

61

浮遊式海洋構造物の形状とその波浪中動揺性能について

正 員 別 所 正 利
 水 野 俊 明

On the oscillation among waves of some types of ocean plat-form

By Masatoshi BESSHO
Toshiaki MIZUNO

西 部 造 船 会 会 報
第 53 号 別 刷
昭 和 52 年 3 月

Reprinted from
TRANSACTIONS
OF
THE WEST-JAPAN SOCIETY OF
NAVAL ARCHITECTS
No. 53 MARCH 1977

浮遊式海洋構造物の形状とその波浪中動揺性能について

正 員 別 所 正 利*
 水 野 俊 明*

On the oscillation among waves of some types of ocean plat-form

By Masatoshi BESSHO
 Toshiaki MIZUNO

Summary

It will be necessary to have a vast deck area for a ocean plat-form which may be made use as a factory or a air port, but its mean load on the deck may be much smaller than of a ship. In this paper, the authors try to design some semi-submerged type ocean plat-forms with the length and breadth 250m×250m and equivalent draft 2 m, and carry out oscillation tests among waves about some of them and compare with the barge type one.

As the conclusion,

i) It may say that the barge-type one may be favourable when the plat-form is becoming larger than the one built currently.

ii) The lattice type (the footing part is arranged like lattice) and multi-hull type (some footings is arranged longitudinally) one which are designed as to have a wave-free wavelength equal to their length have a very shallower draft than the ones which were built at the past.

Thence, their oscillation characteristics may not so good and actually it is verified by the test of a model of them.

iii) The main reasons why they have a shallow draft lie on many member of columns and the large wave-free wave-length and large volume of footing part.

Then, the model having number of isolated wave-free buoys is designed, tested and shown to have a good characteristics with regard to the oscillation among waves.

1. 序 論

近年海上工場、飛行場等の企画に関連する大変大型の浮遊式海洋構造物の研究が進められている¹⁾。

これらはその波浪中動揺性能を考える限りすべて所謂半潜式形状が選ばれている。

その形状はある 適当な波長において 波の強制力又はモーメントがなくなるように 選定されるがそのような形状は無限に多くのものが考えられるのでその他の機能例えば静的動的復原力、構造強度、工作等の面に関する考慮に基づいて決められてよい。

さてこの種の浮遊構造物の目的は 広い甲板面積を有する事であり、一方重量つまり排水量は出来るだけ小さい方が望ましい。

* 防衛大学校機械工学科

所与の甲板面積に対して所要排水量は甲板上荷重と構造物自身の重量から定められる。

そこで今排水量を甲板面積で割つたものを考えてそれを相当喫水と名づけておこう。

この種浮体では 荷物の運搬を目的とする船と異なり 荷重は大変小さいと考えられるので 相当喫水は非常に小さくてよいはずである。

今それを現用のものについて例示すると次表がえられる¹⁾。

構 造 物 名	相 当 喫 水
沖縄海洋博アクアポリス	28,000 t/10,000×1.025 = 2.73 m
石油掘削リグ 第3白竜	21,000 t/ 6,767×1.025 = 3.03 m

しかしながら甲板上荷重は後者の例ではこの12%程度つまり 40 cm 足らずである。

今考えているものについてもこれを大幅に上まわるとは考えられないのでこの種の構造物は8割以上が構造重量もしくはバラスト重量である。

所でこのように 甲板荷重が小さいのであるから 他の条件が許すならば相当喫水を出来る限り小さくする事が望ましい。

本報告はこのような観点にたつて甲板面積 250m×250m=62,500m² 排水量 125,000 t つまり相当喫水 2 m の実機を想定し、波なし波長を 250 m 程度に選んで多胴形状模型を計画して相当喫水が小さくなった場合どのようなかを確認め又さらに列柱型のものを計画し、模型実験を行つてその性能を確める事とした¹⁾。

2. 形状の計画

浮遊式構造物で動揺性能を除きあらゆる点で最も簡単なのは箱船型であろう。

又波浪中の動揺性能についてもここで考えるような大型になつて海洋波の最も大きい波長(統計的な意味)をはるかに越す長さ幅を持つようになると箱船の動揺性能は必ずしも悪いとは言えず、その大きい減衰性能から言えばむしろ良好と言つた方が良いかも知れない。

このような事情は実際に使用海面の風浪等の統計的資料によつて比較検討されなければ結論はえられない。

本報ではこのような点について考えず次に充分静的復原性を有すると考えられる形状として水線部が円柱で底部の横材を設けてあたえられた波長で波なしとなるような形状を機つか計算をして見る事にした。

この垂直円柱部は復原性能上水線面積を確保する為になるべく大きくかつ数の多い方がよい。

又構造面から考えればその円柱間隔のあまり大きい事は好ましくないだろう。

建造面から考えても大型では分割建造し洋上結合されるであろうから、その要素部分浮体が夫々充分な復原性を持つ事が望ましい。

これらの事情を総合すると大型の半潜式浮遊構造物では水線部垂直円柱の数は大変多くなる事が予想される。

この点が一つ現用の半潜式石油掘削台船等と異つて来る点であろう。

さてこのように大変円柱の数が多くなるとその円柱と底部横材断面の寸法は与えられた波なし波長(一般に長さのオーダーであろう)に較べて大変小さい。

それ故波なし円波数 ω (上下動に対する) について次の近似式が成立つ²⁾。

$$\frac{\omega^2}{g} = K_f = \frac{2\pi}{\lambda_f} \approx A_w/(1+k_z)f, \quad (1)$$

ここに K は波数, λ は波長, g は重力の定数, A_w は水線面積, f は排水量, k_z は上下動に対する附加質量係数。

この式は元良の式⁹⁾と少し異なり同じ模型では大分長い波なし波長を与える事になるが今は定性的検討を目的としているので細かく問はない事とする。

さてこの式は波長が物体より充分長い時の近似式であるので個々の円柱要素について成立つ訳であるが個々のそれが波なしとなれば全体も波なしとなり、水線面積、排水量共に円柱要素の数だけ増える。しかしこの時 (1) 式右辺は不変に止まるから結局 (1) 式は今の場合全体の水線面積排水量について成立つ。

次に動揺を小さく抑える為には充分大きい減衰を必要とするから底部横材断面は長方形としそれを縦横に格子状に配置した場合 (以下格子型と呼ぶ)、と筏状に配置する所謂多胴型について先ず計画をして見た。

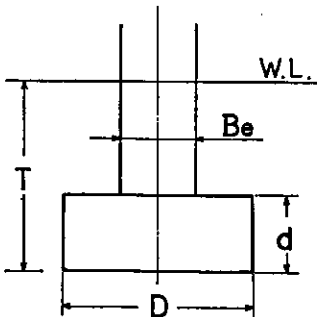
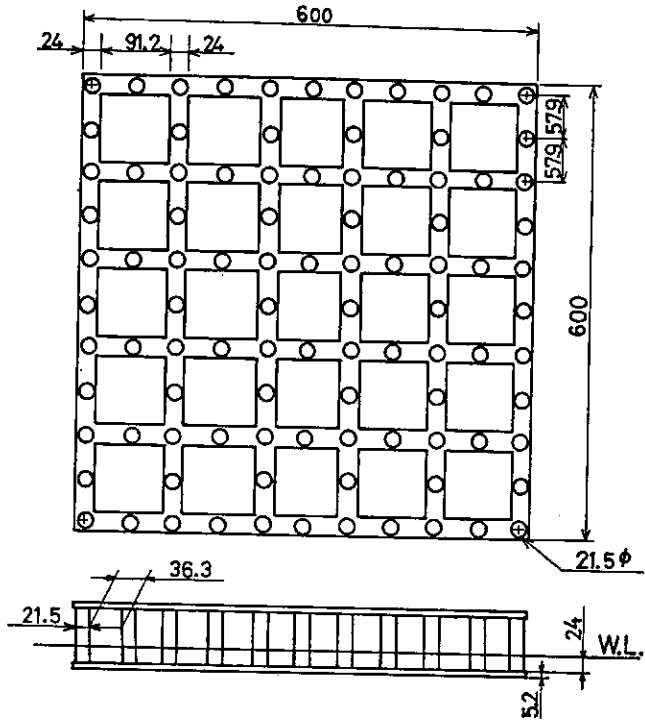


Fig. 1 Dimension of submerged part

この際、図1のような2次元断面を考えて所望の波長で波なしとなるように寸法を決めその後で首の部分の排水量に等しいだけ略々直径 B の円柱を配置する事とした。

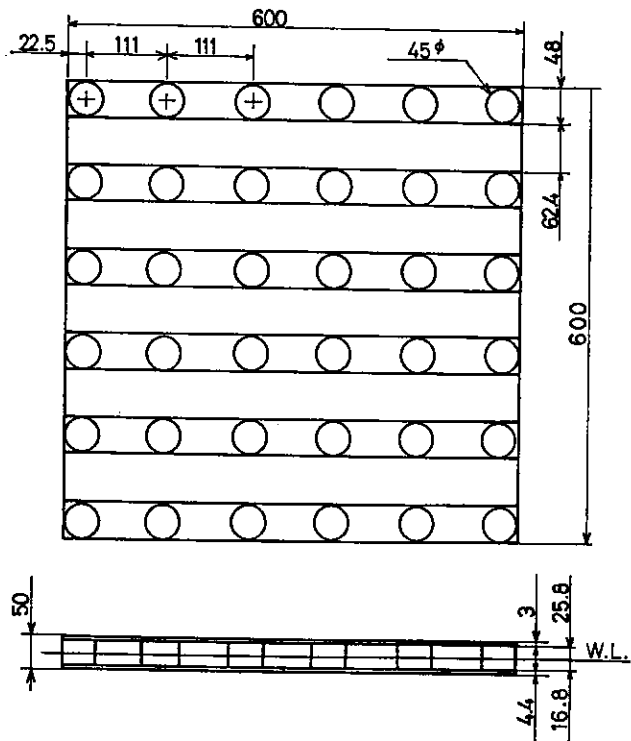
なお附加質量は $\rho \pi D^2$ とした。

その各1例を表2ならびに図2, 3に示す。



(DIMENSION IN mm)

Fig. 2 Model L-96



(DIMENSION IN mm)

Fig. 3 Model M-36

図中の寸法は一辺の長さ 60 cm の模型への換算値である。

この図から明らかなように以上の方針で計画すると喫水が大変浅く且つ底部横材の断面が大変平たくなってしまう。

このような横材は渦を作り減衰を大きくして都合が良いとも考えられるが、一方波なし船型の理論は粘性を考慮していないので大きい渦が出来ると理論通り波なしにならないと言う事態が予想され実験的にも渦が大きく出そうな形状ではうまく波の強制力が消えていない⁵⁾。

それ故このような形状はあまり望ましくないと考えられるが何故このようになるかを以下に少し考察しよう。今円柱の直径を B 、数を N とし、底部横部材の体積を N 個に割りそれを直径 B の円柱として加え合せた時得られる喫水を αT (T は実際の喫水, $\alpha > 1$) としよう。

そうすると

$$A_v = \frac{\pi}{4} B^2 N, \quad v = \frac{\pi}{4} B^2 \alpha T N, \quad (2)$$

であるから (1) より

$$\lambda_f = 2\pi(1+k_s)\alpha T, \quad (3)$$

を得る。

一方今は相当喫水 $\bar{d}$ を与えているので喫水には次の制限がある。

$$\bar{d} = v/L^2 = \alpha T A_v / L^2, \quad (4)$$

これを上式に代入すると

$$\lambda_f = 2\pi(1+k_s)\bar{d}L^2/A_v, \quad (5)$$

となる。

(3) 式より今採用したような k_s および α の大きい形状では与えられた波なし波長に対して喫水が小さくなる事が明らかである。

又 (4), (5) 式からは適当な水線面積をもつ形状については相当喫水が浅くなると波なし波長が短くなる事がわかる。

この考察から結局図 2, 3 のような形状になったのは先ず相当喫水を浅くして波なし波長を船長に等しく選んだ事が第 1 原因で第 2 の原因としては底部横部材の幅が広すぎた事である。

Table 1 Principal particulars of floating platforms

PARTICULARS		MODEL		
		L-96	M-36	C-25
DISPLACEMENT	∇ (m ³)	125,000	125,000	125,000
LENGTH	L (m)	250	250	250
DRAFT	T (m)	12.15	8.83	35.67
DIAMETER OF COLUMN	B (m)	8.96	18.75	10.00
NUMBER OF COLUMN	N	96	36	25
DISTANCE BETWEEN COLUMN	(m)	48.00	46.25	60.00
WATER PLANE AREA	A_w (m ²)	6,053	9,940	1,964
METACENTER ABOVE KEEL	KM (m)	299.4	488.3	125.4

つまり大型になって来て波なし波長を大きくとるが相当喫水は小さく抑えたとこの様な事情が生ずるのであつて逆に現用のものの程度のもものでは充分性能のよい多胴型が計画出来ると言う事である。

又波なし波長を大型になつても現用程度と同じに保つならば (3) 式から考えても現用のものを幾つも幾つも結合して大きくして行けばよいと言う事になる。

さて以上の試設計によつて今の場合格子型、多胴型では水線面積に比してどうしても没水部容積が大きくなる (α が大きくな

る)ので、次に図1を回転体とした形状を考えて見た。

この底部を円柱台ではなく球とした形は幸い佐尾等⁷⁾によつて計算されている。そして彼等は この形状では波なし波長が B/D のみの関数である事を見出した。

つまり

$$K_r B = f_{unc}(B/D), \quad (6)$$

一方 (3) によれば

$$K_r B = B/(1+k_s)\alpha T, \quad (7)$$

となるので大変 (6) と異なるように見える。

しかし B/D を一定に保つたまま喫水を大きくしてゆくと α は小さくなり又 k_s も小さくなると考えられるので (6) 式の関係を推測しうる。

佐尾等の図表を使えば設計計画は大変簡単でこれは喫水に関係しない所を利用して先ず円柱直径 B を定め与えられた波なし波長から図表を利用すれば球部直径 D が定まる。この排水量を計算して与えられた排水量を割れば柱の個数が出て来る。

今 $\lambda_r = 200\text{m}$, $B = 10\text{m}$, $N = 25$ 本と選ぶと $D = 18.67\text{m}$ となるので球部と同じ排水量同じ直径の円柱台に置きかえたと表2, 図4の列柱型 C-25 を得る。

なお上述のようにこの形状では波なし波長は喫水に関係しないので相当喫水が小さくなくてもこのままで喫水を浅くすればよい。

このようにこの型式の設計は大変簡単であるけれど一方では構造強度面では大変不利であろう。

最後に復原性の目安としてメタセンターのキールからの高さを計算して表2に記す。

この場合縦横メタセンター共に等しい。

3. 実 験

波浪中で浮遊する物体の動揺を軽減するには波による強制力が小さい形状の選定も重要であるが一方造波による減衰は有名なハスキントの関係により波強制力の自乗に比例するので波なし形状では同時に造波減衰もなくなら粘性減衰等の小さい形状ではかえつて動揺性能は悪化する事が知られている⁵⁾。

それ故速度の粘性減衰をもつような形状を選定しなければならないがこの点については今の所実験的研究にまつ以外に方法がない。

そこで前節で計画した形状の内多胴型と列柱型各1種類について模型を製作し実験する事とした。

又比較対照の意味でバージ型模型 B-O を加えた。

それらの要目は第3表に示す通りであり, M-36, C-25 の形状は図3, 4 に詳しい。

Table 2 Particulars of models

MODEL	B-O	M-36	C-25	C'-25
DISPLACEMENT (gr)	1,615	1,615	1,615	1,207.5
LENGTH & BREADTH (mm)	600	600	600	600
WATER PLANE AREA (mm ²)	360,000	57,200	11,310	11,310
DRAFT (mm)	4.5	21.5	107.5	68.5
METACENTRIC HEIGHT (mm)	6,284	1,116	139	192
RADIUS OF GYRATION (mm)	210	205	203	186
λ/L^* FOR HEAVE	2.01	1.60	2.37	2.05
HEAVE LOG. DAMPING	.780	.197	.271	.479
λ/L^* FOR PITCH	1.97	1.44	4.27	2.73
PITCH LOG. DAMPING	.869	.373	.533	.544

$$* \lambda/L = gT^2/2\pi L$$

WHERE "T" IS PERIOD OF FREE OSCILLATION.

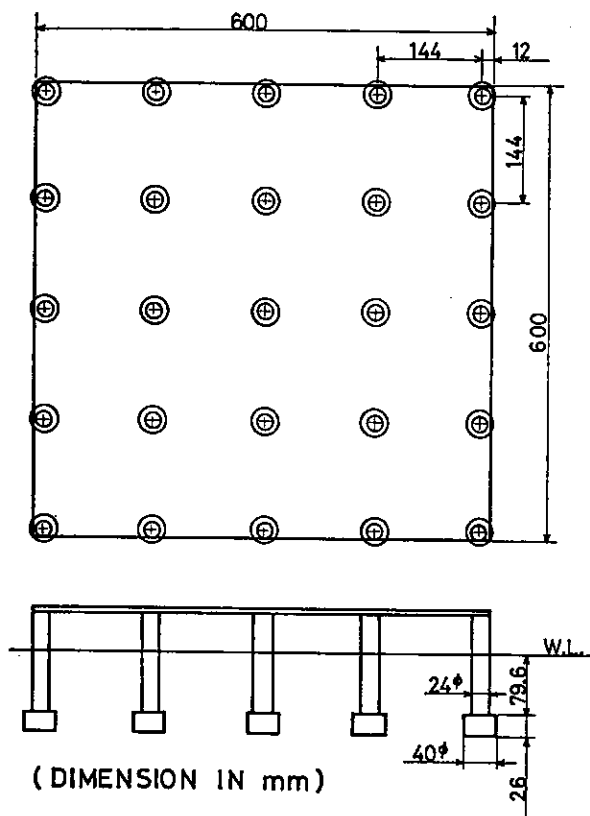


Fig. 4 Model C-25

ように今考えているような大型では例えば波長 200 m 以下を考えると上下、縦ゆれ共に波高、傾斜の 2 割以下しかゆれない。

ii) 多胴型 M-36

波なし波長は船長に等しく選んであり、確かに上下ゆれではゆれは少なくなっているが次の C-25 程ではない。

又表中 C'-25 とあるのは C-25 模型のバラストをとった軽荷状態であつて前節に説明したようにこの形状では喫水が変わっても波なし波長はかわらない所からこの状態を追加したものである。

これらの模型を長さ 9 m, 幅 1.2 m, 深さ 1.2 m の水槽の中程におき 1 端のプランジャー式造波機により波を起して波浪中動揺試験を行つた。

計測は波長波高上下ゆれ縦ゆれ振幅のみとした。

と言うのは模型が小さく計測量も相対的に小さくてその他の計測量はバラつきが目立つたので採録しなかつた。

結果は図 5, 6 にまとめて示す。

図中計算値は附録に示す要領で行つたものである。

個々の場合について見て行くと

i) パージ型

理論計算の結果とかなりよく一致しており又模型中最もよくゆれているが最初に述べた

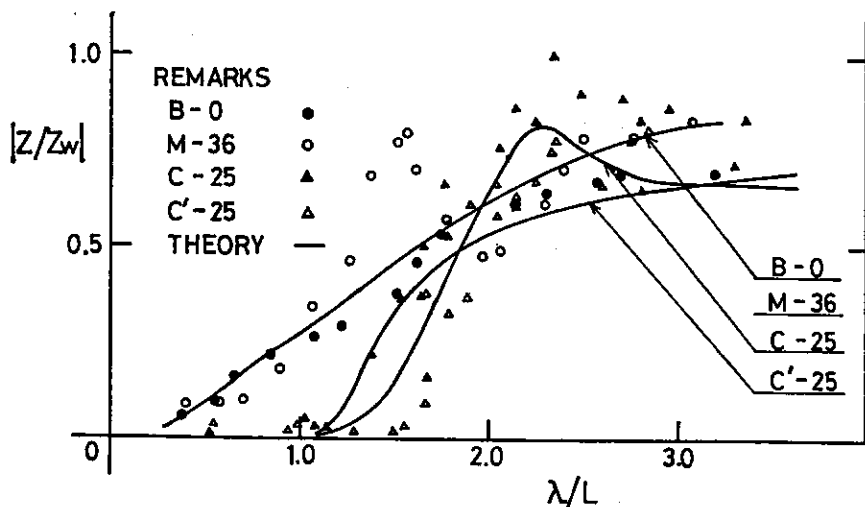


Fig. 5 Heave response

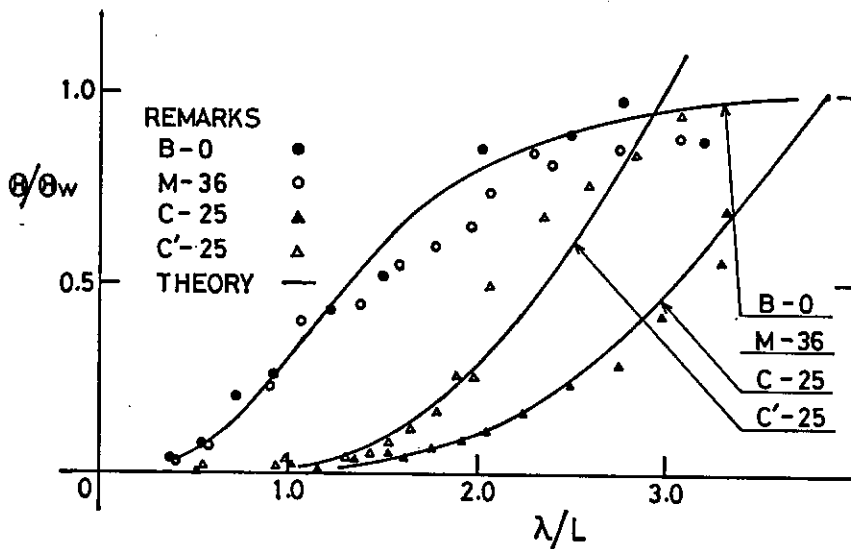


Fig. 6 Pitch response

又縦ゆれではほとんど見るべき効果がない。

この模型では理論計算は簡単でないので実行しなかつたが最初にのべたように喫水が小さい事と没水部横材が平板に近い事は動揺性能に良くない結果をもたらしていると考えられる。

iii) 列柱型 C-25, C'-25

動揺性能は最も良好で特に C-25 は良い。両者の差は喫水の深い C-25 が格段に波の強制力が小さくなっている所にあるようである。

波なし波長は $0.8L=200\text{m}$ として設計したが特に縦ゆれでは広い範囲に亘って動揺が少ない。

これらを4本柱型の石油掘削リグの試験結果⁹⁾と比較して見ると大体 C'-25 と同程度となる。

つまり柱の数がふえると幾分動揺が少なくなる。

これを上下ゆれについて見ると (A. 7) 式中

$$\sin \frac{KL}{2} / \left(n \sin \frac{KL}{2n} \right),$$

なる係数は n が大きくなると小さくなる。つまり強制力は柱の数が多くなると相対的に小さくなる事に起因すると考えられる。

4. 結 論

大型浮遊式構造物においては一般に大変広い甲板面積が要求されると考えられるが一方甲板上の平均荷重は一般船舶に比し大変小さいと予想される。

それ故その排水量を甲板面積で割って相当喫水なる量を導入するとそれは船に比して格段に小さいであろう。

本報告では具体的に長さ幅共 250m, 相当喫水 2m として半潜水式浮遊構造物の外型を数種類計画し, 最後にバージ型を含めて3種類の模型を製作し波浪中動揺試験を行ってその性能を確認した。

その結論をのべれば

i) このように又さらに大型になり大洋波の波長に較べて大変大きくなるとバージ型の動揺性能は良好と言えよう。

ii) 没水部横部材を格子型に配置した格子型、数本縦に配置した多胴型については波なし波長 250m に選んで設計するとこの横部材の排水量が大きくなって結果として喫水が浅くなり動揺性能はあまり良くならず、これは多胴型 M-36 の実験結果でも確認し得る。

iii) これらの模型は大型になれば構造強度上の柱の間隔はあまり大きく出来ないと考えられ従って柱の数は格段に増えるとして計画されたものであるが前項のような結果になるのはこの柱の数を多くしたのが主因のようであつて柱の数が小さい現用のものではこのような問題は起らないし、又大型になつても大洋波の波長が変わるわけではないので波なし波長を現用のもの程度に押えるならば問題はなく、現用のものを幾つも継ぎ足して大型にすると言う簡単な方法が考えられる。

iv) 格子型、多胴型では没水部横部材の排水量が大きすぎて所望の波長で波なしにする為には相対的に喫水が小さくなる事を考えて次にはそれを取り去り、底部にふくらみを持つ柱を並べた列柱型を考えて見た。

この形状では計算によると水線部直径 B と底部直径 D の比で波なし波長が決まり喫水には関係ないので計画には先ず波なし波長から B/D を求めて、柱の数を与えれば喫水が求まり、計画が大変楽である。

試みに柱 25 本の模型を作り試験を行つた所良好な成績を得た。

又 4 本柱模型の結果と比較した所柱の多い方が特に短波長で良いように見える。

なおこの型では上述の関係から排水量が変わつても波なし波長はかわらないので上述の模型を浅喫水でも試験したが動揺性能は幾分劣化する。

これは喫水が浅いと波の強制力が大きくなる為である。

それ故この型でも喫水は大きくした方が、つまり柱の数は少ない方がよい事になる。

参 照 文 献

- 1) 宮内栄治, 甲斐誠司: 浮遊構造物の動揺性能, 昭和 50 年度 防衛大卒業論文。
- 2) 日本造船学会: 「第 1 回海洋工学シンポジウム講演集」 昭和 49 年 11 月。
- 3) 日本船用機器開発協会: 「大型浮遊式海洋構造物の調査研究事業報告書」 昭和 50 年。
- 4) 田上: 「位置安定装置つき半潜水式洋上自動掘削システムの開発に関する調査報告書」。
- 5) 元良誠三, 他: 「波による Heaving および Pitching の強制力を受けない船型について」 造学論文集 117 号 昭和 40 年。
- 6) 別所正利: 「動揺問題における波なし分布について」 造学論文集 117 号 昭和 40 年。
- 7) 佐尾邦久, 他: 「軸対称物体の上下揺れについて」 造学論文集 130 号 昭和 46 年。
- 8) 別所正利, 他: 「水面で動揺する 2 次元平板に働く流体力について」 関西造船協会誌 154 号 昭和 49 年。

附録 運動方程式とその計算について

理論計算上から考えると格子型、多胴型は大変困難であり又今回の試験結果を見ても没水横部材がこのように平たくなるとそこに生ずるであろう渦の為に粘性を考慮しない造波理論による計算は役に立たないと考えられる。

そこで今回は多胴型 M-36 の運動計算は行わない事にした。

又前後ゆれは縦ゆれと連成するので特に喫水の深いものでは考慮する必要があるかも知れないが、今回は一応前後ゆれは考慮に入れない事とした。

そこで以下バージ型と列柱型について計算式を記す。

a) バージ型

流体力の計算法として普通ストリップ法が用いられるがここでは縦切ストリップ法とでも言うべき手法で代用

しよう。

つまり喫水は大変小さいので水面上の横方向に無限に長い2次元平板で代表させるのである。

運動方程式は

$$(M+M')\ddot{z}+N_z\dot{z}+\rho g A_y z = E_z, \quad (\text{A. 1})$$

$$(I+I')\ddot{\theta}+N_\theta\dot{\theta}+W\overline{GM}\theta = E_\theta, \quad (\text{A. 2})$$

$M=W/g$ は質量, $I=M\kappa^2$ は質量慣性, z は上下変位, θ は縦ゆれ角, $\overline{GM}$ はメタセンター高さとする。

文献 8) の記号を使ってこの解を記せば

$$z/z_w = H_z^* \left(\frac{KL}{2} \right) / \left[\frac{KL}{2} \left\{ \frac{M_{22}}{\rho} + \frac{4\tau}{L^3} - i \frac{N_{22}}{\rho\omega} \right\} - 2 \right], \quad (\text{A. 3})$$

$$\theta/\theta_w = H_\theta^* \left(\frac{KL}{2} \right) / \left[\frac{(KL)^2}{2} \left\{ \frac{\tau\kappa^2}{(L/2)^4} + \frac{M_{33}}{\rho} - i \frac{N_{33}}{\rho\omega} \right\} - \frac{K\tau\overline{GM}}{2(L/2)^4} \right], \quad (\text{A. 4})$$

ここに, M_{22}, M_{33} , は附加質量係数 N_{33} は減衰係数である。

又 Z_w, θ_w は波振幅, 波傾斜である。

b) 列柱型

流体力は佐尾等の計算を使う事として又柱相互の干渉は無視するものとする。

運動方程式は (A. 1), (A. 2) で与えられるが上の仮定から文献 7) の計算値を使用する事とし, 又彼等の記号を使う事にしよう。

又柱は横方向に $(m+1)$ 本, 縦方向に $(n+1)$ 本で総計 $N=(n+1)^2$ 本が C-25 のように配列されているものとする (C の場合は $n=m=4$)。又簡単の為に n は偶数とし柱の間隔は L/n で与えられるものとする。

柱一つの排水量は τ/N であるから

$$\left. \begin{aligned} M' &= \rho N \cdot \frac{\tau}{N} K_4 = \rho \tau K_4, \\ N_z &= \rho \omega \tau D_4, \\ E_z/Z_w &= \rho g \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (n+1) e^{\sum_{n=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} e^{i\pi \frac{n}{2} L}} \\ &= \rho g \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (n+1) e^{\frac{\sin \frac{KL}{2}}{\sin \frac{KL}{2n}} \cdot e^{-i\frac{KL}{2n}}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 5})$$

$$\left. \begin{aligned} I' &= \rho \tau K_4 L^2 \frac{(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{6n}, \\ N_\theta &= \rho \omega \tau D_4 L^2 \frac{(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{6n}, \\ E_\theta/Z_w &= \rho g \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \frac{L}{2} (n+1) e^{\frac{\cos \frac{KL}{2}}{\sin \frac{KL}{2n}} \left[1 - \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{KL}{2n} + \frac{\pi}{4} \right)}{n \sin \frac{KL}{2n}} \tan \frac{KL}{2} \right] e^{-i\frac{KL}{2n}}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 6})$$

これを (A. 1), (A. 2) に代入して解くと

$$\frac{Z}{Z_v} = \frac{(n+1) \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{K_f} \cdot e \cdot \frac{\sin \frac{KL}{2}}{\sin \frac{KL}{2n}} \cdot e^{-i \frac{KL}{2n}}}{A_v/K_f - (1+K_4 - iD_4)} \quad (A.7)$$

$$\frac{\theta}{\theta_v} = \frac{\frac{\pi(n+1) \left(\frac{D}{2}\right)^2}{2K_f L_f} \cdot e \cdot \frac{\cos \frac{KL}{2}}{\sin \frac{KL}{2n}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{KL}{2n} + \frac{\pi}{4} \right) \tan \frac{KL}{2} \right\} e^{-i \frac{KL}{2n}}}{\frac{GM}{KL^3} - \left\{ \left(\frac{\kappa}{L} \right)^2 + \frac{(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{6n} (K_4 - iD_4) \right\}} \quad (A.8)$$

となる。

文献7より今の模型について推定すると K_4 は殆んど一定となり D_4 はクロス・カーブがかきにくいので e について読みとり、ハスキントの關係を用いて計算した。

又 D_4 は大変小さくて自由動揺より求めた減衰の 1/10 から 1/100 なのでほとんど無視しうる。

逆に粘性減衰を考えなければ同調点で大変高いピークが出るので D_4 としては自由動揺の対数減衰 α から次式で計算されるものを用いた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{上下ゆれ: } D_4 = \frac{2\alpha}{\pi} (1+K_4), \\ \text{縦ゆれ: } D_4 = \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ K_4 + \frac{6n(\kappa/L)^2}{(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right)} \right\}, \end{array} \right\} \quad (A.9)$$