿論成立つ。

8. 波の分散[4)5)]

竹沢の Transient wave の実験によれば波の集中前後で著しいスペクトルの変化があるという。

また Benjamin 等は規則的なストークス波に波長の異なる成分波を合成すると不安定になり，崩れてしまうと言う。

一般に有限波高の波では波速 C は

$C^2=\dfrac{g}{k}(1+k^2a^2)$，$a$ は振幅

で与えられる。つまり線型理論よりも少し大きくなるが，これは波長の短い $(\lambda=2\pi/k)$ もので著るしい。

従って相対的に短波長の波が早く伝わるので時間的スペクトルは伝わるにつれて高周波成分がなくなっていくことになる。

一方全エネルギーは一定であるはずだからこのポテンシャルエネルギーの減少分は運動エネルギーに転換するはずである。これは表面近くで行なわれるであろうから表面近くの水を加速して遂には波は崩れ，渦などとなって一層スペクトルの変化を増すであろう。またさらには表面張力等も考えねばならないだろうがここでは考えないことにしよう。

この問題は複雑であるが波の崩れ等はないものとして以下定性的に具体的な例について考察しよう。

前節の式から境界条件を 2 次の項までとると

$$\left.\begin{aligned}\eta_t(x,t)&=-\phi_y(x,0,t)+c(x,t)\\ \eta(x,t)&=-\frac{1}{g}\phi_t(x,0,t)+d(x,t)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

但し

$$\left.\begin{aligned}c(x,t)&=\eta_x(x,t)\phi_x(x,0,t)+\eta(x,t)\phi_{xx}(x,0,t)\\ d(x,t)&=\frac{1}{2g}\{\phi_x{}^2+\phi_y{}^2\}-\frac{1}{g}\eta\phi_{ty}\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

ここで η, ϕ は次のように表現出来るものとしよう。

$$\left.\begin{aligned}\eta(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{ikx+i\omega t}d\omega\\ \phi(x,y,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}B(\omega)e^{-|k|y+ikx+i\omega t}d\omega\,,\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

第 1 近似では

$$k\fallingdotseq\frac{\omega|\omega|}{g}\tag{4}$$

であるが，今は

$$k=k(\omega,x)\tag{5}$$

となるものと考えて，t に関してをフーリェ変換すれば

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\eta=Ae^{ikx}\,,\quad \mathscr{L}\eta_x=ikAe^{ikx}\,,\\ &\mathscr{L}\phi=Be^{ikx}\fallingdotseq\frac{ig}{\omega}Ae^{-|k|y+ikx}\,,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}\phi_y|_{y=0}\fallingdotseq-|\omega|Ae^{ikx}\ ,\\&\mathscr{L}\phi_x|_{y=0}\fallingdotseq-i\omega Ae^{ikx}\ ,\\&\mathscr{L}\phi_{xx}\fallingdotseq-\frac{i\omega^3}{g}Ae^{ikx}\ ,\\&\mathscr{L}\phi_{ty}\fallingdotseq\omega^2Ae^{ikx}\ ,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

ここに

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}dt$$

であるから c, d には第1近似を代入して計算することにして

$$\left.\begin{aligned}i\omega A(\omega)&=|k|B(\omega)+C(\omega,x)e^{-ikx}\\A(\omega)&=-\frac{i\omega}{g}B(\omega)+D(\omega,x)e^{-ikx}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

を得る。これから B を消去すれば（以下 $k>0$ とする）

$$k-\frac{\omega^2}{g}=E(\omega,x)\ ,\tag{8}$$

$$E=\frac{1}{A}\left(\frac{i\omega}{g}C+kD\right)e^{-ikx}\ ,\tag{9}$$

(8) 式によって k の x に関する変化量が求まる訳である。 これは明らかに 複素値をとるからその虚数部は x に関する減衰，発散を示すことになる。

さてこの E を第 1 近似値によって以下に計算しよう。

$$\left.\begin{aligned}C(\omega,x)&=\mathscr{L}c(x,t)\ ,\\D(\omega,X)&=\mathscr{L}d(x,t)\ ,\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

であるからこれを $\omega>0$ として計算すると

$$\begin{aligned}giCe^{-ikx}=&\int_0^{\omega}A(\omega')A(\omega-\omega')\{\omega'^2+(\omega-\omega')^2\}e^{i\Omega_1x}d\omega\ ,\\&+\omega\int_0^{\infty}A(\omega+\omega')A(-\omega')(\omega+2\omega')^2e^{i\Omega_2x}d\omega'\end{aligned}\tag{11}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}g\Omega_1&=\omega'^2+(\omega-\omega')^2-\omega^2\ ,\\g\Omega_2&=(\omega+\omega')^2-\omega'^2-\omega^2\ ,\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}gDe^{-ikx}=&-\int_0^{\omega}A(\omega')A(\omega-\omega')\omega'^2e^{i\Omega_1x}d\omega'\\&-\omega^2\int_0^{\infty}A(\omega-\omega')A(-\omega')e^{i\Omega_2x}d\omega'\ ,\end{aligned}\tag{13}$$

ここで具体的に $t=0$ で

$$\eta(x,0)=\frac{\varepsilon a}{\pi(x^2+a^2)}\tag{14}$$

のような集中波について計算を進めて見よう。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x,0)e^{-ikx}dx=\varepsilon e^{-|k|a}\ ,$$

であるから

$$\eta(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{ikx+i\omega t}d\omega\ , \tag{15}$$

と書くと

$$A(\omega)=\frac{\varepsilon}{\pi g}e^{-\omega^2 a/g}|\omega| \tag{16}$$

である。これを代入すると長い計算の後に

$$E(\omega,x)=\frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\omega^6}{g^3}\left[\int_0^1 e^{2u(1-u)(a-ix)\omega^2/g}u(1-a)\{(1-u)^3-u^3\}du\right.$$
$$\left.+4\int_0^\infty e^{2\omega^2u[-a(1+u)+ix]/g}u^2(1+u^2)du\right], \tag{17}$$

をうる。

$x\rightarrow 0$ とすると

$$E(\omega,0)\fallingdotseq\frac{\varepsilon}{\pi a^3}\ , \tag{18}$$

となるが，これは第２近似では集中点のスペクトルは $t=0$ でも第１近似とはこれだけ異なって来ることを示すものである。

xが大きくなると近似的に

$$E(\omega,x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\frac{3i\varepsilon k^2x}{2\pi(x^2+a^2)}e^{k(a-ix)/2}\ , \tag{19}$$

となるから

$$i\left(k-\frac{\omega^2}{g}\right)x\fallingdotseq-\frac{3\varepsilon}{2\pi}\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)\left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2e^{\omega^2(a+ix)/2g}\ , \tag{20}$$

となり，xが大きくなると（集中点から離れると）急激に高周波成分が小さくなることがわかる。

しかし x が a に比して充分大きくなるとさらに

$$\left(k-\frac{\omega^2}{g}\right)x\rightarrow-\frac{3\varepsilon}{2\pi}\left(\frac{\omega^2}{g}\right)e^{\omega^2(a+ix)/2g} \tag{21}$$

となるから，その絶対値は略々一定となる。つまり集中前，あるいは集中後はスペクトルの絶対値はあまり変らないことを示していると言えよう。

これは略々竹沢の観察を説明しているように見える。

これが正しいとするとスペクトル変化（時間的）は集中点の険しい大きい波が出来る時に起こるものと言える。

結　　言

このようにして２次元的船体運動についてその運動の平均位置からの変位が微少である時は自動制御理論における線型応答の方法を適用し，またハスキントの関係式を利用することにより，船を平衡位置から少しずらして離すことによつて，波浪中の応答を求めることが出来ることがわかった。この関係はまた３次元運動に適用するのに何等障害はないので，容易に拡張出来よう。

またハミルトンの原理が波のある場合にも適用出来ることが示されたので，運動の近似計算を変分法を用いて解くことが出来ることになった。

最後に transient wave について若干の知見を得，減衰に関する定性的な計算を行って集中時の近傍でそれが起こると言うことを確かめた。

参 照 文 献

1) W. E. Cummins: Schiffstechnih, Bd 9 (1962).
2) F. Ursell: J. F. M. Vol. 19 (1964), Vol. 44 (1970).
3) Proc. of 5th O. N. R. Symp. (1964).
4) 竹沢: 造船学会論文集 3 篇 (1968, 70).
5) 造船学会耐航性シンポジウム Text (1969).
6) 水の波の分散に関する討論集 P. R. S. A. Vol. 299 (1967).
7) 別所: 防大理工学研究報告 Vol. 3, No. 1, 3 (1965～6).

防衛大学校理工学研究報告 第 11 巻 第 2 号

Impulse Responses of Motions of a Ship and Its Radiating Wave

(Dedicated to the late Professor T. Tamai)

By Masatoshi BESSHO

(Received Feb. 28, 1973)

Abstract

Arbitrary motions of a ship can be predicted if we know its frequency responses and that a frequency response can be computed from an impulse response. This is well known in general but it is a recent progress that this theory is reckoned by experiments and a theory of water waves.

This paper deals with this problem with regard to the theory of water waves, especially its radiating wave by impulsive motions of a ship. Its conclusion shows that the radiating wave has an information about wave-exciting force so that the impulse response of a motion and radiating wave may give a whole information of a ship motion whose displacement from the equilibrium position is very small.

In addition, Hamilton's principle in this virtually non conservative case and the transmission of an impulsive wave of a finite amplitude are dealt with.