

昭和51年2月

国際造波セミナー

“造波抵抗の線型理論における
線積分と斉次解と波の散乱”

別所正利

防衛大学校

内容

1. 序論
2. 線積分の誘導とその特性
3. 解の一意性と斉次解
4. 波の散乱
5. 結論

参考文献

附録 A 逆流れと相反定理

附録 B 変分原理

附録 C 連続の定理

附録 D アルキメデスの原理の拡張

附録 E 抵抗積分の積分可能性

附録 F 解析接続

1. 序論

造波抵抗理論において線積分および斉次解の問題が提起されて以来既に20年に近い年月を経たがその間における船型設計への革新的応用の陰にかくれて今なおと言うよりはむしろ最近になって新しく注目を集め始めている。

この期間には又一方船の波浪中動揺理論も大変成功をおさめて来た。

本論文はこのような背景の上にまず線積分の問題について概観を試みようとするものである。

しかしこの問題を検討して行くと解の不定性という問題を扱わざるを得なくなる。そしてこの困難をさける為には境界値問題の定式化についてもう一度検討し直す必要が生じるがこのような過程において斉次解を導入しなければならない。

このようにして解の一意性に関する疑問がさけられれば次の問題は境界値問題を数値的により正しく解く試みがなされてよいが、この時生じるのが波の散乱である。そこで最後の節ではそれを扱う事にしよう。

最後に本論文では水面条件のみ線型化し他は出来得る限り線型化しないで取り扱う事とする。と言うのは船体表面条件も線型化し且つ速度ポテンシャルにおいても高次の項を省略すると薄い船の理論以上に出られず現在の困難については何も答えられないからである。

例えば滑走板の理論すらも Ogilvie 等が言うように非線型問題となる「26, 30, 38」。この場合の非線型性は板の位置が決まらないうとあらかじめ浸水長が決まらないう意味であろうから前の意味とは少し異っているし、又別の方法によれば線型的重ね合せによって解く事が出来る。

しかしこの問題は自由表面のある流れの問題に関する大変重要な点を暗示している。つまり無限流体中の翼理論では翼の上下位置は揚力等に何等影響を及ぼさないが滑走板ではそれによって浸水長が変化し流れ場は大変異なってくる。

本文にも見る通り、かな上下位置の変化による物体境界条件の変化は高次の項の除くと0になるので無限流体中では確かにそれによる流れの変化はないとして良いが、我々の場合は現実的に具合が悪くこれに対応する解（斉次解）を導入する必要が生じる。この事情は物体によって水面が変化する事から派生して来るのであるから没水体についても同じ事情があつてよい。

実際その場合は水面の非線型性の大きい影響として有名なものであるが、その影響は所謂局部波から生じるものが大きくなっている「15, 29, 34」。

そう言う訳で水面の変化は、我々の問題に固有の問題であるので無視出来ない故、線型化理論としての一貫性を少々犠牲にしても考えに入れたいのである。

2. 線積分の誘導とその特性

今ある船が静水に浮んでいるとする。その時の浸水表面を S 、水表面を F としよう。この船を沈下もトリムも拘束して前進させ、ある一定の速度 U に達したとしよう。（ U を 1 とおく）この時、浸水表面は S^* 、水表面は F^* になったとしよう。又この時の水の運動の速度ポテンシャルを $\phi(P)$ ($P \equiv (x, y, z)$) としよう。

なお左右対称な船を考え船に固定した座標系を図1のように採るものとする。

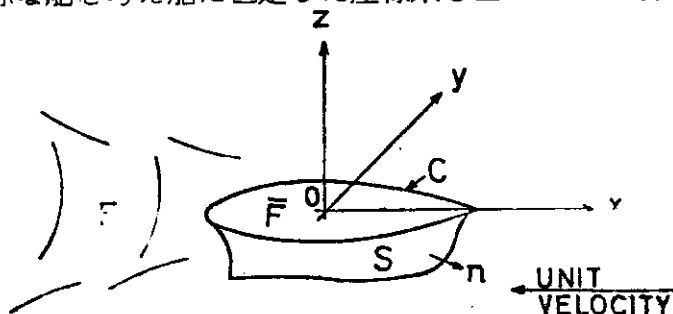


FIG1. CO-ORDINATE SYSTEM

今基本的特異性として次の関数を導入する。

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi r(P, Q)} + A(P, Q) \quad , \quad (1)$$

ここに $P \equiv (x, y, z)$, $Q \equiv (x', y', z')$ $r = \overline{PQ}$ とし $A(P, Q)$ は水の中で正則な調和関数とする。そうすると ϕ および A の無限遠方での性質を適当に仮定するとよく使われるようにグリーンの定理によって

$$\phi(P) = \iint_{S^* + F} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) \right\} dS(Q) \quad , \quad (2)$$

なる表現がえられる。

線型理論では F^* 上の値を F 上のそれで近似し水面条件は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(x, y, 0) = 0 \quad \text{on } F \quad , \quad (3)$$

となり又水面上昇 $\zeta(x, y)$ は

$$\zeta(x, y) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, 0) \quad . \quad (4)$$

で与えられる。

ここで基本的特異性 $S(P, Q)$ も (3) の水面条件を満たすものとするときよく知られているように次のように与えられる。

$$A(P, Q) = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{\mu \rightarrow +0} \iint_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(k \cos^2 \theta + g) e^{k(z+z') + ik(\bar{w}-\bar{w}')}}{k \cos^2 \theta - g + \mu i \cos \theta} dk d\theta \quad , \quad (5)$$

ここに $\bar{w} = x \cos \theta + y \sin \theta$, $\bar{w}' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$.

そうすると (2) の F^* 上の積分は部分積分によって

$$\begin{aligned} \iint_{F^*} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} S - S \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS &= - \iint_F \left[\phi \frac{\partial}{\partial z} S - S \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{g} \int_C \left[\phi \frac{\partial}{\partial x} S - \frac{\partial \phi}{\partial x} S \right] dy \quad , \quad (6) \end{aligned}$$

となる。ただし C は F と S の交線とする [3, 4, 36, 39]。

これが所謂線積分であってこれについて以下考察を進めよう。

その前に S^* が水面になった時即ち所謂平たい船の場合を考えて見よう。

この場合は船体表面条件を線型化すると首尾一貫した線型理論が構成され又実験との一致もよいと言われている [19]。

この時は圧力を

$$\frac{1}{\rho}p(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,0) - g\zeta(x,y) \quad , \quad (7)$$

(ρ は水の密度)

のように導入し、0の内外で ζ が連続とすると部分積分によって

$$\phi(P) = \frac{1}{\rho g} \iint_S p(x',y') \frac{\partial}{\partial x} S(P;x',y',0) dx'dy' \quad , \quad (8)$$

となって線積分の項は消えるので問題はない。

さて先ず (6) の右辺第2項は吹出し分布によるポテンシャルであるがその総和は (3) , (4) によって

$$-\frac{1}{g} \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dy = \int_C \zeta(x,y) dy = - \iint_C \frac{\partial}{\partial z} \phi dx dy \quad , \quad (9)$$

となる故単位時間にFから外に出て行く水量である。

しかし明らかにこれは物理的に0となるべきであるが (9) そのものは0にはならない「3,5」。

一方 S^* からの吹出し量は

$$- \iint_{S^*} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \iint_{S^*} \frac{\partial x}{\partial n} dS \quad , \quad (10)$$

ただし船体表面条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{on } S^* \quad , \quad (11)$$

とする。

この積分範囲を S とすると0となるが (10) 式は一般に0にならない。

S^* と S の差は船体が水線附近で垂直な側面ならば

$$\frac{\partial x}{\partial n} dS \approx \zeta(x,y) dy \quad , \quad (12)$$

であるから丁度 (9) の吹出しと同じになり互に打消しあって全体として水面からの水の流入流出はなくなり合理的な結果を得る「3,36,附録C」。

それ故 (2) は結局次のように書ける。

$$\phi(P) = \phi_S(P) + \phi_L(P) \quad , \quad (13)$$

$$\phi_S(P) = \iint_S [\phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P,Q) - S(P,Q) \frac{\partial}{\partial n} \phi] dS(Q) \quad , \quad (14)$$

$$\phi_L(P) = \frac{1}{g} \int_C \phi(Q) \frac{\partial}{\partial x} S(P;x',y',0) dy' \quad , \quad (15)$$

$\phi_S(P)$ が従来使われて来た型式であり ϕ_L が考えるべき問題の線積分である「3」。

先ず最初に高速の場合について考えて見よう。
その時は

$$\phi(P) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} o(g) \quad , \quad (16)$$

である。

又一方薄い船では

$$\phi_S(P) = O(B/L) \quad , \quad (17)$$

ここにBは船幅、Lは船長とする。
それ故

$$\phi_L(P) \xrightarrow{g \rightarrow \infty} o(g) O(B/L) \quad , \quad (18)$$

となって ϕ_L は ϕ_S に較べて小さいので無視出来ると考えられ、実験的にも首肯し得る結論である。

しかし低速もしくは実用的な速度範囲ではこの項は無視出来ないのこれを考慮に入れると造波抵抗曲線の性質は全く変って来る。

この事は高次の項を導入した理論によっても裏付けられ又逆に波形解析によってえられた振幅関数と ϕ_S (船体表面分布) によるそれとがあまりよく一致しない事からもその必要性が感ぜられる「2, 3, 32」。

このように線積分が低速の造波抵抗に及ぼす影響が大変大きい事は ϕ_S を2重吹出して表現して ϕ_L のそれと比較して見ると薄い船では図2のようになるのでつまり船首尾部でふくれ中央部で幅が狭くなる効果があるので低速ではミッchel公式によるより低い抵抗を与える事がよく判る。

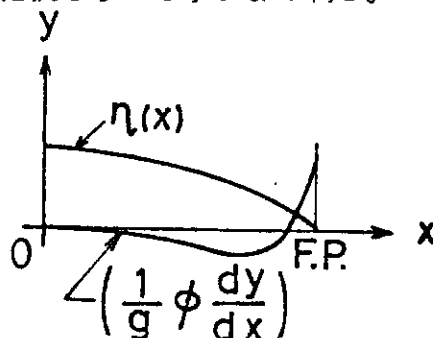


FIG 2. CONTRIBUTION OF LINE INTEGRAL

この時 ϕ_L による造波抵抗はx軸上の2重吹出し分布として計算しようとする
と $\frac{1}{g} \phi \frac{dy}{dx}$ は一般に船首尾で0でないので無限大となる「附録E」。

それを避ける為には0上の特異点分布として計算をすればよいが実際に振幅関数を計算して見ると船首附近の形状により大変性質が異なるように見える。

これらの事から実際には ϕ_L があまり大きい影響を持たない船型がある事が予想されて「造波抵抗の小さい船型は理論値との一致がよい」と言う経験を裏書きしている「28」。

最後に ϕ_L の2重吹出しの総和について考えておこう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \int_C \phi(x, y, 0) dy &= -\frac{2}{g} \int_C \eta(x) \frac{\partial \phi(x, \eta, 0)}{\partial x} dx \\ &= 2 \int_C \zeta(x, \eta) \eta(x) dx, \end{aligned} \quad (19)$$

となって排水容積の見掛の増分である。
従って静的浮力はこの ρg 倍だけ増える。
上式は又

$$\frac{1}{g} \int_C \phi(x, y, 0) dy = \iint_F \zeta(x, y) dx dy, \quad (20)$$

と書く事も出来、この時 ζ を線型化しないものとする と附録Dに示すようにこの ρg 倍は真の浮力変化を表わしている。

線型理論では (19) による浮力に Lagally 公式による浮力を加えると良い「5」。
もし船の沈下が自由になっていればこのようにしてえられる浮力変化は0でなければならない。

換言すれば船に系外から上下方向の力がかかっているかどうかで ϕ_L は変化する事になる。

このようにして線積分は低速で造波抵抗に大きい影響があると共に一方では浮力の平衡度によって変化する要素を含んでいる。

実際2次元半没垂直平板の結果によれば造波抵抗は系外から受ける上下力が指定されなければ決まらない「11」。

3. 解の一義性と斉次解

このように線積分は大変重要な役割を演じていると考えられるがそれを考して境界値問題を解く為には前節の表現では少し不便である。

この節では水上船を完全に没水した船の極限として取扱い、滑走板の理論を参照して速度ポテンシャルの別の表現を求めよう。

さてそのような没水船は勿論一意的に定まる訳ではなく種々の形が考えられるがここでは簡単の為に図3のようにその水線面 F が固体壁であると考えておこう「6」。

最終的には F は水の上に出て水上船となり、流れの様子には直接関係しないのであるからこの仮定によって一般性を損う事はない。

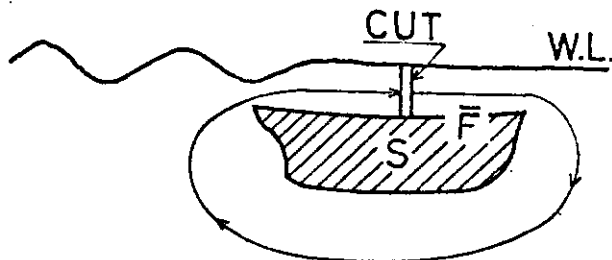


FIG 3. CONNECTIVITY OF THE DOMAIN.

さらに問題を簡単にする為に先ず2次元問題を考えてみよう。

そうすると水の領域は2重連結であるからサーキュレーションを除いて流れ場は一義的に定まる。

つまり速度ポテンシャルは一価関数であり今図のようにカットを作った場合その前後で連続である。

しかしながら $\bar{F}$ が水面に近づいて遂にそのように水がなくなった極限を考えると速度ポテンシャルがカットの上で連続かどうかはもはやわからない故一般的にはあるジャンプを持つと考えておくべきであろう「11」。

実際滑走板の理論ではサーキュレーションを考えに入れるのは当然の事である。

しかしその場合は後端におけるクッタの流出条件があってサーキュレーションが一義的に定まるが今の場合はそのような条件は考えられないので不定である。

一方滑走板では流出条件を満足する解は浸水長が不定であり、水面上昇と沈下量を調節して物理的に首肯しうる解が定められる「13,26,30」。

今の場合長さが変わらないとすると結局 $\bar{F}$ の上の水面上昇量が合理的になるようにするとその不定さが除かれるだろう。

さて以上の考察から3次元では図のように $\bar{F}$ の同じ水平面内に無限後方まで続く平面 W を考えその上下で速度ポテンシャルが $\Delta\phi$ だけジャンプすると考えればよい。

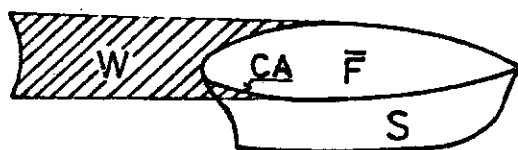


FIG 4. WAKE VORTEX SURFACE

そうすると §1 (2) と同じように

$$\begin{aligned} \phi(P) = & \iint_{S+\bar{F}} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - S \frac{\partial}{\partial n} \phi \right\} dS \\ & + \iint_W \Delta\phi(Q) \frac{\partial}{\partial z} S(P, Q) dx dy' , \end{aligned} \quad (21)$$

但し

$$\Delta\phi = \phi|_{W+} - \phi|_{W-} , \quad (22)$$

勿論 W の上下で ϕ の法線速度は連続とするが、更に x -方向の速度も連続と考えられる故

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Delta\phi(P)) = 0 , \text{ on } W , \quad (23)$$

である。

この船を無限に水面に近づけて行こう。

そうすると $\bar{F}$ の上には非常に薄い水の膜が出来、そこでは流速の z 方向の変化はなくなるだろう。

そして境界条件 (2) と (11) により

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \text{ on } F \text{ and } \bar{F}, \quad (25)$$

それ故

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \zeta(x, y) = \text{func. } (y) \text{ on } F \quad (26)$$

となる「10」。

又 (1) 右辺第2項は水面条件により部分積分すると (3) によって W 上の積分は消え

$$\int_W \Delta \phi \frac{\partial}{\partial z} S dx dy = -\frac{1}{g} \int_{CA} \Delta \phi \frac{\partial}{\partial x} S(P; x', y', 0) dy', \quad (24)$$

ここに C, A は W と $\bar{F}$ の境界線である。

このままではまだ前節の表現 (13) とあまり変わらないのでここでその境界値問題を前述の滑走板の場合を思い出しながら考えよう。

先ずサーキュレーションがなければ没水船の速度ポテンシャルは一義的に定まる「22」故

$$\phi_s(P) = \iint_{S+\bar{F}} \left\{ \phi_s \frac{\partial}{\partial n} S - S \frac{\partial}{\partial n} \phi_s \right\} dS, \quad (27)$$

は $\bar{F}$ が水面に限りなく近づいても

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n}(P) = -\frac{\partial \zeta}{\partial n} \text{ on } S \text{ and } \bar{F},$$

なる境界値問題の解は一義的に定まるだろう。

その解から表面変位 ζ_s を計算すると (5) によって

$$\zeta_s(x, y) \equiv \zeta_s(y) \text{ on } \bar{F},$$

となってこれは恒等的に0とはならないだろう。

それ故もう一つ速度ポテンシャル ϕ_h を考えてそれによる $\bar{F}$ 上の水面変位 ζ_h が

$$\zeta_h(x, y) \equiv \zeta_h(y) = -\zeta_s(y), \quad (28)$$

となるようにする事が出来れば $(\phi_s + \phi_h)$ による $\bar{F}$ 上の水面変位は0となるからもはやそこには水の層はなくなり水上船と等価になる。

そのような ϕ_h は勿論 (1) の形であり ϕ_s は (8) を満たすとしたから $S+\bar{F}$ 上では齊次境界条件

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial n}(P) = 0 \text{ on } S \text{ and } \bar{F}, \quad (29)$$

を満たさねばならない。

これを齊次解と呼んでおこう。

このような解の存在は上述のように2次元問題および3次元滑走板および翼理論から明らかであり、又既にそれを近似的に解いて良い結果を得た例もある「24」。

最初にのべたように (1) の形は不便であるので実際の計算にはS上の特異点を図5のようにスケルトン面S「附録F」まで掃き込むとF上の特異点は圧力分布で表現出来るから (8) を参照して

$$\phi_h(P) = \iint_S \sigma_h(Q) S(P, Q) dS(Q) + \frac{1}{\rho g} \iint_F P(Q) \frac{\partial}{\partial x} S(P; x', y', 0) dx'dy', \quad (33)$$

とする事が出来よう。

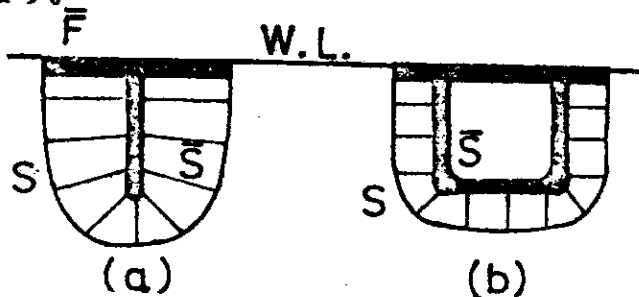


FIG 5. SKELETON SURFACE

図の左側は所謂ヨット型の船であるがここではその提唱者を記念してストーカー船と呼ぼう「31」。

さて薄い船では速度ポテンシャルは (33) 右辺第1項の形で与えられるがそうすると一般にFの所には有限な0でない水面変化がある。

(33) 右辺第2項はその水面変位を0になるようにおさえつける役割をしている。そうするとこれには正に字義通り Sheltering 又は Shielding 効果をもたらす項である「20, 21」。

最後に条件 (28) によればFの水面変位は0であるから (19) によって見掛の排水量変化は0となるがそこでのべたように一般的にはそのように決めてしまうのはよくない。

それ故さらにもう一つの速度ポテンシャル ϕ_{ho} を導入し齊次境界条件 (29) を満たすものとし、F上でその水面変位が

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \phi_{ho} = \zeta_{ho}(x, y) = 1 \text{ on } F, \quad (31)$$

となるものとする。

そうすると α を任意定数として求むる速度ポテンシャルは一般に

$$\phi(P) = \phi_v(P) + \phi_h(P) + \alpha \phi_{ho}(P), \quad (30)$$

と書く事が出来、定数 α は垂直力の平衡から定められる。

この垂直力を平衡させる為には船は僅かな平行沈下をする必要がある。

所が船体が僅かに元の位置から垂直方向に平行移動しても表面上の法線の方

向余弦は変わらないから高次の項を除けばその変化分の境界条件は (29) で与えられる。

それ故 ϕ_{ho} は正に垂直力の平衡を保つための平行沈下に対応する速度ポテンシャルである。

なおトリム の場合はそれが僅かであるとしても容易にわかるように法線方向が変り

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \tau \frac{\partial z}{\partial n}$$

となるので無視する事が出来ず、結局船型が変化する事になる。

そう言う訳で最終的に水上船の場合全没船の極限としてその水線面 $\bar{F}$ における水面変位を指定すれば速度ポテンシャルは一義的に定まる事になる。

この際後流渦面 $\bar{W}$ は水面 $\bar{F}$ に含まれてしまうのでこれについて特に考える必要はない。

この結論は力論滑走板のそれと一致しているがその場合は Kutta の流出条件があるので浸水面の不定さとして表われる「13, 30」。

4. 波の散乱

従来造波抵抗理論における波の散乱問題は高次の微小量であるとして無視されて来た。

しかしながら最近の波形解析の結果からも明らかなように、普通速度において特に発散波系においては大変大きい寄与をなしている事がわかり、理論的予想を裏づけている「1, 32, 33」。

一方動揺問題では散乱問題は大変重要な役割を果しており、散乱ポテンシャルからは波の強制力が求められると同時にハスキント花岡の関係によって造波減衰が求められる「6, 14」。

この関係を今の場合に適用するならば散乱ポテンシャルを求めるだけで振幅関数が求められ、従って造波抵抗が計算出来るはずである。

この節では先ず散乱ポテンシャルを導入してこの関係を求め又更に船が自分で作った波を自分で散乱している様子を表現している式を求めて見よう。

その為に一様流れの方向が逆になった所謂逆流ポテンシャルを考えておく必要があるので附録Aのように定義しておこう。

さて入射波としては θ 方向に進む要素平面波 (A. 7) を考えて散乱ポテンシャル ϕ_d を次のように定義しよう。

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d(P; \theta) = - \frac{\partial}{\partial n} \phi_o(P, \theta) \text{ on } S \text{ and } F, \quad (35)$$

$$\zeta_d(x, y; \theta) = - \zeta_o(x, y; \theta) \text{ on } F, \quad (36)$$

そうすると前節の理論により ϕ_d は一義的に決まる。

その逆流ポテンシャルは附録Aの定義より

$$\widetilde{\phi_o}(P; \theta) = - \overline{\phi_o(P, \theta)}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \widetilde{\phi_d}(P, \theta) = - \frac{\partial}{\partial n} \phi_d(P, \theta) = - \frac{\partial}{\partial n} \widetilde{\phi_o}(P, \theta), \quad (38)$$

$$\zeta_d(x, y; \theta) = - \zeta_o(x, y; \theta) = - \frac{1}{g} \frac{\partial \widetilde{\phi_o}}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_o}{\partial x}, \quad (39)$$

とすればよい。

そうすると相反定理 (A. 11) により振幅関数 (A. 10) は

$$\begin{aligned} -\iint_{S+\bar{F}+W} \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 dS &= \iint_{S+\bar{F}+W} \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi dS \\ &= -\iint_{S+\bar{F}+W} \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_d dS = -\iint_{S+\bar{F}+W} \phi_d \frac{\partial}{\partial n} \phi dS, \quad (42) \end{aligned}$$

となる故

$$H(\theta) = -\iint_{S+\bar{F}+W} \widetilde{\phi}_d(P; \theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi(P) dS(P), \quad (40)$$

ここに

$$\phi_d(P; \theta) = \phi_0(P; \theta) + \phi_s(P; \theta), \quad (41)$$

となる。

今前節と同じ観点にたつて ϕ の船体表面条件 (11) と $\widetilde{W}$ が水面に一致した時の境界条件 (3) を入れると (40) は次のように書ける。

$$H(\theta) = \iint_S \widetilde{\phi}_d(P; \theta) \frac{\partial x}{\partial n} dS - \int_{CF} \Delta \widetilde{\phi}_d(P; \theta) \zeta(x, y) dy, \quad (43)$$

この右边第2項において $\widetilde{\phi}_d$ の内 ϕ_0 は明らかに一価である故 $\widetilde{\phi}_d$ を ϕ_d と入れかえる事が出来る。

それ故前節のように速度ポテンシャルを (30) のように分解し (11), (12) の境界条件を考慮すれば

$$H_s(\theta) = \iint_S \widetilde{\phi}_d(P; \theta) \frac{\partial x}{\partial n} dS, \quad (45)$$

$$H_{ho}(\theta) = -\int_{CF} \Delta \widetilde{\phi}_d(P; \theta) dy, \quad (46)$$

$$H(\theta) = H_s(\theta) + \alpha H_{ho}(\theta), \quad (44)$$

ここは H_s は $(\phi_0 + \phi_s)$ の、 H_{ho} は ϕ_{ho} の振幅関数とする。

これらの式から散乱ポテンシャルがわかれば振幅関数が求められる。

例えば入射波に対して散乱波を無視する事が出来るとすれば (45) は

$$H(\theta) = -\iint_S \phi_0(P; \theta) \frac{\partial x}{\partial n} dS, \quad (47)$$

となる故極限において薄い船、細長い船等の場合の振幅関数に一致する。

又この式は動揺問題における波の強制力を与える式においてはフルード・クリロフカとして知られているものである。

このように考えて来ると次の近似としてストリップ法における渡辺の近似法を適用する方法が考えられる「12」。

しかし動揺問題の場合 (正確には前進速度のない場合、と言うのは前進速度があ

ると今の場合と同様線積分の項が出て来る「25」と異なるのは散乱ポテンシャルの中には (30) の ϕ_h に対応する齊次解を含む事である。

例えば薄い船では S の投影面、 S 上の吹出し分布は「17」

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_0 = (ig \sec \theta \frac{\partial}{\partial x} - g \sec^2 \theta \frac{\partial}{\partial z}) \phi_0(x, 0, z; \theta), \quad (52)$$

によって決まり又 $\bar{F}$ 上の圧力分布は

$$- \rho g \zeta_0(x, y; \theta) = \rho i g \sec \theta \phi_0(x, y, 0; \theta), \quad (53)$$

となる。
又

$$\begin{aligned} \int \Delta \phi_d(x, y, 0; \theta) dy &= \iint_{\bar{F}} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi_d(P, \theta) dy dx \\ &= - \iint_{\bar{F}} \frac{\partial}{\partial x} \phi_0 dx dy, \end{aligned} \quad (54)$$

となるがこれらを代入して振幅関数を作ってみると (53) と (54) から出て来る項が §1 の線積分から出て来る項になる事がわかる。

このような誘導から考えると線積分を考える時は同時に水線面 $\bar{F}$ 上の条件も正しく考えに入れなければならない事、そして又その逆も言える事が容易にわかる。

又一方波長の短い所に幾何光学的近似を考えるに当っても散乱ポテンシャルを使えば光学における理論が略そのまま使えて便利であろう「35」。

なおその際、核 $S(P, Q)$ は非対称故

$$S(P, Q) = \frac{1}{2} [S(P, Q) + \tilde{S}(P, Q)] + \frac{1}{2} [S - \tilde{S}], \quad (55)$$

と別けると右辺第1項は対称核、第2項は非対称核でかつ波そのものとなるのでより一層便利である。

(55) の分解は勿論速度ポテンシャルについても成立ちこの場合は次のようになる。

(A. 9) により $\tilde{\phi}$ は $x \rightarrow +\infty$ でケルビン波を有するが今 ϕ は有しない故

$$\phi(P) + \tilde{\phi}(P) - \frac{ig}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_d(P, \theta) \tilde{H}(\theta) - \overline{\phi_d}(P, \theta) \tilde{H}(\theta)] x \sec^2 \theta d\theta, \quad (48)$$

なる関数を考えれば $x \rightarrow +\infty$ ではもはやケルビン波形は消え $x \rightarrow -\infty$ にのみ波を有する。

一方 S と $\bar{F}$ 上の境界条件は 0 で且つ $\bar{F}$ の水面変位も定義によって 0 である故 §2 の解の一義性から上式は恒等的に 0 となる。それ故

$$\phi(P) + \tilde{\phi}(P) = \frac{ig}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_d(P, \theta) \tilde{H}(\theta) - \overline{\phi_d}(P, \theta) \tilde{H}(\theta)] x \sec^2 \theta d\theta, \quad (48)$$

(本当の没水体で水面下に $\tilde{\phi}$ があるとそれに対応する項を考えねばならないが今は水上船とする)「12」。

この式から逆流ポテンシャルは ϕ と ϕ_d がわかれば求まる事がわかる。

あるいは又、例えば船が前後対称ならば逆流ポテンシャルも勿論対称性を

もつ故それは既知となる故 (48) の右辺は直ちに求まる。

(48) は大変基本的な関係であるからこれは又特異点分布についても成立つ事は明らかであろう。

つまり船が前後対称ならば速度場の対称性は専ら散乱に基づくものである。

それ故例えば振幅関数もその場合薄い船等では純虚数値をとるがこの (16) 式によってその実数値部分を見積る事が出来る。

即ち (16) から振幅関数の積分をすれば

$$H(\theta) + \widetilde{H}(\theta) = \frac{ig}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [H_d(\theta, \theta') \widetilde{H}(\theta) - \overline{H}_d(\theta, \theta) \widetilde{H}(\theta)] \\ \times \sec^2 \theta d\theta, \quad (49)$$

ここに

$$H_d(\theta, \theta') = H_d(\theta', \theta) = - \iint_{S+\bar{F}+W} \phi_d(P; \theta') \frac{\partial}{\partial n} \phi_o(P; \theta) dS. \quad (50)$$

となる故B (20) よりHの実数部分が求まる「6, 12」。

ϕ_d を省略すれば (50) は近似的に

$$H_d(\theta, \theta') \doteq - \iint_{S+\bar{F}} \phi_o(P; \theta') \frac{\partial}{\partial n} \phi_o(P, \theta) dS, \quad (51)$$

と書けるのでこの式で実際にそれを見積る事が出来る。

従来このような計算を実行した例はないし、又波長の小さい所での散乱ポテンシャルの計算は大変困難であると予想されるのでこれらの式の効用の程はよくわからない。

しかし (48) の示す所は ϕ そのものを計算する時も確かに一部 ϕ_d を計算しなければならぬのであるから、もし造波抵抗だけ求めるのが目的ならばむしろ散乱ポテンシャルのみ計算する方がかえって簡単であると言えよう。

5. 結論

以上を要約すれば

1. 速度ポテンシャルの所謂線積分項について

- 吹出し項は船体の浸水表面の変化による項と打消し合う。
- 2重吹出し項の総和は船の見掛の排水量変化に等しく船に働く垂直力の静的浮力分である。
- 線積分は高速では従来考えられた通りあまり重要ではないが低速特に発散波系に重要な影響がある。

2. 斉次解の存在について

- 水上船に関する我々の境界値問題の解は一意的に定まらない。
それを一意的にする為にここでは船の水線面が固体壁であるような全没船を考えその極限として水上船を考える事としたがそうすると
- 水線面の上の水面変位は予め決まらない。
- それを与えられた値にする為には斉次解を導入しなければならない。
- その斉次解はサーキュレーションを持つ
- 又それは近似的に船の平行沈下に対応すると見なせる。
- 又それによって船に働く垂直力が指定出来る。

3. 波の散乱について

要素平面波に対して散乱波ポテンシャルを導入すると

- a) 振幅関数は散乱ポテンシャルによって表現出来る。
- b) 速度ポテンシャルの一部分は確かに自分の作った波を反射散乱させる部分でそれはポテンシャルの対称性を破っている。
- c) これらの関係を用い散乱ポテンシャルに適当な近似値を代入すると種々の新しい表現を得る事が出来るだろう。

Reference

- 1) Adachi.H; "On the Interference Between Bow-Generated Waves and Long Slender-Ship at Low Froude-Number". J.Soc. Nav. Arch. Japan, Vol.135, 1974.
- 2) Baba.E; "A Study on Free-Surface Flow Around Bow of Slowly Moving Full Forms". J.S.N.A. of Japan, Vol. 137, 1975.
- 3) Brard.R; "The Representation of a Given Ship Form by Singularity Distributions When the Boundary Condition on the Free Surface is Linearized". J.S.R., March 1972.
- 4) Bessho.M; "On the Theory of the Wave Resistance". (2nd Report), J.S.N.A. of Japan, Vol.106, 1960. (Japanese)
- 5) Bessho.M; "On the Formula of Wave-Making Force Acting on a Ship". J.S.N.A. of Japan, Vol.110, 1961. (Japanese)
- 6) Bessho.M; "On the Boundary Value Problem in the Theory of Wave-Making Resistance". Mem. of Defense Academy, Japan, Vol.6, 1967.
- 7) Bessho.M; "A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing". M.D.A., Vol.10, 1970.
- 8) Bessho.M; "A Contribution to the Theory of Free Surface Flow". M.D.A., Vol.10, 1970.
- 9) Bessho.M and Mizuno.T; "On the Wave-Making Resistance of a Semi-Submerged Circular Cylinder and Vertical Plate". Japanese Rep. of Defense Academy, Vol.1, 1963. (Japanese)
- 10) Bessho.M; "Variational Approach to Steady Ship Wave Problem". 8th Symp. on Nav. Hydrodyn., Pasadena, 1970.
- 11) Bessho.M; "On the Wave-Making Resistance of a Vertical Plate Partly Immersed in Water". (Japanese) To be read at Autumn Meeting of Seibu Zosen Kai. 1975.
- 12) Bessho.M; "On Time-Reversed Velocity Potentials in the Theory of Water Wave". (Japanese) To be read at Autumn Meeting of Kansai Zosen Kyokai, 1975.
- 13) Bessho.M; "On the Theory of Three-Dimensional Hydro-Planing". Presented at J.T.T.C. April 1975. (Japanese)

- 14) Bessho.M; "On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water". M.D.A. Vol.8, 1968.
- 15) Chey.Y.H; "The Consistent Second-Order Wave-Theory and Its Application to a Submerged Spheroid". J.S.R. Vol.14, 1970.
- 16) Eggers.K.W.H; "Second Order Contribution to Ship Wave Resistance". 6th Symp. Nav. Hydrody., Washington, D.C., 1966.
- 17) Havelock.T.H; "The Pressure of Water Waves Upon a Fixed Obstacle". Proc. Roy. Soc. A. Vol.175, 1940.
- 18) Hanaoka.T; "On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory". 9th Japan Nation. Congress for Appl. Mech., 1959.
- 19) Hogben.N; "An Investigation of Hovercraft Wave-Making". J.Roy. Aeron. Soc, Vol.70, No.662, 1966.
- 20) Inui.T; "Study on Wave-Making Resistance of Ship". S.N.A. of Japan 60th Anniversary Series. Vol.2, 1957.
- 21) Inui.T., Kajitani.H., Fukutani.N. and Yamaguchi.M; "On Wave-Making Mechanism of Ship Hull Forms, Generated from Undulatory Source Distributions". J.S.N.A. Japan Vol.124, 1968. (Japanese)
- 22) Kostyukov.A.A; "Theory of Ship Wave and Wave Resistance". Leningrad, 1959. (Transl. Univ. of Iowa)
- 23) Maruo.H; "A Note on the Higher-Order Theory of Thin Ship". Bull. Fac. Eng. Yokohama Nat. Univ. Vol.15, 1966.
- 24) Mori.K; "On the Singularity Distribution Representing Surface Ships". Mem. Facul. Eng. Hiroshima Univ., Vol.5, 1974.
- 25) Newman.J.N; "A Linearized Theory for the Motion of a Thin Ship in Regular Waves". J.Ship Res. Vol.5, 1961.
- 26) Ogilvie.T.F; "Singular Perturbation Problems in Ship Hydrodynamics" 8th Symp. on Naval Hydrodynamics, 1970.
- 27) Pien.P.C and Moore.W.L; "Theoretical and Experimental Study of Wave-Making Resistance of Ships". Intern. Semin. Theoret. Wave Resist., Ann Arbor, 1963.
- 28) Pien.P.C; "The Application of Wave-Making Resistance Theory to the Design of Ship Hulls With Low Total Resistance". 5th Symp. Nav. Hydrodyn., Bergen, 1964.
- 29) Salvesen.N; "Second-Order Wave Theory for Submerged Two-Dimensional Bodies". 6th Symp. Nav. Hydrodyn., Washington, D.C., 1966.
- 30) Shen.Y.T and Ogilvie.T.F; "Nonlinear Hydrodynamic Theory for Finite-Span Planing Surface". J.Ship Res., March 1972.
- 31) Stoker.J.J; "Water Wave". Wiley. New york, 1957.

- 32) Suzuki.K; "On the Boundary Conditions of Wave-Making Resistance Theory". J.S.N.A. of Japan, Vol.130, 1971. (Japanese)
- 33) Tsutsumi.T and Ogiwara.S; "On the Particulars of Ship Hull Form and Wave Pattern Resistance (II)", J.S.N.A. of Japan, Vol.137, 1975. (Japanese)
- 34) Tuck.E.O; "The Effect of Non-Linearity at the Free Surface on Flow Past a Submerged Cylinder". J.Fluid Mech., Vol.22, 1965.
- 35) Ursell.F; "On the Short-Wave Asymptotic Theory of the Wave Equation $(\nabla^2 + k^2)\phi = 0$ ". Proc. Camb. Phil. Soc. Vol.53, 1957.
- 36) Wehausen.J.V; "An Approach to Thin Ship Theory". Proc. of Intern. Seminar on Theoretic. Wave Resist., Univ. of Michigan, 1963.
- 37) Wehausen.J.V; "The Wave Resistance of Ships". Advances in Appl. Mech., Vol.13. Academic Press., 1973.
- 38) Wu.T.Y; "Singular Perturbation Theory for Non-Linear Free Surface Flow Problems". I.S.P., Vol.14, 1967.
- 39) Yim.B; "Higher Order Wave Theory of Ships". J.S.R. Vol.12, 1968.

附録 A 逆流ポテンシャルと相反定理

§2と同様に没水体の極限として水上船を取扱う事とする。

それ故後流渦面 W は最終的には F に含まれるものとし $\bar{F}$ も原水面に一致するものとする。

さてある順向ポテンシャル $\phi(P)$ に対して一様速度の方向が逆になった時の速度ポテンシャル $\bar{\phi}(P)$ 、所謂逆流ポテンシャル、を考えよう。

以下逆流諸書には (～) 印をつける事にする。

水面条件は変わらないで、(3)であるが流れの方向が逆になるので水面変位は

$$\bar{\zeta}(x, y) = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\phi}(x, y, 0) \quad , \quad (A. 1)$$

となる。

又船体表面条件も附号が変わるので、今

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}(P) = -\frac{\partial}{\partial n} \phi(P) \quad \text{on } S \text{ and } \bar{F} \quad (A. 2)$$

とおこう。

§2の議論からそのような $\bar{\phi}$ が一義的に決まるには水線面上の水面変位が与えられねばならないので今は

$$\bar{\zeta}(x, y) = \zeta(x, y) \quad \text{on } \bar{F} \quad (A. 3)$$

と指定しよう。

なおこの時後流渦面は $\tilde{W}$ とし、 W と原点に関して前後対称的にあるものとする。
そうすると(21)と同様に次の表現が成立つ。

$$\tilde{\phi}(P) = \iint_{S+\tilde{F}+\tilde{W}} \left[\tilde{\phi} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial n} - \tilde{S} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right] dS, \quad (A. 4)$$

ここに

$$\tilde{S}(P, Q) = S(Q, P), \quad (A. 5)$$

このようにすると波は後流側にあって

$$\tilde{\phi}(P) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{ig}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_0(P, \theta) \tilde{H}(\theta) \tilde{\phi}_0(P, \theta) \tilde{H}(\theta)] \sec^2 \theta d\theta, \quad (A. 6)$$

ここに

$$\phi_0(P, Q) = \exp. [g\{z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)\} \sec^2 \theta], \quad (A. 7)$$

$$\tilde{H}(\theta) = \iint_{S+\tilde{F}+\tilde{W}} \left[\phi_0(P, \theta) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} - \tilde{\phi} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right] dS, \quad (A. 8)$$

であって以下 $\tilde{H}(\theta)$ を振幅関数と呼ぶ事にしよう。
なお順向ポテンシャルでは

$$\phi(P) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{g}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\phi_0(P, \theta) \tilde{H}(\theta) - \tilde{\phi}_0(P, \theta) H(\theta)] \sec^2 \theta d\theta \quad (A. 9)$$

$$H(\theta) = \iint_{S+\tilde{F}+\tilde{W}} \left[\phi_0(P, \theta) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} - \tilde{\phi} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right] dS, \quad (A. 10)$$

となる。

さて今任意の2つの順向ポテンシャル ϕ_i , ϕ_j に対して逆流ポテンシャルを考え、花岡の第2定理によって【18】

$$\iint_{S+\tilde{F}+\tilde{W}} \phi_i(P) \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n}(P) dS = \iint_{S+\tilde{F}+\tilde{W}} \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad (A. 11)$$

ここで ϕ_1, ϕ_j は $\bar{W}$ の、 $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_j$ は $\tilde{W}$ の上下でジャンプがあるが x, z 方向の速度は連続とする。

薄い船、平たい船では花岡の第1定理も併せて考える方が便利であるがその時は積分可能性についての注意が必要である。

又 $\bar{W}$ が水面に移行するとその上の積分は F と S の交線 C 上の積分で表わされる。それ故 (A. 11) は次のようになる。

$$\iint_{S+\bar{F}} \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS + \int_{CA} (\Delta \phi_1) \zeta_j dy = \iint_{S+F} \tilde{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 dS + \int_{CF} (\Delta \tilde{\phi}_j) \zeta_1 dy \quad (A. 12)$$

ここに C, R は $\tilde{W}$ と $\bar{F}$ の境界線とする。

最後にもし船が前後対称な時 (左右も対称として) 境界条件 (A. 2) が前後反対称となって明らかに

$$\tilde{\phi}(x, y, z) = -\phi(-x, y, z), \quad (A. 13)$$

となり又振幅関数は ϕ は実関数であるならば

$$\tilde{H}(\theta) = \bar{H}(\theta), \quad (A. 14)$$

もし境界条件 (2) が前後対称ならば

$$\tilde{\phi}(x, y, z) = -\phi(-x, y, z), \quad (A. 15)$$

$$\tilde{H}(\theta) = -\bar{H}(\theta), \quad (A. 16)$$

となる。

船が前後非対称の時は簡単でないが一般にその非対称性は僅かであるので前後の平均面を考えてその上で境界条件 (11) を考えて ϕ を対称成分と反対称成分に別ければ上述の関係が成立ち問題は大変簡単になる。

附録 B 変分原理「7、8、10、13」

積分 (A. 11) 及び (A. 12) はグリーンの定理と水面条件によって

$$\begin{aligned} L(\phi_1, \tilde{\phi}_j) &\equiv \frac{-\rho}{2} \iint_{S+\bar{F}+W} \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi}_j dS \\ &= +\frac{\rho}{2} \iiint_D \nabla \phi_1 \cdot \nabla \tilde{\phi}_j dx dy dz + \frac{\rho g}{2} \iint_F \zeta_1 \zeta_j dx dy. \end{aligned} \quad (B. 1)$$

と書けるのでラグランジアン (運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差) を変形した双一次形式となっている。

我々の境界値問題はこの積分の極値問題として定式化する事が出来るのがこの時始めてその力学的意味づけが可能になる。

例えば ϕ を水面条件を満たす任意の調和関数とし

$$I = \iint_{S+\bar{F}} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi f + \phi f \right] dS + \int_C [\zeta \Delta \phi - w \Delta \phi] dy, \quad (B. 2.)$$

ただし

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} = -f \text{ on } S \text{ and } \bar{F}, \quad (B. 3)$$

$$\zeta = \zeta = w \text{ on } \bar{F}. \quad (B. 4)$$

$$\frac{dw}{dx} = f \text{ on } \bar{F}, \quad (B. 5)$$

なる汎関数を考えてその変分をとって見れば容易にこの極値問題が (B. 3)、(B. 4) の境界値問題と等価である事がわかるだろう。

又逆に水線面の条件 (B. 4) がなければ問題が不定になる事もわかり、この事からこの条件を導入する事の妥当性も理解出来るだろう。

附録 C 連続の法則

§ 2 の (19) より

$$\Delta A = \int_C \zeta(x, y) dy, \quad (C. 1)$$

は船体表面から水の中に出て行く流量であるが勿論これは連続の法則によって自由表面から出て行くものと釣合わねばならない。

そこで水面と船体表面から出て行く流量を正確に計算すると

$$\begin{aligned} \iint_{S+\bar{F}} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS &= - \iint_{S+\bar{F}} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &= \iint_{S+\bar{F}} dy dz = \int_{C-L} \zeta(x, y) dy, \end{aligned} \quad (C. 2)$$

ただし L は無限後流における検査面と自由表面の交線である。

所が水面変位に漸近展開 (A. 9) を代入すると L 上の積分は平均において 0 となるので ΔA が 0 となって都合が悪い。

そこで無限後流の検査面 (y-z 面に平行) を通過する流量を考え合せると

$$\int_L \zeta dy + \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dy dz = 0 \approx \int_L \zeta dy + \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dy + \int_L \frac{\partial \phi}{\partial x} \zeta dy \quad (C. 3)$$

となり、ここで (A. 9) を代入すると右辺第1、2項は又平均において0となり、結局第3項のみ残るから連続の法則が成立つためには

$$\Delta A = g \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 (-\infty, y) dy \quad (C. 4)$$

でなければならない。

これは又 (A. 9) を代入して

$$\Delta A = -\frac{4g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H(\theta)|^2 \frac{\sec^3 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta} \quad (C. 5)$$

と書ける。

薄い船では (C. 1) から直接上式に似た表現がえられる。

ΔA は図6のように左側波形の正面図への投影面積であるからこの (ρU) 倍は水頭抵抗とも言うべきものであるが実際にはこれは造波抵抗の数倍となる「4」。実際 (C. 5) は造波抵抗積分 (E. 1) の約4倍となる事はよくわかるだろう。

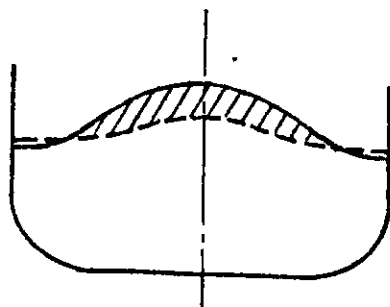


FIG. 6 PROJECTION OF WAVE PROFILE

附録D アルキメデスの原理の拡張「11」

静水力学における浮力に関するアルキメデスの原理は一様流中の船の場合に次のように拡張される。

「静的浮力も含めて船に働く垂直力は船の静止水面からの排水重量と水の自由表面の静止水面からの変化分の排水重量の和に等しい」
 今垂直力を Z とすると

$$Z = - \iint_S \star p \frac{\partial z}{\partial n} dS, \quad (D. 1)$$

と与えられるがベルヌーイの定理により

$$\frac{p}{\rho} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - gz, \quad (D. 2)$$

で水面では圧力は一定である故それを0とすると(D. 1)は又次のように書ける。

$$Z = - \iint_{S+F} \star p \frac{\partial z}{\partial n} dS, \quad (D. 3)$$

所で S^* と F^* 上で境界条件(11)が満たされているとし

$$\iint_{S+F} \star \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] dS = 0, \quad (D. 4)$$

である事を使えばよく知られた変換によって

$$\iint_{S+F} \star \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right] \frac{\partial z}{\partial n} dS \quad (D. 5)$$

$$= \iint_{S+F} \star \left[- \frac{\partial \phi}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \frac{\partial z}{\partial n} \right] dS = 0,$$

となる。
 それ故(D. 3)より

$$Z = \rho g \iint_{S+F} \star z \frac{\partial z}{\partial n} dS = \rho g V - \rho g \iint_F \star \zeta(x, y) dx dy, \quad (D. 6)$$

ここに

$$V = \iint_S z \frac{\partial z}{\partial n} dS. \quad (D. 7)$$

(6) は正に命題そのものである。

線型理論では水面変位は $\zeta = -\frac{\phi}{g}$ となる故 (D. 6) は

$$Z' \equiv Z - \rho g \nabla = \rho \iint_F \frac{\partial}{\partial x} \phi dx dy = -\rho \int_C \phi dy \quad (\text{D. 8})$$

$$= 2\rho \int n(x) \frac{\partial}{\partial x} \phi dx = -2\rho g \int \zeta(x) n(x) dx ,$$

となってこれは見掛けの排水量変化に基づく静的浮力の変化であって没水体では勿論0となる。

それ故水の動圧に基づく力を求めるには (D. 6) における水面変位を更に高次の項までとる必要がある。

附録 E 造波抵抗積分の積分可能性

造波抵抗は次の積分によって与えられる。

$$R = \frac{\rho g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |H(\theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta , \quad (\text{E. 1})$$

$H(\theta)$ は (A. 10) によって与えられるものとする。

細長船理論では横切面積曲線が船首尾で切線まで0でなければこの積分は存在しない。

しかしそのような場合でも薄い船もしくは平たい船として計算すればこの積分は存在する。

しかもこの両者の結果は同じにはならない。

この原因をよく調べて見ると横波系では振幅関数はどの近似でもよく似たものになるが発散波系では大変異なっており、特に細長船では抵抗積分が存在しなくなると言う事がわかる。

極端な例として幅 $2b$ 、喫水 $2t$ の長方形箱船を考えよう。

細長船近似では

$$H(\theta) = 8igt \sin(g \sec \theta) , \quad (\text{E. 2})$$

で抵抗は勿論無限大となる。

$$R = O(b^2 t^2) \rightarrow \infty , \quad (\text{E. 3})$$

これを平たい船で近似すると

$$H(\theta) = 8it \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \sin(g \sec \theta) \sin(g b \sec^2 \theta \sin \theta) , \quad (\text{E. 4})$$

$$R = \frac{64 \rho t^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x$$

$$x \sin^2(g \sec \theta) \sin^2(g b \sec^2 \theta \sin \theta) \frac{\cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta}, \quad (E. 5)$$

抵抗積分は有限値となるがこの低速における近似値は

$$R \approx 8 \rho t^2 g b = O(b t^2), \quad (E. 6)$$

となって細長船近似の結果 (E. 3) とオーダーが異なってくる事がわかる。

薄い船で近似すると又別のオーダーとなる。

つまり細長船理論では造波抵抗は常に (E. 3) のオーダーとなるがその抵抗積分が存在しない時はオーダーがそれと異なっている。

このようにして細長船近似で造波抵抗が無限大の場合も理論の中にとり入れる事は出来るけれどこれらの考察からわかるようにこのような矛盾は発散波系の波高に対する近似度の不足に由来している。

所がそのように波長の短い波については散乱波を考えない理論は明らかに悪い近似となるだろうからこの点についてさらに検討する為にはどうしても散乱についての知識が必要になって来る。

附録 F 解析接続

速度ポテンシャルは調和関数であるから鏡像原理によってある面を超えて図 5 のように解析接続出来る。

この時新しい特異点の分布面 $\bar{S}$ をスケルトン面と呼ぶとこの上に立てた法線は S と元の船体表面 S に囲まれた領域で互に交わってはならない。

もし交点があるとするとその交点は特異点としなければならない。

自由表面も特異点の分布面であるが線型理論では水面条件によってその特異点は船体水線周りの特異点のみで表現出来、それが所謂線積分項となる。

それ故上述のスケルトン面にこの船体と水の自由表面の交線あるいはその交線を含む水線面を含めておけば自由表面の特異点を代表させる事が出来るだろう。