

2次元半没垂直平板の造波抵抗について

正員 別所 正 利

**On the Wave-Making Resistance of a Vertical Plate Partly
Immersed in Water (Two-Dimensional Problem)**

By Masatoshi BESSHO

西 部 造 船 会 会 報

第 51 号 別 刷

昭 和 51 年 3 月

Reprinted from
TRANSACTIONS
OF
THE WEST-JAPAN SOCIETY OF
NAVAL ARCHITECTS
No. 51 MARCH 1976

2 次元半没垂直平板の造波抵抗について

正 員 別 所 正 利*

On the Wave-Making Resistance of a Vertical Plate Partly Immersed in Water (Two-Dimensional Problem)

By Masatoshi BESSHO

Summary

Since long years, there has been a question whether the solution would be unique in the theory of wave resistance of a body which pierce water surface. The present problem has simple analytical solutions so that it may be helpful in this point of view. Really, the result shows the existence of a homogeneous singular solution which may be corresponding to a slight change of sinkage.

Other parts of this paper are devoted to discussions of force and moment and other topics associated with the above problem.

1. 序 論

造波抵抗の線型理論は今日その華やかな実用面への応用にも拘わらず今なおいくつかの難点を蔵している。

その内で所謂 line integral の問題は解の存在と一義性の問題に関連して難問の一つである²⁾。

著者はこの問題に関して既に幾つかの見解を示して来たが数値計算例を伴わないので具体性を欠くうらみがある。そこで今回は解析的に簡単に解ける数学的難点の少ない問題として 2 次元一様流れの中におかれた半没垂直平板を探り上げて上述の点を考察する事とした³⁾。

そう言う訳で物理的には全く不都合ではあるけれども水は板の下端をまわって流れると仮定した。あるいは換言すれば排水量型の船の長さが短くなつた極限の問題を考えたと言う事も出来ようがいづれにしても言わば思考実験である。

なお物理的に可能な流れについての考察は附録 E に示してある。

この解は数学的には全く簡単なので解の不定さとその性質ひいてはその物理的意味、水上船と没水体の相違点等について明快な解釈を許してくれる。

2. 速度ポテンシャルと境界条件

座標系を図 1 のようにとり複素速度ポテンシャルを次のように定義する。

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (1)$$

境界条件は平板上で x 方向の速度が一様速度と打消し合えばよいから

$$u = -\varphi_x(0, y) = 1, \quad \text{for } 0 > y > -1, \quad (2)$$

水面での圧力一定の条件は線型化して

$$\varphi_x(x, 0) + r\eta(x) = 0, \quad r = g/U^2, \quad (3)$$

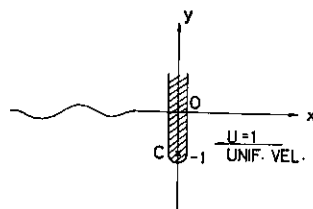


Fig. 1. Coordinate system

で与えられ、 η は水面変位であるが水面が一つの流線を形づくる事から次式で与えられる。

$$\eta(x) = -\psi(x, 0), \quad (4)$$

ここで次の補助関数を導入しよう。

$$X(z) = \tau f(z) - i \frac{d}{dz} f(z), \quad (5)$$

そうすると X に対する境界条件は水面では (3) から

$$\mathcal{J}_m\{X(x)\} = 0, \quad (6)$$

又平板上では (2) を 1 回積分して任意定数を ε とすると

$$\mathcal{J}_m\{X(iy)\} = 1 - \tau(y + \varepsilon), \quad 0 > y > -1. \quad (7)$$

となる故今 X が求められると f は (5) を解いて上流に波がない事を考えて

$$f(z) = ie^{-\tau z} \int_{+\infty}^z X(t) e^{\tau t} dt, \quad (8)$$

と与えられる。

この方法では 3 次元問題に表われる所謂 line integral に対応する項 (今の場合はそれは水面を切る点における特異性) は表われないのでその点を見る為に普通に使われる特異点分布として上式を表現して見よう。

その為にまず (6) を満たす X として次の表現を考えよう。ただし σ は実関数とする。

$$X(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sigma(\eta) \frac{z d\eta}{z^2 + \eta^2}, \quad (9)$$

ここでさらに次式によつて m なる関数を導入しよう。

$$\sigma(y) = -\frac{d}{dy} m(y) - \tau m(y), \quad m(-1) = 0, \quad (10)$$

これらの式を (8) に代入して部分積分すると

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-1}^0 \frac{m(\eta) \eta}{z^2 + \eta^2} d\eta + \frac{\tau}{\pi i} \int_{-1}^0 m(\eta) S\{(z + i\eta)\} d\eta + \frac{i}{\pi} m(0) S(\tau z), \quad (11)$$

ここに

$$S(\tau z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{k - \tau - \eta i} dk, \quad (12)$$

を得る。

これは水面下に二重吹出し m がある時のポテンシャルの表現であるがこの右辺第 3 項が問題の特異性であり平板が水面を切つている為に存在する項でもし水没していれば別に考える必要はなく 0 として一般性を失う事はない。しかし一方循環を考えに入れると上式では充分でないので附録 D で考察する。

3. 解

(6), (7) の条件を満足し積分可能で水中で一価、且つ無限遠で正則な解は次の関数の線型結合で表わされる。

$$X_0(z) = X_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right\} = -\frac{2}{\zeta + \frac{1}{\zeta}}, \quad \mathcal{J}_m(X_0) = 0, \quad (1)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{\zeta}, \quad \mathcal{J}_m(X_1) = -y, \quad \text{on } C, \quad (2)$$

$$X_2(z) = \frac{2}{\pi} \log \left(\frac{z+1}{z-1} \right), \quad \mathcal{S}_m(X_2) = 1, \quad \text{on } C, \quad (3)$$

これらはすべて実軸上で

$$X_j(-x) = -X_j(x) = -\overline{X_j(x)}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4)$$

となつてゐるので §1(8) より X_j に対応する解 f_j は

$$f_j(-x) = A_j e^{i\tau x} - \overline{f_j(x)}, \quad (5)$$

$$A_j = -i \oint X_j(z) e^{i\tau z} dz, \quad (6)$$

なる関係がある。

また特に

$$B_j = B_{jr} + iB_{ji} = f_j(+0) = -i \int_0^\infty X_j(t) e^{i\tau t} dt, \quad (7)$$

とおくと

$$f_j(-0) = A_j - \overline{f_j(-0)} = A_j - B_j, \quad (8)$$

である。 A, B 等の表現は附録 A に記し又数値は表 1, 2 に示す。

Table 1 Coefficients A_j , H_j and λ , μ

τ	A_0	A_1	A_2	H_0	H_1	$-H_2$	λ	$-\mu$
0.1	6.2989	3.1455	4.0033	2.5953	2.5888(1)	2.7603	4.0600(1)	5.0177
0.2	6.3462	3.1573	4.0134	3.6208	1.7924(1)	4.0793	1.3625(1)	3.8464
0.4	6.5370	3.2048	4.0537	5.8653	1.4094(1)	7.3266	4.8997	3.4220
0.6	6.8615	3.2851	4.1216	8.8249	1.3468(1)	1.2037(1)	2.7927	3.5244
0.8	7.3294	3.3997	4.2185	1.2964(1)	1.3892(1)	1.9038(1)	1.9054	3.8223
1.0	7.9549	3.5510	4.3461	1.8894(1)	1.4924(1)	2.9494(1)	1.4296	4.2539
1.5	1.0347(1)	4.1120	4.8162	4.8393(1)	1.9592(1)	8.4133(1)	0.8649	5.8864
2	1.4323(1)	4.9971	5.5500	1.2576(2)	2.7583(1)	2.3264(2)	0.6140	8.5087
3	3.0667(1)	8.2799	8.2146	8.8275(2)	6.0288(1)	1.7235(3)	0.3853	1.9002(1)
4	7.1012(1)	1.5330(1)	1.3775(1)	6.3631(3)	1.4075(2)	1.2630(4)	0.2797	4.4658(1)
5	1.7115(2)	3.0581(1)	2.5479(1)	4.6370(4)	3.4046(2)	9.2513(4)	0.2192	1.0825(2)

NOTE: Number in () shows index of 10.

Table 2 Coefficients $B_j = B_{jr} + iB_{ji}$

τ	B_{0r}	B_{1r}	B_{2r}	$-B_{0i}$	$-B_{1i}$	$-B_{2i}$
0.1	1.4746	0.7530	0.9690	2.4271	1.4616	2.1783
0.2	1.3857	0.7225	0.9396	1.7527	1.1201	1.7415
0.4	1.2271	0.6665	0.8850	1.1145	0.7891	1.3140
0.6	1.0910	0.6164	0.8356	0.7775	0.6064	1.0737
0.8	0.9740	0.5717	0.7908	0.5653	0.4853	0.9110
1.0	0.8731	0.5316	0.7501	0.4210	0.3981	0.7910
1.5	0.6763	0.4480	0.6632	0.2138	0.2595	0.5919
2	0.5375	0.3832	0.5934	0.1139	0.1801	0.4691
3	0.3646	0.2915	0.4894	0.0347	0.0977	0.3268
4	0.2684	0.2318	0.4167	0.0112	0.0594	0.2484
5	0.2104	0.1908	0.3636	0.0037	0.0392	0.1996

さて f_j の虚部 ψ_j は平板上で

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= B_{0i} e^{\tau y}, \\ \psi_1 &= -\frac{1}{r^2} - \frac{y}{r} + \left(\frac{1}{r^2} + B_{1i} \right) e^{\tau y}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{r} + \left(B_{2i} - \frac{1}{r} \right) e^{\tau y}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となつてゐるので §2(7) を満たすには少し整理しなければならない。

先ずそれを ψ で表わすと

$$\psi = -y - \varepsilon, \quad (10)$$

となるのでこれに合せて次の3つの関数を定義しよう。

$$\left. \begin{aligned} F_d(z) &= \phi_d + i\psi_d = -f_0(z)/B_{01}, \\ F_1(z) &= \phi_1 + i\psi_1 = \tau f_1(z) + \tau \lambda f_0(z), \\ F_2(z) &= \phi_2 + i\psi_2 = \tau f_2(z) + \tau \mu f_0(z), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\lambda = (B_{11} + 1/\tau^2)/(-B_{01}), \quad \mu = \left(\frac{1}{\tau} - B_{21}\right)/B_{01}, \quad (12)$$

そうすると平板上では

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -e^{\tau y}, \\ \psi_1 &= -y - \frac{1}{\tau}, \\ \psi_2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となるから (10) を満たす解は

$$f(z) = F_1(z) + \left(\frac{1}{\tau} - \varepsilon\right) F_2(z) = \tau f_1(z) + \tau \alpha f_2(z) + \tau \beta f_0(z), \quad (14)$$

$$\alpha = 1/\tau - \varepsilon, \quad \beta = \lambda + \mu\alpha, \quad (15)$$

のように書ける。

この任意定数 ε は (10) 式からわかるように原点における水面上昇量であるがこの解はそれが不定となる事を示している。

なお F_d は動揺問題との比較から散乱ポテンシャルと呼んでおこう。

最後に無限後流では波の項が主要項で

$$F_j(z) \rightarrow H_j(r) e^{-i\tau z} + \dots, \quad (16)$$

となるが H_j の表示は附録 A に数値は表 1 に示す。

4. 力とモーメント

先ず造波抵抗は後流中の波の振幅で決まるが §2(4), §3(16) よりそれは H_j で与えられるから

$$R_w = \rho g H^2(r)/4, \quad (1)$$

実際の流れでは x 方向にはこの他に飛沫抵抗が考えられるが前節の解では原点近くの垂直速度は高々対数的に無限大となるだけなので運動量の損失はなく造波以外の抵抗はない (附録 E 参照)。

また計算で得られる波高は現実の最大波高を遥かに越える大波高であつて実際のでないが序論に述べた趣旨でそのまま記す事にする。

この点を更に確かめる為には圧力積分を実行して力を求めればよいが今の場合はそれは Blasius の式と同等なので

$$X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_c \left(1 + \frac{df}{dz}\right)^2 dz, \quad (2)$$

$$M = -\rho \frac{c}{2} \int_c \left(1 + \frac{df}{dz}\right)^2 z dz, \quad (3)$$

ここに c は原点から平板を右廻りにまわつて原点にかえる曲線とする。

となるが附録 B に見るように結果は次のようになる。

$$X = -R_w, \quad (4)$$

$$Y/\rho = \alpha r(1-r) \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta \right) - \frac{\pi}{2} r^2 \beta^2, \quad (5)$$

$$M/\rho = -\frac{1}{r} H^2(r) + \frac{1}{2} H(r) \{rG(0) + \varphi(0)\}, \quad (6)$$

このようにして上述の事は確かめられるが一方垂直力が有限である事がわかる。

これは平板翼における先端吸引力と同じものであつて例えば無限流体中の流れに垂直な平板（今の場合で言えば $r \rightarrow \infty$ ）の下半分に働く力は次式で与えられる。

$$Y/\rho = -\pi/2, \quad (7)$$

垂直力の中にはさらに一次の項と2次の項がまじつているのでそれを別けて書く

$$Y = Y_0 + Y_1, \quad (8)$$

$$Y_0 = -\rho [\varphi(x)]_{x=-\infty}^{+\infty} = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x, 0) dx = -\rho g \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x) dx, \quad (11)$$

となつて Y_1 は2次の項であるから線型理論では無視すべき項であるが今の場合は Y_0 と同じオーダーになる。（表 6, 7 参照）

また Y_0 は (11) から没水体では φ がジャンプしないと考えられるので0となり垂直力は Y_1 で与えられる。

最後に (11) 式の最後の表現は排水量が垂直力に等し事を現わしているので附録 C においてこの表現の一般性について考察する。

5. いろいろな解

解 §3(14) において ε に種々の値を代入すると種々の性質を持つ解が得られそれに働く力は前節の式で計算される。表3には計算に用いた ε の値を、表4以下には力とモーメントを又図2には水面変位の例を示す。

以下に夫々の場合の特徴を説明しよう。

Table 3 Value of $r\varepsilon$

r	Case						
	0	1	2	3	4	5	6
0.1	1	0.8302	0.4486	0.0664	0.0621	0	-0.3506
0.2	1	0.7877	0.4618	0.1319	0.1212	0	-0.4844
0.4	1	0.7373	0.5043	0.2513	0.2305	0	-0.4330
0.6	1	0.7126	0.5561	0.3539	0.3286	0	-0.2628
0.8	1	0.7009	0.6107	0.4417	0.4162	0	-0.1116
1.0	1	0.6639	0.6639	0.5178	0.4940	0	0.0040
1.5	1	—	0.7767	0.6665	0.6507	0	0.1876
2	1	—	0.8553	0.7718	0.7629	0	0.2968
3	1	—	0.9400	0.8973	0.8951	0	0.4424
4	1	—	0.9753	0.9559	0.9554	0	0.5635
5	1	—	0.9900	0.9817	0.9816	0	0.6769
Remarks	$\varepsilon=1/r$	$Y=0$	$Y: \text{Max.}$	Submerged	$R_w=0$	$\varepsilon=0$	$M=0$

Table 4 Wave-making resistance

$$C_w = R_w / \left(\frac{\rho}{2} L^3 U^2 \right)$$

r	Case						
	0	1	2	3	4	5	6
0.1	3.351(1)	2.247(1)	5.691	0.695(-3)	0	0.147	6.491
0.2	3.213(1)	1.848(1)	4.827	0.477(-2)	0	0.611	1.526(1)
0.4	3.973(1)	1.723(1)	5.029	0.289(-1)	0	3.566	2.954(1)
0.6	5.442(1)	1.780(1)	6.248	0.771(-1)	0	1.304(1)	4.223(1)
0.8	7.720(1)	1.836(1)	8.569	0.148	0	3.924(1)	6.311(1)
1.0	1.114(2)	1.256(1)	1.256(1)	0.245	0	1.061(2)	1.044(2)
1.5	2.879(2)	—	3.748(1)	0.589	0	9.990(2)	5.059(2)
2	7.608(2)	—	1.157(2)	1.074	0	7.874(3)	2.939(3)
3	5.452(3)	—	9.999(2)	2.415	0	3.966(5)	1.014(5)
4	3.962(4)	—	7.885(3)	4.096	0	1.820(7)	3.063(6)
5	2.898(5)	—	6.004(4)	6.282	0	8.247(8)	7.946(7)

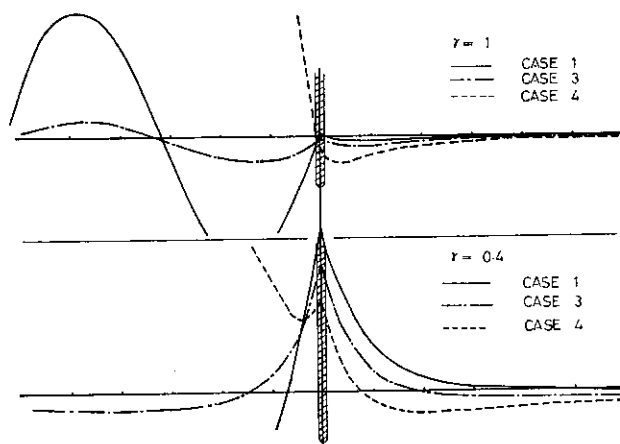


Fig. 2. Examples of surface elevation

CASE 0) $\varepsilon = 1/r = \eta(0)$ とした場合である。 $1/r = U^2/g$ であるつまり速度水頭の倍となるがこれは線型理論的には速度水頭と考えてもよい。いづれにしても ε の上限の場合で §3(4) において F_2 が消える場合であるが水面変位も力も大変大きく現実的ではない。

CASE 1) 垂直力 Y が 0 となる場合である。 Y は前節 (5) によつて ε の 2 次式となるので $Y=0$ となる ε は 2 つあるが今はその内の小さい方を探つて示してある。また $r>1$ では Y は常に負となりそのような ε は存在しない。

Table 5 Lever of moment

$$l_w/L = (M/R_w)(g/U^2)$$

r	0	1	2	3	4	5	6
0.1	-0.266	-0.251	-0.165	1.53(1)	∞	-1.42	-0.5
0.2	-0.279	-0.250	-0.136	7.04	∞	-1.02	-0.5
0.4	-0.300	-0.252	-0.132	3.04	∞	-0.702	-0.5
0.6	-0.320	-0.257	-0.156	1.84	∞	-0.577	-0.5
0.8	-0.340	-0.261	-0.189	1.32	∞	-0.522	-0.5
1.0	-0.360	-0.224	-0.224	1.04	∞	-0.499	-0.5
1.5	-0.404	—	-0.307	0.754	∞	-0.488	-0.5
2	-0.437	—	-0.371	0.639	∞	-0.492	-0.5
3	-0.474	—	-0.446	0.504	∞	-0.498	-0.5
4	-0.490	—	-0.478	0.410	∞	-0.499	-0.5
5	-0.496	—	-0.491	0.323	∞	-0.500	-0.5

Table 6 Linear part of vertical force

$$C_{Y0} = Y_0 / \left(\frac{\rho}{2} U^2 L^2 \right)$$

r	Case						
	0	1	2	3	4	5	6
0.1	6.88	5.63	2.82	0	-0.315(-1)	-0.489	-3.07
0.2	5.04	3.81	1.92	0	-0.622(-1)	-0.766	-3.58
0.4	4.38	2.84	1.48	0	-0.121	-1.47	-4.00
0.6	4.54	2.52	1.42	0	-0.177	-2.48	-4.33
0.8	5.00	2.32	1.51	0	-0.229	-3.96	-4.96
1.0	5.68	1.72	1.72	0	-0.280	-6.10	-6.05
1.5	8.25	—	2.73	0	-0.391	-1.65(1)	-1.18(1)
2	1.24(1)	—	4.53	0	-0.483	-4.18(1)	-2.57(1)
3	2.88(1)	—	1.20(1)	0	-0.620	-2.52(1)	-1.28(1)
4	6.91(1)	—	3.05(1)	0	-0.710	-1.50(2)	-6.15(2)
5	1.69(2)	—	7.65(1)	0	-0.766	-9.06(3)	-2.81(3)

Table 7 Vertical force

$$C_Y = Y / \left(\frac{\rho}{2} U^2 L^2 \right)$$

r	Case						
	0	1	2	3	4	5	6
0.1	-5.18(1)	0	4.76(1)	-0.181	-1.25	-1.82(1)	-1.61(2)
0.2	-2.33(1)	0	1.35(1)	-0.343	-1.26	-1.36(1)	-1.00(2)
0.4	-1.21(1)	0	3.42	-0.614	-1.30	-1.26(1)	-5.20(1)
0.6	-8.82	0	1.25	-0.839	-1.39	-1.46(1)	-3.30(1)
0.8	-7.30	0	0.414	-1.04	-1.51	-1.86(1)	-2.61(1)
1.0	-6.42	0	0	-1.21	-1.64	-2.51(1)	-2.48(1)
1.5	-5.29	—	-0.410	-1.60	-1.96	-5.95(1)	-3.44(1)
2	-4.74	—	-0.495	-1.91	-2.23	-1.49(2)	-6.37(1)
3	-4.20	—	-0.391	-2.32	-2.53	-9.35(2)	-2.62(2)
4	-3.93	—	-0.237	-2.52	-2.63	-5.76(3)	-1.03(3)
5	-3.77	—	-0.127	-2.62	-2.67	-3.56(4)	-3.56(3)

ε の値は前の場合について大きい。船が上下方向に拘束力を受けないで走る時は垂直力は静的浮力の変化分と平衡しなければならないが今の場合は静的浮力はないと考えるのでこれはそのような場合に相当すると考えられる。

CASE 2) 垂直力 Y が最大となる場合である。 Y は $r < 1$ では正であるが $r > 1$ では前述の通り負である。一般に前の場合とよく似ている。図示はしなかつたが水面変位も殆ど等しい。

CASE 3) 板の上端で速度ポテンシャルが連続となる場合で §1 の後の方でふれたように没水体の極限と考えられる。また一方 §4 (11) によつて第1近似の垂直力が0の場合とも考えられる。前の場合に比して ε は小さくなり力特に造波抵抗はめだつて小さく次の場合によく似ている³⁾。

CASE 4) 造波抵抗が0となる場合で表5中モーメントと艇が ∞ と記してはあるが §4 (6) 式からわかるようにモーメントも0($H=0$ 故)である。水面変位は前後対称となる。

CASE 5) $\varepsilon=0$ とおいた場合。

CASE 6) モーメントの艇が $-1/2$ つまり着力点が板の真中に来る場合で $r < 1$ では ε が負となる唯一の場合であるが力は再び大変大きくなっている。

以上のようにいろいろな解の内どれを探るかについては数学的には決められないので物理的もしくは力学的に定めなければならない。そうすると結局のところ流れの様子(水没しているかどうか)と垂直力の大きさを指定するのが最も無難と考えられる。

滑走板の場合にも同様な斉次解もしくは不定さが現われるがそれは Kutta の流出条件によつて一義的に決めら

れその反面それによつて後端の下位置が定まつてしまう⁴⁾⁶⁾⁷⁾。その事から考えると排水量型の場合は流出条件のようなものがないのでその分だけ全く不定となるのであろう⁸⁾。このように考えて来るとこの不定さは物体の上下移動に関連していると考えられる。

さて §3(14) の F_2 については

$$\partial\Phi_2/\partial n = 0, \quad (1)$$

となるので法線速度が指定される場合は全く不必要な解であるが今の場合は上に見たように大きい役割を演ずる訳である。今はそれを斉次解と呼んでおこう。

ここで一般的に図3のような物体が y_0 だけ上方に平行移動した場合の境界条件について考えて見よう。

$y = \eta(x)$ を元の表面のオフセットとすると境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi(x, \eta(x)) = \frac{\partial x}{\partial n}(x, \eta), \quad (2)$$

となるが y_0 だけ移動した後では y_0 は充分小さいとすると

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi(x, \eta) = \frac{\partial x}{\partial n}(x, \eta) - y_0 \frac{\partial}{\partial n} \varphi_y(x, \eta), \quad (3)$$

を得るが右辺第2項は第1項に比して高次の項なので省略すると y_0 だけの移動によつて境界条件は(2)のまま変わらない事になる。従つて若し y_0 なる上下移動に対応するポテンシャルがあるとすればそれは(1)のような斉次の境界条件を満たさねばならず今の場合は正に §3(10) によつて y 座標の ε だけの変化に対応している。

6. 結 論

2次元半没垂直平板のまわりの流れを排水量型船の一つの極限と見立て、解析的に解いて次の結論を得た。

- i) 水面と平板との交点には特異点があるのが一般解でそれがなくなると没水体と見なされる。この特異点は3次元問題では所謂 line integral に相当するものである。
- ii) その交点に対数的特異性を有する斉次解つまり法線速度が0になる解があつてこれは線型理論的には物体の僅かな上下移動に対応していると考えてもよい。

また今のように水面と物体側面が直交している場合はそこの複素速度は高々対数的に無限大となるだけなので線型理論的には飛沫抵抗は存在しない。

- iii) 薄翼理論における先端吸引力と同じように垂直力が存在し斉次解の採り方でそれは大きく変動する。

垂直力が働らく事は水に沿直方向の運動量変化を与える事であるから力学的に考えた場合系の運動を指定する為には当然この値を指定しておかねばなるまい。

今の場合は垂直力を指定すると解は2つあるかもしくは存在しない。

造波抵抗も斉次解のとり方で極端に変わるので上のように斉次解を決めるとすると結局垂直力の大きさに応じて変る事になる。

- iv) 従来の低速における鏡像近似解は水面における特異性を含まないのでどちらかと言うと没水体の水面に近づいた極限の近似と見なされるので一般的な流れ模様の表現には無力であると同時にここで求めた解では波の散乱に対応する項の貢献が大変大きくてこの面でも無力である。

- v) 全没垂直平板の場合は循環が与えられれば解は一義的に決まり、そのポテンシャルは水面に近づいた極限

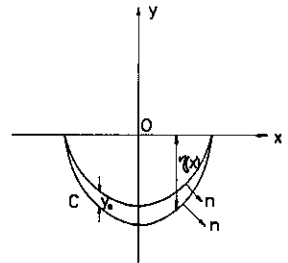


Fig. 3. Variation of boundary condition for sinkage

において上述のそれに移行する。そして循環をもつ項が上述の斉次解になる。

vi) また高速において板の下端で水が切れる場合は滑走板の場合と同様に扱ってその場合と同様もし流出条件を指定しなければ解は不定となる。

vii) 派生的に静的浮力に関するアルキメデスの原理が定常流の場合にも水面変化を含めれば成立つ事を示した。

参 照 文 献

- 1) M. Abramovitz and I. A. Stegun: "Handbook of Mathematical Functions" NBS Appl. Math. Series 55, 1964.
- 2) J. V. Wehausen: "The Wave Resistance of Ships" Advances in Appl. Mecha., vol. 13, Academic Press, 1973.
- 3) 別所正利, 水野俊明: "一様流れの中の半没円筒 および 垂直平板の造波抵抗について" 防大和文紀要 (理工学編) 1巻1号, 昭和38年3月
- 4) M. Bessho and K. Nomura: "A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing" Mem. of Defense Academy, vol. 10, No. 1, 1970.
- 5) M. Bessho: "Variational Approaches to Ship Wave Problems", 8-th Symp. on Naval Hydrodynamics, 1970.
- 6) T. F. Ogilvie: "Singular Perturbation Problems in Ship Hydrodynamics" Do. 1970.
- 7) T. Y. Wu: "A Singular Perturbation Theory" for Nonlinear Free Surface Flow Problems Intern. Shipb. Progress, vol. 14, 1967.

附録 A 種々の積分

$$A_0 = -i \oint X_0(z) e^{izr} dz = \int_0^{2\pi} e^{-r \sin \theta} d\theta = 2\pi I_0(r), \quad (1)$$

$$A_1 = -i \oint X_1(z) e^{izr} dz = \int_0^{2\pi} e^{-r \sin \theta} \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\pi}{r} I_1(r), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -i \oint X_2(z) e^{izr} dz = -\frac{1}{\pi i} \oint e^{\frac{ir}{2}(\zeta - \frac{1}{\zeta})} \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \left(1 + \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{4}{r} \int_0^r I_0(t) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

$$B_0 = -i \int_0^\infty X_0(t) e^{irt} dt = \frac{\pi}{2} (I_0(r) - L_0(r)) - iK_0(r), \quad (4)$$

$$B_1 = -i \int_0^\infty X_1(t) e^{irt} dt = \frac{\pi}{2r} (I_1(r) - L_1(r)) + i \left\{ \frac{1}{r} K_1(r) - \frac{1}{r^2} \right\}, \quad (5)$$

$$B_2 = -i \int_0^\infty X_2(t) e^{irt} dt = \frac{1}{r} \int_0^r (I_0(t) - L_0(t)) dt - \frac{2i}{\pi r} \int_0^r K_0(t) dt, \quad (6)$$

ここに I, K は変形ベッセル関数, L は虚変数のストループ関数である¹⁾。

これらの関係から容易に本文の諸量は次のように求められる。

$$\lambda = K_1(r) / \{r K_0(r)\}, \quad -\mu = \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^r K_0 dt \right] / \{r K_0(r)\}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} H_d(r) &= 2\pi I_0(r) / K_0(\lambda), & H_1(r) &= 2\pi / \{r K_0(r)\}, \\ H_2(r) &= -2\pi \{I_0(r) + L_0(r)\} / K_0(r), \end{aligned} \right] \quad (8)$$

附録 B 力の積分

$$X-iY = \frac{i\rho}{2} \int_c \left\{ 2 \frac{df}{dz} + \left(\frac{df}{dz} \right)^2 \right\} dz, \quad (1)$$

から

$$I = - \int_c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz, \quad (2)$$

とおくと

$$X = \mathcal{J}_\infty \left[\frac{\rho}{2} I \right], \quad (3)$$

$$Y = -\rho[\varphi] + \mathcal{A}_e \left[\frac{\rho}{2} I \right], \quad (4)$$

ここに $[\varphi] = \varphi(+0, 0) - \varphi(-0, 0)$, 以下同様。

となるから I を求めればよい。

§2(5) を代入して部分積分すると

$$I = \frac{ir}{2} [f^2] + \int_c (X^2 - r f X) dz, \quad (5)$$

$X(z)$ は簡単な関数なので容易に

$$\int_c X^2 dz = -2r^2 \left[\frac{2}{3} + 2\alpha^2 + \frac{\pi}{2}\beta^2 + \alpha \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \right) + 2\beta + \pi\alpha\beta \right], \quad (6)$$

と計算出来る。

次に板の前後での関数の差から直ちに

$$\mathcal{J}_\infty \int_c X f dz = H(r) \varphi(+0), \quad (7)$$

一方 $X = X_r + iX_i$ とおき X_r, X_i を実とすると

$$\mathcal{A}_e \int_c X f dz = - \int_c (X_r \psi + X_i \varphi) dy$$

を得るが φ, ψ に §2(8) の実部虚部を夫々代入して部分積分すると

$$\mathcal{A}_e \int_c X f dz = -2r \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\pi} \alpha + 2\beta \right) - 2\alpha \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta \right) - \left(\alpha + \frac{1}{r} \right) [\varphi], \quad (8)$$

を得る。

これらを加え合せて次の結果を得る。

$$X/\rho = -rH^2(r)/4, \quad (9)$$

$$Y = Y_0 + Y_1,$$

$$Y_0/\rho = -[\varphi],$$

$$Y_1/\rho = [\varphi] + \alpha r(1-r) \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta \right) - \frac{\pi}{2} r^2 \beta^2, \quad (10)$$

$$Y/\rho = \alpha r(1-r) \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha + \pi\beta \right) - \frac{\pi}{2} r^2 \beta^2,$$

次にモーメントは

$$\mathcal{R}_e \int_c z \frac{df}{dz} dz = 0$$

となるので

$$M = \mathcal{R}_e - \frac{\rho}{2} \int_c \left(\frac{df}{dz} \right)^2 z dz, \quad (11)$$

となるが前同様 §2 (5) を代入して

$$\int_c X^2 z dz = 0, \quad \int_c f X z dz = r \int_c z f^2 dz + \frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{r} \int_c f X dz + \frac{i}{2r} [f^2] \right\},$$

となる事を代入すると

$$M = \mathcal{R}_e \frac{\rho}{2} \left\{ -r \int_c f X z dz - \frac{i}{2} \int_c f X dz + \frac{1}{4} [f^2] \right\}, \quad (12)$$

を得るが右辺第2項は(8)で与えられ第3項もわかっているから第1項のみ考えればよい。

積分路を実軸上に変化させて §3 (5) を用いると

$$\mathcal{R}_e \int_c f X z dz = -H(r) G(r), \quad (13)$$

$$G(r) = \int_0^\infty X(x) \cos r x x dx, \quad (14)$$

を得るがこの関数については附録 A(4), (5), (6) の表現から容易に求まつて

$$G(r) = r \frac{d}{dr} \{ B_{1r}(r) + \alpha B_{2r}(r) + \beta B_{0r}(r) \} \quad (15)$$

これらの結果をまとめると

$$M/\rho = \frac{1}{2} H(r) \{ r G(r) + \varphi(0) \} - \frac{1}{r} H^2(r), \quad (16)$$

附録 C アルキメデスの原理の拡張

本文 §4 (11) 式によると水面の面積変化に水の比重をかけたものが垂直力となつてゐるがこれは静力学におけるアルキメデスの原理と同じ形である。

しかしこの原理は以下に示すように定常問題では非線型項迄含めて厳密に成立つ。

さてベルヌーイの定理により圧力は

$$p/\rho + \varphi_x + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g y = 0, \quad (1)$$

でこれを積分して垂直力 Y が得られる。

$$Y = - \int_c p \frac{\partial y}{\partial n} ds, \quad (2)$$

水面では圧力 0 とすると (1) より

$$\varphi_x(x, \eta) + \frac{1}{2}(\varphi_x^2(x, \eta) + \varphi_y^2(x, \eta)) + g \eta(x) = 0, \quad (3)$$

であるから (2) の積分路は自由表面 F を含ませても値は変らない (図4参照)。

境界条件は

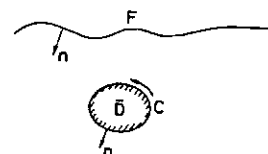


Fig. 4. Submerged body

$$\partial\varphi/\partial n = -\partial x/\partial n \quad \text{on } C \text{ and } F, \quad (4)$$

(1) を (2) に代入して積分する際次の積分は

$$\begin{aligned} & \int_{c+F} \left\{ \varphi_x + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right\} y_n ds \\ &= \int_{c+F} \{ \varphi_x y_n - \varphi_y x_n \} ds + \int_{c+F} \left\{ \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) y_n - \varphi_y \varphi_n \right\} ds \end{aligned}$$

と書けるがこの右辺の積分は φ が無限遠方で 0 となるならば (今の場合波の項は結果に関係はない) グリーンの定理によつて共に 0 となる。

従つて

$$Y = \rho g \int_{c+F} y \frac{\partial}{\partial n} y ds = \rho g \int_F \eta(x) dx, \quad \varphi = \int_c y \frac{\partial}{\partial n} y ds = \iint_B dx dy, \quad (5)$$

を得る。

この証明においては没水体である必要はないので水上船でも水面との交点に強い特異点があれば成立つし又 3 次元でも全く同じ誘導が可能であるので 3 次元問題でも一般的に成立つ。

またモーメントについても同様にして一般的に証明出来る。

附録 D 没水垂直平板とその極限

図 5 のように水面下に没している垂直平板の場合を考えて見よう。

ヤコビの楕円関数を使つて次式によつて w 平面に写像するとそこでは図 5 下図のような矩形領域となる¹⁾。

$$z = -isn(w, k), \quad k = s/b, \quad (1)$$

§ 2(5) のような関数 $X(z)$ で同節 (6), (7) のような境界条件を満たし無限遠点で正則なものを探して見ると先ず

$$X_1(z) = ik sn w - i \left\{ E(w) - \frac{K' - E'}{K'} w \right\}, \quad (2)$$

$$X_2(z) = iw, \quad (3)$$

を得、その境界値は平板上即ち $ABCB'A$ 上で

$$\mathcal{J}_m X_1 = -\left(\frac{\pi}{2K'} + \frac{y}{b} \right), \quad \mathcal{J}_m X_2 = K, \quad (4)$$

ここに X_2 は多価関数であるから今は AOD を cut と考えておこう。

次に A, C 点において積分可能な特異点を持つ事を許すとさらに 2 つの解があつて

$$X_0(z) = 1/dn(w, k), \quad (9)$$

$$X_3(z) = isn(w, k)/\{cn(w, k)dn(w, k)\}, \quad (10)$$

共に平板上では次の斉次の境界条件を満足する。

$$\mathcal{J}_m \{X_0\} = \mathcal{J}_m \{X_3\} = 0, \quad (11)$$

従つて解は A_j を実定数として一般に

$$f(z) = \sum_{j=0}^3 A_j f_j(z), \quad f_j(z) = ie^{-i\pi z} \int_{-\infty}^z X_j(t) e^{i\pi t} dt, \quad (12)$$

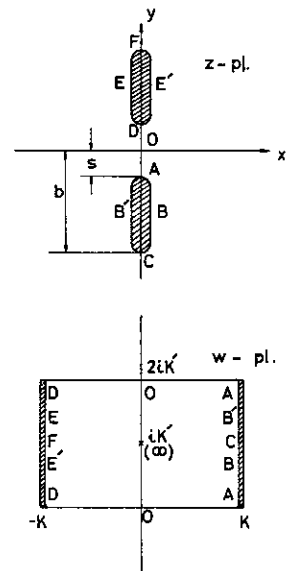


Fig. 5. Submerged plate

の形に与えられる。

この定数の内境界条件から A_1 は与えられるが他のものは全く任意である。

しかし明らかに f_2 は circulation を持つ解であるからどこかの点例えば A あるいは C における速度を指定する滑走板における流出条件に対応する条件によつて定数 A_2 は定められる。

これでも2つの任意定数が残るがこれは次の一価性の条件で完全に決まるので結局没水平板では循環を除いて解は一義的に決まると言える。

さて許容しうる解は少くともその複素速度が一価関数でなければ都合が悪いが §2(5) の式から df/dz が平板を水中で1回まわつても変わらないためには f の積分表示を使つて

$$\mathcal{F}_\pi \left[i\gamma \oint_c X(t) e^{i\gamma t} dt \right] = 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{R}_\pi \left[i\gamma \oint_c X(t) e^{i\gamma t} dt \right] = X(z_L) - X(z_U), \quad (14)$$

なる2つの条件が必要である。

ここに z_U は z_L なる点から平板を一度まわつて来た事を示すものとする。

この内特に (B) の条件は水面下の特異点に基づく波が消えるべきである事を示しているが確かに没水体のポテンシャルではそうなつていて (例えば §2(11)) 妥当な条件であると考えられる。

最後に隙間 s が0になつた極限について考えておこう。

まず楕円関数の公式¹⁾ から (1) の定義により

$$\left. \begin{aligned} cn w &= \sqrt{1+z^2/s^2}, & dn w &= \sqrt{1+z^2/b^2}, \\ dz/dw &= -i\sqrt{(s^2+z^2)(1+z^2/b^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

であるから (9), (10) から X_0, X_3 は上式によつて直ちに

$$X_0 \rightarrow -X_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{for } s \rightarrow 0, b \rightarrow 1, \quad (16)$$

となつて、半没の場合の X_0 に一致する。

次に X_2 は

$$X_2 = i \int_0^z \frac{dw}{dz} dz \rightarrow \int_0^z \frac{cz}{z\sqrt{1+z^2}} = \log \left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad (17)$$

となつて半没の場合の X_2 と定数を除いて一致する。

後に残つた X_1 についてもそれを次のように書けば (15) を使つて容易に極限移行出来て

$$\begin{aligned} X_1 &= -z - i \int_0^w dn^2 w dw + i \frac{K' - E'}{K'} \int_0^w \frac{dw}{dz} dz \\ &\rightarrow -z + \sqrt{1+z^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

半没時の X_1 に一致する事が確かめられる。

このようにして極限では基本解の数は一つ減つて3つになるが一方では領域は単連結となるので一価性の条件 (13), (14) は不要となるのでやはり任意性は一つ残りそれが本文で言う齊次解となる。また X_2 は没水時は循環流れであるが極限移行に伴つて板の上端における特異性が単純化されて水中では一価となり元の性格は失なれてしまう。

附録 E 滑走板としての半没垂直平板

実際に速い流れの中におかれた平板のまわりの流れは図6の z 面のようになる。流れが遅くなると後流の波は崩れて平らなだらだらとした水面となり更に遅くなると下端での水切れが悪くなり後側の水面が上がつて来る。今は簡単の為に図のような場合のみを考える事にしよう。

そうするとこの場合は滑走板で仰角が 90° になつた極限と考えても良い。

Rispi, Wu 等の方法⁶⁾⁷⁾ は今の場合にも何等不都合なくそのまま適用出来るが以下ではうんと簡単化して記す。

今簡単の為に飛沫の先端は無限上方に板に沿つてのびているとし一様速度を含む複素速度ポテンシャル F を

$$F(z) = z + f(z), \quad (1)$$

と定義した ω なる関数を次式で導入する。

$$\frac{dF}{dz} = e^{\omega(t)} \quad (2)$$

F 平面 t 平面は夫々図のようになるので

$$dF/dt = at / \{\pi(t-1)\}, \quad (3)$$

z 平面との関係は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{at}{\pi(t-1)} e^{-\omega(t)}, \quad (4)$$

充分遠方では ω は 0 に近づくと考えられるから (2) 式を展開して第1項のみとると

$$\omega \approx df/dz, \quad (5)$$

また (4) からは

$$dz/dt \approx a/\pi \quad (6)$$

これらの関係を使つて線型化された水面条件 §2(3) をもう一度 x で微分したものを考えると

$$\mathcal{R}_e \left\{ \frac{d\omega}{dt} + i\bar{r}\pi \right\} = 0, \quad \bar{r} = \frac{\pi}{a}r, \quad \text{for } \mathcal{I}(t) = 0, \quad (7)$$

となり z 一面の条件と同形となる。

平板上の条件は勿論 t 面の実軸上で

$$\mathcal{I}_\pi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for } 1 > \mathcal{R}_e(t) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } 0 > \mathcal{R}_e(t) > -1 \end{cases} \quad (8)$$

となるから線型理論による滑走板(フラップ付)の問題に還元されてしまい後端において流出条件を満足する解は一義的に定まる。

特に r が充分小さい時は自由流線の問題の解

$$\omega_0\{t(u)\} = \frac{2\pi}{i(u-1)} + \log\left(\frac{u-i}{u+i}\right), \quad t = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right), \quad (9)$$

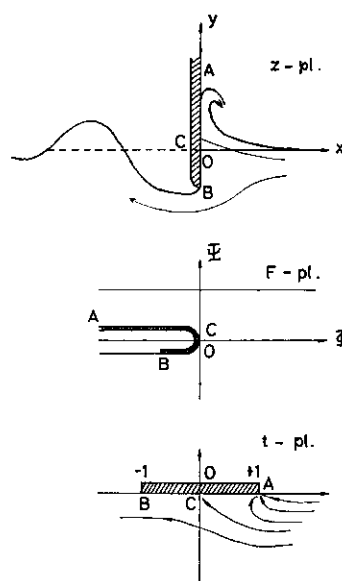


Fig. 6. Physical plane and mapping

を利用出来てこれは (8) を満足するから

$$\omega(t) = e^{-i\bar{r}t} \int_{-\infty}^t \frac{d\omega_0}{dt} e^{i\bar{r}t} dt, \quad (10)$$

とおけば ω は近似的に平板上で (8) を水面上で (7) を満足する。

即ち板の近くで $\bar{r} \log \bar{r}$ 以上の項を省略すれば (10) より

$$\omega(t) \approx \omega_0(t), \quad (11)$$

従つて板の下端から岐点迄の長さ l は

$$il = z_c - z_B \approx \frac{a}{\pi} \int_{-1}^0 e^{-\pi(t)} \frac{t}{t-1} dt, \quad (12)$$

となるので板の近くでは流れは自由流線の場合と同じになる。

しかし無限遠方上流側では (10) によつて

$$\omega(t) \rightarrow \frac{1}{i\bar{r}} \frac{d\omega_0}{dt} + \dots, \quad (13)$$

となり例えば無限上流水面位置は重力のない場合は無限に下方に下がるが今の場合は有限で次式で計算される、あるいは次式の積分は存在する。

$$\mathcal{J}_m(z_\infty - z_B) = \mathcal{J}_m \frac{a}{\pi} \int_{-1}^{\infty} e^{-\pi(t)} \frac{t dt}{t-1}, \quad (14)$$

そこで板の下端の位置が与えられると (14) から a が決まり、その a によつて (12) から l が決まりまた $\bar{r} = \pi r/a$ が決まり物理面における寸法が定まる。逆に l を決めると板の下端位置は決まってしまう。

しかし流出条件を満たさないでもよいならば (9) において

$$\omega_s(t) = \alpha / i(u^2 - 1), \quad \alpha \text{ 任意}, \quad (15)$$

なる関数を加えてもよいから解はこれだけ不定になる。

仰角が小さい場合で考えるとその時は ω が板の近くでも (5) の近似が成立つとして線型化されるので (15) の解だけ元の解に線型的に足しても引いてもよい事になり線型理論における解の不定さに全く一致する³⁾。

最後にここで考えた図6のような流れを本文で使った線型理論で近似出来ないかと言う問題が残るが上述のように今の場合は滑走板と異なつてかなり非線型性が強いので大変難かしいように見える。

なおここで論じた解と本文で論じた解の板の近くでの性質は全く異なっているがそれは板のまわりの流れの模様のとり方が違うので当然であらう。