

66

空中翼の水面効果について (第1報)*

正会員 別所 正 利**, 正会員 石 川 明 男***

On the Water Surface Effect of an Air Wing (1st Report)

By Masatoshi BESSHO (Member) and Akio ISHIKAWA (Member)

To clarify the water surface effect of a wing flying over water, both velocity potential of air and water flow are determined, so that the pressure might be continuous and both fluids might flow in the same direction at water surface. And its lift, water surface elevation and wave drag are also formulated.

It is shown that the water surface effect of an air wing may be approximated as the rigid wall effect because of the density difference between air and water.

Further, a numerical calculation is performed to investigate the effect of wing parameters, such as thickness ratio, attack angle and tail clearance upon the water surface effect of a two-dimensional wing section.

1. 序 言

空中翼が地表に近づくとき大きな揚力を発生することは地面効果として良く知られている。またこの効果を利用した水上を高速で走るものとしてラムウィング等が考えられている。ところで、その様な翼の水面効果については友近、今井の研究¹⁾があるだけである。しかしこれは重力の影響を無視した、つまりフルード数無限大の場合を扱ったものであり、水面の変形が正しく取り入れられてはいないし、また後述の様に水と空気の大い密度差が取り入れられていない。

そこで著者等はフルード数が有限の場合について水面効果の理論的考察を展開し計算を試みて来たが²⁾、本報ではさらに空中翼の揚力及び水面の変形について調べてみる事にする。

さて無限流体中にある翼の性能は、翼上の境界条件を指定すれば、良く知られた方法により容易に求められる。ところが空中翼による水面効果の問題では空気中にある翼のまわりの空気の運動によって水面が変形

し、その変形によって翼のまわりの流れが変わってくる。

そこで本報では線型化された水面条件を使って、空気と水の運動を水面で接続させ、水面の変形による空気力の変化を求める式及び翼の境界条件を与える積分方程式を解けば水面の変形及び造波抵抗が直ちに与えられる式を導く。さらに空中翼の水面効果を具体的に調べるため、今回は2次元な翼断面について、厚さ、平均水面より Trailing Edge の高さ及び迎角を変化させた数値計算を行ない、空中翼の水面効果の一般的性質を求める。

2. 空気及び水の速度ポテンシャル

3次元の場合でも付録Aの様に従来の造波抵抗理論を利用すれば水面効果は求まるが、本報では問題を2次元に限り研究する。さてここではこれ以降使用する記号等について述べておく。

記 号 表

C : 物体(断面)境界

c : 流れ関数の未定定数

C_L : 2次元揚力係数 $= L / (\frac{1}{2} \rho_a V^2 l)$

ここでは最終的には $U=V=1$, $l=2$ としてい

* 昭和52年5月24日 関西造船協会春季講演会において講演

** 防衛大学校 機械工学教室

*** 防衛庁技術研究本部 第1研究所

るので $C_L = L/\rho_a$ となる。

C_w : 2次元造波抵抗係数 $= R_w/(\frac{1}{2}\rho_a U^2 l)$

d_e : 等価噴水=排水容積/底面積

F : 水面

F^a : 空中の断面による 空気の攪乱複素速度 ポテンシアル

F^w : 空中の断面による 水の攪乱複素速度 ポテンシアル

F_n : フルード数 $= U/\sqrt{gl} = 1/\sqrt{2g}$

g : 重力加速度

h : 平均水面よりの翼の Trailing Edge の高さ

i : $\sqrt{-1}$

L : 揚力

l : 翼弦長 (本報では2としている)

q : 空気の流速 $= \sqrt{(V-u)^2 + v^2}$, 但し $u+iv = -\frac{dF^a}{dz}$

R_w : 造波抵抗

ds : 2次元断面境界上の微小線素 (反時計回りを正)

t : 翼の厚さ

U : 水の一様流速 (本報では最終的には1とする)

V : 空気の一様流速 (本報では最終的には1とする)

α : 翼の迎角

τ : 単位長さ当りの循環の強さ

η : 水面変位

κ_0 : 波数, 一般に g/U^2 , ここでは $\frac{1}{2F_n^2}$

μ : Rayleigh の摩擦係数 (最終的には $\rightarrow 0$)

$\tilde{w} = x \cos \theta + z \sin \theta$

ρ_a : 標準状態における空気密度, 約 0.12492kg sec²/m⁴

ρ_w : 標準状態における水の密度, 約 102.04kg sec²/m⁴

ϕ : 攪乱速度ポテンシアル

Ψ : 攪乱流れ関数

また Suffix w は水についてのもの

a は空気についてのものを表す。

さらにこの場合, 記号及び座標系は Fig. 1に基づく付録Bのものをを用い, $U=V=1$ として問題を扱う。

ところで2次元の場合は断面の境界上に連続的に循環を分布させると, その強さがその点の速度となり大変便利である。

さてここで水面上にある断面による流れ関数 Ψ^a は

$$\Psi^a = \oint_C \tau G^a(z, z') ds \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

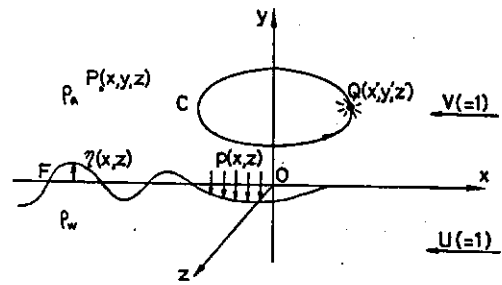


Fig. 1. Coordinate system.

ここで $G^a(z, z')$ については付録(B-12)を参照。

この場合断面境界も流線であるから,

$$\Psi^a = -y + c \quad \dots\dots\dots (2-2)$$

この場合 $z = x + iy$ は境界上の点。

さらに未定定数 c を定めるための Kutta の流出条件³⁾は

$$\tau] \text{ Stagnation Point} = 0 \quad \dots\dots\dots (2-3)$$

そこで断面形状を与えれば(2-2)と(2-3)により水面上の断面まわりの流れを表わす循環分布が求まる。

実際の数値計算は断面境界を N 個に分割し, それらを線分で結んだ多角形で断面を近似させて行う。そして各線分上には連続的に一定な循環が分布している⁴⁾とする。またこの際(2-3)の Kutta の流出条件は岐点を s はさんだ2区間で

$$\tau s_{-1} + \tau s = 0 \quad \dots\dots\dots (2-4)$$

ただし S は岐点を表す。

以上より得られた未定定数 c を含む $N+1$ 元の連立方程式を解くことにより水面上の断面まわりの流れを表わす循環分布が求まる。

またこの時, $\tau = q$ であるから, 2次元揚力係数は

$$C_L = \frac{1}{2} \oint_C (1 - \tau^2) dx \quad \dots\dots\dots (2-5)$$

一方水の攪乱複素速度ポテンシアル⁵⁾は

$$F^w(z) = \frac{U}{\pi i} \int_0^\infty \frac{H(k) e^{-kz}}{k - x_0 - \mu i} dk \quad \dots\dots\dots (2-6)$$

ここにコッチン関数 $H(k)$ は付録(B-14)により

$$H(k) = \frac{\rho_a V}{\rho_w U^2} \oint_C \gamma e^{ikx'} ds \quad \dots\dots\dots (2-7)$$

この場合 $z' = x' + iy'$ に循環がある。

従って水面変位 $\eta(x)$ は

$$\eta(x) = -I_m \{ F^w(x, 0) \frac{1}{x \ll -1} - 2I_m \{ e^{-ikx} H(x_0) \} \} \quad \dots\dots\dots (2-8)$$

となるから造波抵抗 R_w は

$$R_w = \rho_w g [H(x_0)]^2 = \rho_w [H(x_0)]^2 / (2F_0^2) \dots\dots\dots (2-9)$$

として求まる。

さて(2-2)の積分方程式を解けば水面の変形を考へに入れた2次元断面まわりの流れを表わす循環分布が求まる。その結果(2-7)よりコッチン関数が求まり、さらに(2-8)及び(2-9)により水面変位と造波抵抗が求められる。ここで積分方程式(2-2)の核 G^a は(B-12)で与えられるが、 $\rho_w \gg \rho_a$ であるので付録Aと同様な議論により近似的に次の様になる。

$$G^a(z, z') \doteq I_m \left[\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{z - z'}{z - \bar{z}'} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \log(r_1/r_2) \dots\dots\dots (2-10)$$

$$\text{ここに } r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

即ち水面の効果は鏡像点における正鏡像で表わされている。つまりほぼ地面効果に等しい事になる。

ところで友近、今井の行った翼の水面効果の研究は重力の無い、フルード数無限大の極限を取扱っており水面を速度一定の自由流線と仮定している。これは線型理論的に考えると(2-10)とは逆に逆鏡像を採る事になり上の結論と全く相反している。この様な差違は水と空気の密度の大変大きな違いを考慮していない事に基づくものであり水面を彼等の仮定の様に自由流線とすると水面変位は非常に大きくなると考えられるが、実際には水の大きい密度のために上述の様に変位量が小さくて近似的には地面効果に等しいと見なして良い。ただし以上の議論は空気の流れについてのものであり、水の運動は空気の運動がわかれば(2-6)で与えられる。

3. 数値計算例及び考察

前節の結果に基づいて空中翼の水面効果を調べるために NACA 23015 を母型として翼のパラメータのうち厚さ弦長比を 0.1, 0.15, 0.2 と3通り、また後述の様な理由により迎角を 4° , 6° , 8° と3通り、さらに平均水面よりの Trailing Edge の高さで厚さの比 h/t を 0.5, 1.0, 1.5 と3通り変化させて計27ケースについて数値計算を行った。なお水面効果の計算ではフルード数を0.5から2.5までの範囲とした。

ところでそのためには先ず積分方程式(2-2)を解かなくてはならないがその核 G^a のうち水面の変形による影響を表わす第2項は今の場合小さくて無視しても良いと考えられる。そこで念のため計算によ

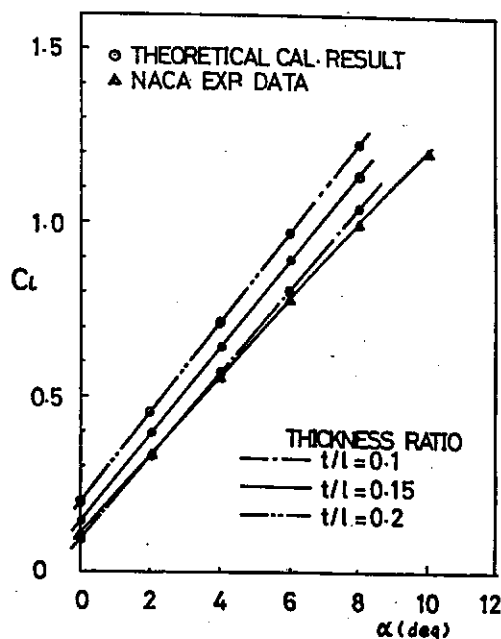


Fig. 2. Comparison of lift coefficient of NACA 23015 between theoretical calculated results and NACA test data.

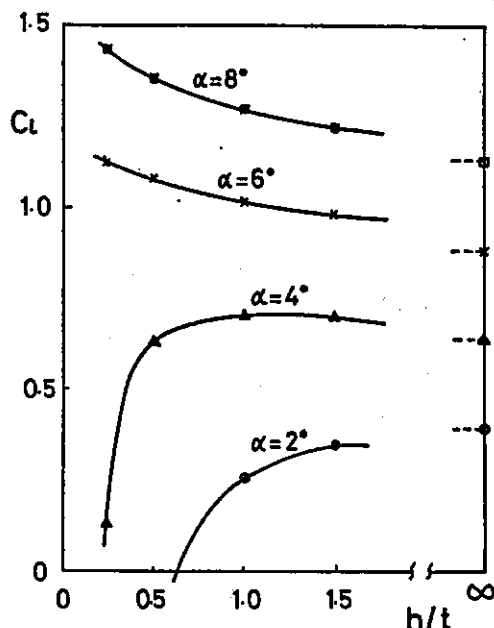


Fig. 3. Ground effect of a wing (NACA 23015).

て確かめてみたところ、特異点が水面に極端に近い場合を除いて式(2-10)は良い近似であった。結局空気の流れについては水面を平らな固体壁と考えて計算していることになる。ここの計算では前述の方法により種々の状態における翼の境界を36に分割し(分割例は Fig. 10 の丸印を参照)それらの循環分布を求めた。

そこで先ず計算精度を確かめるため NACA 23015 の無限流体中の C_l について前述の方法による計算結果と NACA の実験データを比較して Fig. 2 に示す。その際 $t/l=0.1$ 及び 0.2 の C_l の計算結果も一緒に示す。

以上の結果より計算精度については $t/l=0.15$ とかなり厚い翼を考えているため粘性影響があると思われるのでまずまずと言える。

さて次に Fig. 3 に $t/l=0.15$ で水面からの高さによる C_l の変化の様子を示す。

これから谷の翼の地面効果の実験結果²⁾と同じ様に迎角の小さい所では地面に近づくとも揚力が減少し、迎角の大きい所では逆に地面に近づくとも揚力が増大するという傾向が確かめられる。

なお図の右端に示す点は無限流体中のものを表わすが、 $\alpha=4^\circ$ の地面効果に見られる様に、翼の揚力は地面に近づくに従って単純に増減するものではない事がわかる(谷が用いたクラーク Y についても計算してみたが、ほぼ同傾向にあった)。これらの事から地面効果を利用する点から言えば、今回用いた NACA 23015 の様に下に凸なものは小迎角で極端に揚力が減り、地面に引かれることもある。そこで小迎角で下面のせき止め圧を利用する地面効果翼としては下面が平らか、さらに下に凹なものが望ましいと言える。従って以下の揚抗比や水面変位等の計算では迎角は 4° , 6° , 8° として小さい迎角を省いてある。

次に Fig. 4 から Fig. 6 に揚抗比(今粘性抵抗は無視してある) L/R_w の計算結果を示す。

またホバークラフトの様に圧力が矩形形状に集中したものの2次元モデル³⁾では、

$$L/R_w = \frac{\rho_w}{2\rho_a C_l \sin^2(0.5/F_n)} F_n^2 \dots\dots\dots (3-1)$$

となるので比較のため各々の場合の C_l に対応する値を図中に点線で示す。

これらの図から単位揚力当りの造波抵抗は厚い翼程、水面から離れる程、迎角が小さい程、小さくて有利であると言える。しかし粘性抵抗を考えると厚い方が大きいであろうから十分検討を要する。また空中翼の造波抵抗は同じ揚力係数で圧力が艇体の下

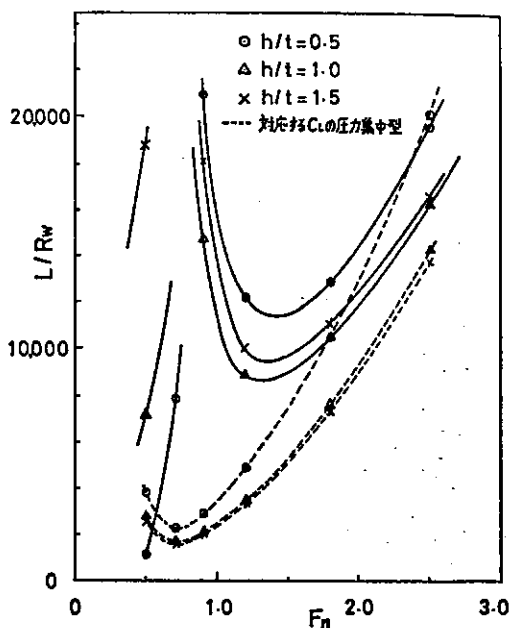


Fig. 4. 1. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.2$, $\alpha=4^\circ$).

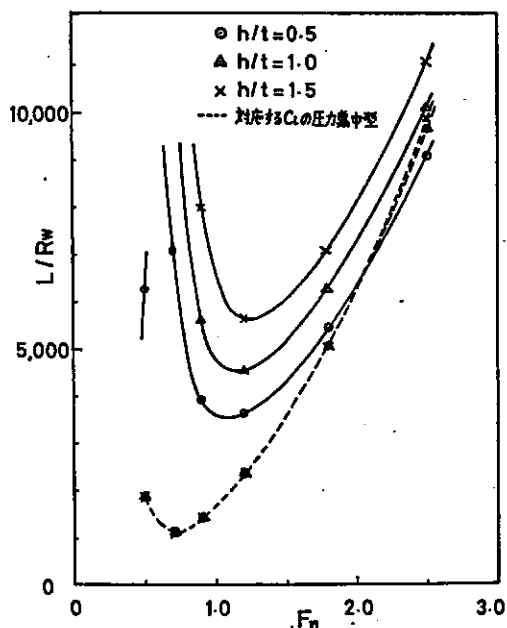


Fig. 4. 2. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.2$, $\alpha=6^\circ$).

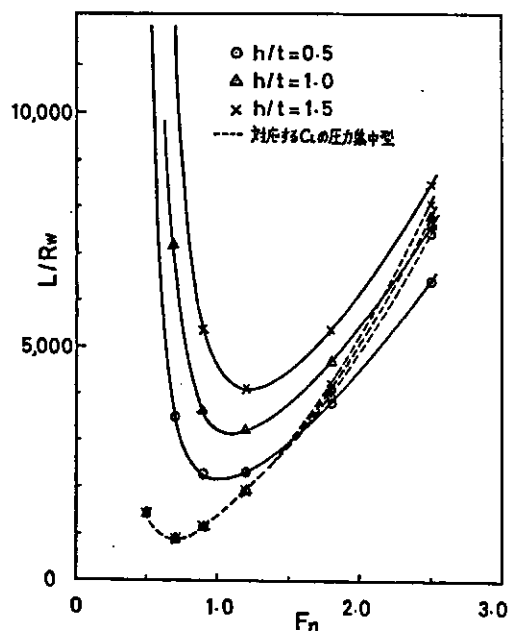


Fig. 4. 3. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.2$, $\alpha=8^\circ$).

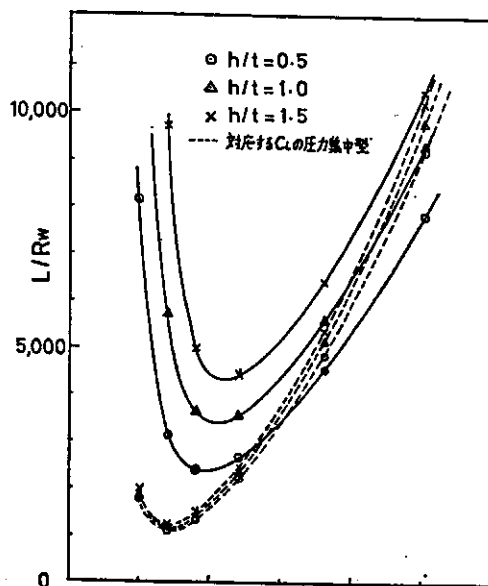


Fig. 5. 2. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.15$, $\alpha=6^\circ$).

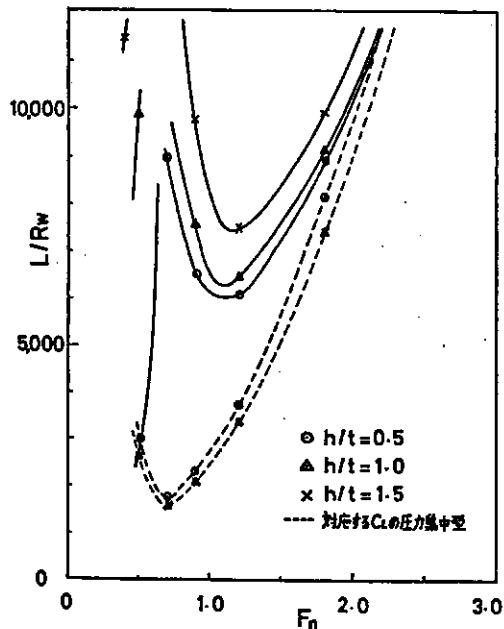


Fig. 5. 1. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.15$, $\alpha=4^\circ$).

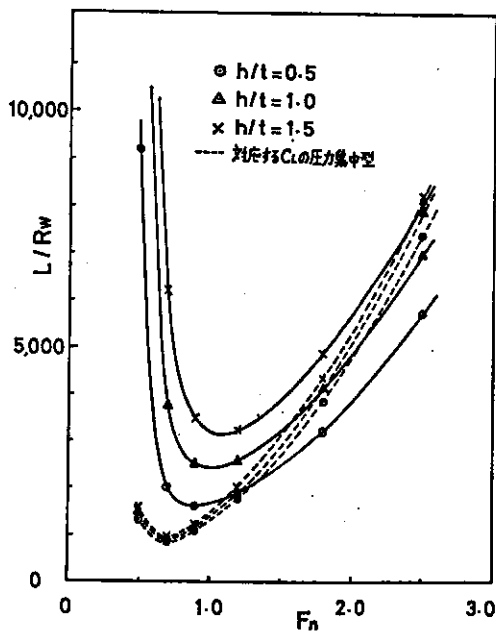


Fig. 5. 3. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.15$, $\alpha=8^\circ$).

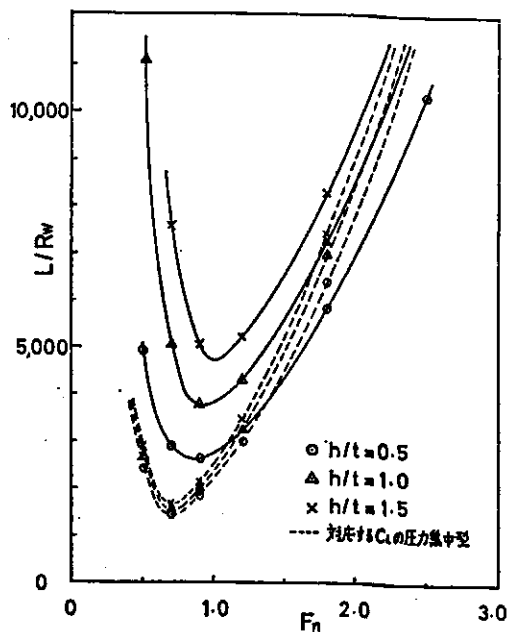


Fig. 6. 1. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.1$, $\alpha=4^\circ$).

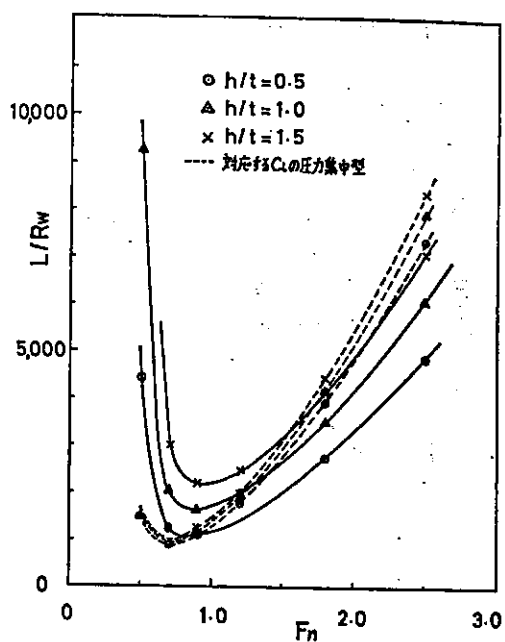


Fig. 6. 3. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.1$, $\alpha=8^\circ$).

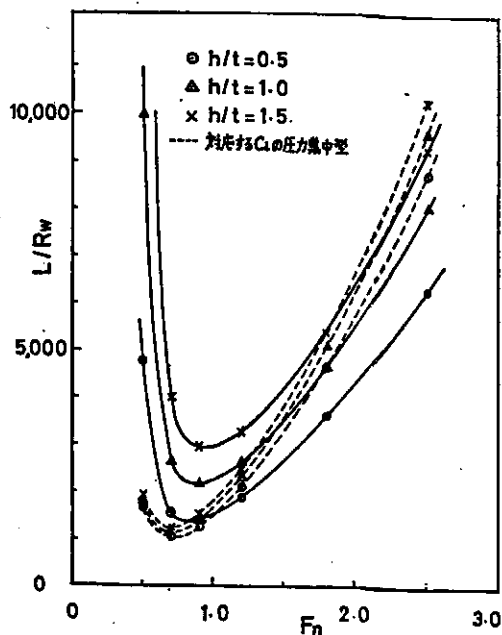


Fig. 6. 2. Calculated lift/wave drag ratios of a wing ($t/l=0.1$, $\alpha=6^\circ$).

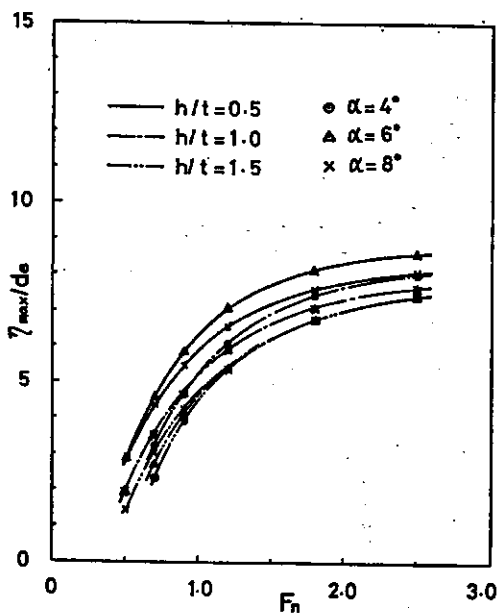


Fig. 7. Calculated maximum water surface depressions by a wing ($t/l=0.2$).

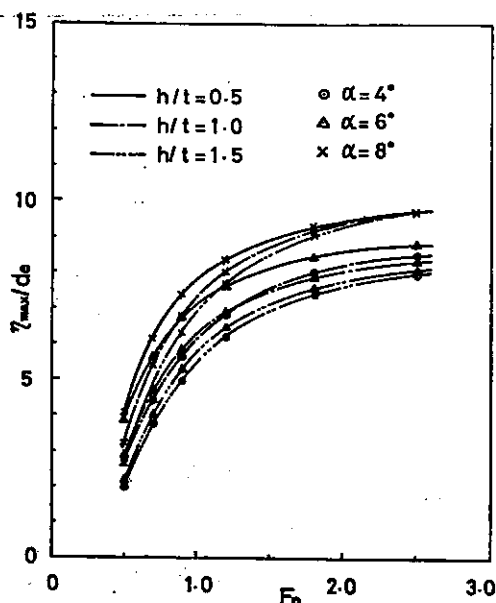


Fig. 8. Calculated maximum water surface depressions by a wing ($t/l=0.15$).

に矩形状に集中したモデルのものより高速では大きく、低速では小さく、そのメインハンプはより高速側に移るといえる。

さらに Fig. 7 から Fig. 9 に最大水面沈下量 η_{max} を等価喫水 $d_e (\frac{\rho_a}{\rho_w} C_l F_n^2)$ で割って無次元化したものを示す。

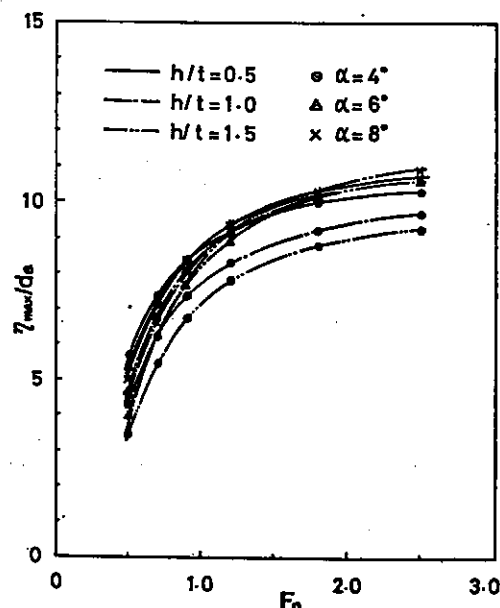


Fig. 9. Calculated maximum water surface depressions by a wing ($t/l=0.1$).

これらの図より造波抵抗の場合と同様に翼が厚い程、水面から遠い程、迎角が小さい程、単位揚力当りの水面沈下量は小さいと言える。しかしながらその差は割合小さくほとんど速度水頭に比例しており、フルード数が大きくなると非常に大きくなる。

また Fig. 10 には $t/l=0.15$, $h/t=0.5$, $\alpha=6^\circ$, $F_n=2.5$ の場合の長手方向の水面変位の計算例を示す。

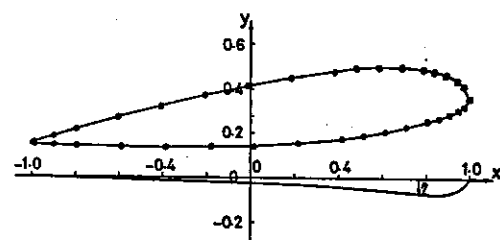


Fig. 10. An example of calculated water surface depressions ($t/l=0.15$, $h/t=0.5$, $\alpha=6^\circ$, $F_n=2.5$).

この場合無限後方の自由波の振幅は半弦長の 0.3% 位で図には表わせない程小さい。前方の水面変位も当然のことながら図には表わせない程小さくほとんど零に等しい。また低速の場合も急激に小さくなる。

なお、本計算には防衛庁技術研究本部の HITAC 8700 を使用した。

4. 結 論

水面上を走る翼の水面効果を調べるために、空気と水と両方の速度ポテンシャルを水面上で接続して、水面の変形を考えた空気及び水の速度ポテンシャルを求める式を導き、また水面変位及び造波抵抗等の式を誘導した。さらに 2 次元翼型について数値計算を実行して次の様な結論を得た。

1) 翼が特に水面近くない限り、空気の流れに関しては水面の変位は水と空気の大きな密度差のために小さくて、固体壁と見なせる事を理論的に確かめた。

2) 2 次元空中翼の単位揚力当りの造波抵抗は、翼が厚い程、水面から遠ざかる程、迎角が小さい程小さい。また、高速ではホバークラフトの様に圧力が集中したものの造波抵抗の方が空中翼のそれより小さくなる。

3) 単位揚力当りの水面変位は、翼が厚い程、水面から遠ざかる程、迎角が小さい程小さい。しかしながら、その差は割合小さくほとんど速度水頭に比例しており、フルード数が大きくなると非常に大きくなる。また自由波高は非常に小さいが、高速では翼の

下面では等価突水（排水容積/底面積）の数倍もへこむ。

4) 2次元断面まわりの流れを表わすのに断面境界上に連続的に循環を分布させるとその強さがその点での速度となり便利であるが、今回はより簡明な核関数を用いてその有用性を確かめた。

最後に今回は空中の流れの計算では近似的に水面を平らな固体壁と考えたが正確には水面の影響も入れた循環分布を求めなければならない。この事は水面条件の非線型性の問題と共に今後の課題としたい。

なお本報の終りに当り、本研究に御協力下さった第1研究所永井3部長はじめ関係諸氏に謝意を表するものであります。

参考文献

- 1) 友近 晋, 今井 功: "The Interference Effect of the Surface of the Sea on the Lift of a Seaplane" 東京帝国大学航空研究所報告, 第146号 (1937)
- 2) 石川明男: A C Vの基礎研究, 防衛大学校理工学研究科卒業論文 (1976)
- 3) I. Gibson and R. Lewis: "Ducted Propeller Analysis by Surface Vorticity and Actuator Disc Theory" Proc. of Symposium on Ducted Propellers, R.I.N.A. (1973)
- 4) W. Frank: "Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of deep Fluids" AD 668338 (1967)
- 5) D. H. Wilkinson: "A Numerical Solution of the Analysis and Design Problems for the Flow Past one or more Aerofoils or Cascades" R & M No. 3545 (1967)
- 6) 丸尾 孟: 滑走艇の流体力学的研究 (第1報), 造船協会論文集, 第91号 (1956)
- 7) 谷 一郎: 翼の地面効果について, 日本航空学会誌, 第4巻, 第26号 (1937)
- 8) N. Hogben: "Hovering Craft over Water" Advances in Hydrosience, Vol. 4, Academic Press (1967)

付録A 3次元単位吹出しによる水面効果

ここでは Fig. 1 に示す様に座標系を定める。
先ず水についての線型水面条件は

$$U\phi_z^w(x, 0, z) + g\eta(x, z) = -\frac{1}{\rho_w} p(x, z) \dots (A-1)$$

及び

$$\phi_z^w(x, 0, z) = U\eta_z(x, z) \dots (A-2)$$

ここに下添字 x, y は偏微分をとる事を意味するものとする (以下同様)。

(A-1) 及び (A-2) より η を消去すると,

$$\phi_{xz}^w(x, 0, z) + x_0 \phi_z^w(x, 0, z) = -\frac{p_z(x, z)}{\rho_w U} \dots (A-3)$$

一方空気については空気の静浮力は無視し得るだろうから水面の圧力は次式で与えられる。

$$V\phi_z^a(x, y, z) = -\frac{1}{\rho_a} p(x, y, z) \dots (A-4)$$

ここで非圧縮性とみなし線型化すると圧力 p は次式で与えられる。

$$V\phi_z^a(x, 0, z) = -\frac{1}{\rho_a} p(x, z) \dots (A-5)$$

また水面では水に接して流れると仮定すると

$$\phi_z^a(x, 0, z) = V\eta_z(x, z) \dots (A-6)$$

ところで水面に働く圧力が与えられると水の水速度ポテンシャル及び水面変位は次の様に表わせる。

$$\phi^w(x, y, z) = \frac{1}{\rho_w U} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} p(x', z') S^w(x-x', y, z-z') dx' dz' \quad \text{for } y \leq 0 \dots (A-7)$$

$$\eta(x, z) = \frac{1}{\rho_w U^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} p(x', z') S_z^w(x-x', 0, z-z') dx' dz' \dots (A-8)$$

ここに

$$S^w(x, y, z) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{kx + ik\tilde{w}} k \cos \theta}{k \cos^2 \theta - x_0 + \mu i \cos \theta} dk \dots (A-9)$$

$$S_z^w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{kx + ik\tilde{w}} k}{k \cos^2 \theta - x_0 + \mu i \cos \theta} dk \dots (A-10)$$

さてコッチン関数 $H(k, \theta)$

$$H(k, \theta) = \frac{1}{\rho_w U^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} p(x, z) e^{-ik\tilde{w}} dx dz \dots (A-11)$$

を導入すれば, (A-7) 及び (A-8) は

$$\phi^w(x, y, z) = \frac{U i}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{H(k, \theta) e^{kx + ik\tilde{w}} k \cos \theta}{k \cos^2 \theta - x_0 + \mu i \cos \theta} dk \quad \text{for } y \leq 0 \dots (A-12)$$

$$\eta(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{H(k, \theta) e^{ik\tilde{w}} k}{k \cos^2 \theta - x_0 + \mu i \cos \theta} dk \dots (A-13)$$

ここで十分後流($x \rightarrow -\infty$)では特異点が $k = \kappa_0 \sec^2 \theta$ のみであるから

$$\eta(x, z) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{x_0}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} H(\kappa_0 \sec^2 \theta, \theta) e^{i\kappa_0 \tilde{w} \sec^2 \theta} \sec^4 \theta \operatorname{sgn}(\sec \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots (A-14)$$

またこの時の造波抵抗は

$$\begin{aligned} R_w &= -\int_R \int_r p(x, z) \eta_x(x, z) dx dz \\ &= \frac{\rho_w U^2}{4\pi^2 i} \int_R \int_r \frac{H(k, \theta) \bar{H}(k, \theta) k^2 \cos \theta dk d\theta}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} \\ &= \frac{\rho_w U^2}{\pi} \kappa_0 \int_0^{\pi} H(\kappa_0 \sec^2 \theta, \theta) \bar{H}(\kappa_0 \sec^2 \theta, \theta) \sec^4 \theta d\theta \quad \dots\dots\dots (A-15) \end{aligned}$$

として求まる。そこで水面変位及び造波抵抗を求めるためには空気の流れ速度ポテンシャルからコッチン関数を求めることが必要になるが、そのためには空中の単位吹出しについて求めておけば十分であるので以下それを求めてみよう。ここでは Suffix u は単位を表わす。

さて空中の Q 点 (x', y', z') に単位吹出しがあるとしよう。そしてそれによる空気の流れ速度ポテンシャルを $S^u(P, Q)$ として、 $P = (x, y, z)$ とすると

$$S^u(P, Q) = \frac{1}{4\pi r(P, Q)} + A(P, Q) \quad \dots\dots\dots (A-16)$$

と書ける。但し $A(P, Q)$ は空中で正則な調和関数であり、また $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ である。

そこで水面上で吹出しを積分表示すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(y-y') + i(k\tilde{w} - \tilde{w}')} dk \\ \text{for } y-y' < 0 \quad \dots\dots\dots (A-17) \end{aligned}$$

となる。今

$$\begin{aligned} A(P, Q) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F^u(k, \theta) e^{-ky + i\tilde{w}} dk \\ \text{for } y \geq 0 \quad \dots\dots\dots (A-18) \end{aligned}$$

と書けるとすると (A-16) より

$$\begin{aligned} S^u(P, Q) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} [e^{k(y-y') - i\tilde{w}'} \\ &\quad + F^u(k, \theta) e^{-ky}] e^{i\tilde{w}} dk \\ \text{for } y \geq 0 \quad \dots\dots\dots (A-19) \end{aligned}$$

さらに (A-6) 及び (A-5) を用いて

$$\begin{aligned} V\eta_x &= S_y^u|_{y=0} = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} [e^{-ky' - i\tilde{w}'} \\ &\quad - F^u(k, \theta)] k e^{i\tilde{w}} dk \quad \dots\dots\dots (A-20) \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} -\frac{p}{\rho_a V} &= S_z^u|_{y=0} = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} [e^{-ky' - i\tilde{w}'} \\ &\quad + F^u(k, \theta)] k \cos \theta e^{i\tilde{w}} dk \quad \dots\dots\dots (A-21) \end{aligned}$$

ここで (A-13) を x で微分し (A-20) と比べると

$$\begin{aligned} e^{-ky' - i\tilde{w}'} - F^u(k, \theta) &= 2iV \frac{H^u(k, \theta) k \cos \theta}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} \\ \dots\dots\dots (A-22) \end{aligned}$$

また (A-21) の両辺を 2 重フーリエ変換して

$$\begin{aligned} \rho_w U^2 H^u(k, \theta) &\equiv \int_R \int_r p(x, z) e^{-i\tilde{w}} dx dz \\ &= -\frac{i\rho_a V}{2} [e^{-ky' - i\tilde{w}'} + F^u(k, \theta)] \cos \theta \\ \dots\dots\dots (A-23) \end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned} e^{-ky' - i\tilde{w}'} + F^u(k, \theta) &= \frac{2i\rho_w U^2}{\rho_a V \cos \theta} H^u(k, \theta) \\ \dots\dots\dots (A-24) \end{aligned}$$

ここで (A-22) と (A-24) を加えて $F^u(k, \theta)$ を消去すると空中の単位吹出しによるコッチン関数 $H^u(k, \theta)$ は

$$\begin{aligned} iVH^u(k, \theta) &= \frac{e^{-ky' - i\tilde{w}'} \cos \theta}{\frac{\rho_w U^2}{\rho_a V^2} + \frac{k \cos^2 \theta}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta}} \\ &= \frac{\rho_a V^2 (k \cos^2 \theta - \kappa_0) e^{-ky' - i\tilde{w}'} \cos \theta}{\rho_w U^2 (k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta) + \rho_a V^2 k \cos^2 \theta} \\ \dots\dots\dots (A-25) \end{aligned}$$

また (A-24) より (A-22) を引くと

$$\begin{aligned} F^u(k, \theta) &= e^{-ky' - i\tilde{w}'} \\ &\quad \frac{\rho_w U^2 (k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta) - \rho_a V^2 k \cos^2 \theta}{\rho_w U^2 (k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta) + \rho_a V^2 k \cos^2 \theta} \\ \dots\dots\dots (A-26) \end{aligned}$$

結局 (A-26) を用いて $S^u(P, Q)$ は

$$S^a(P, Q) = \frac{1}{4\pi r(P, Q)} + \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F^a(k, \theta) e^{-ky - ik\tilde{y}} dk$$

for $y, y' \geq 0$ (A-27)

これらが求める結果である。

さて一般に $\rho_w U^2 \gg \rho_a V^2$ であるから (A-27) を書換えて、

$$S^a(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(P, Q)} + \frac{1}{r(P, Q)} \right] - \frac{\rho_a V^2}{4\pi^2 \rho_w U^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y') + ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} k \cos^2 \theta}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} dk$$

..... (A-28)

$$\doteq \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(P, Q)} + \frac{1}{r(P, Q)} \right] \text{ (A-29)}$$

但し $\bar{Q} \equiv (x', -y', z')$

となり、実質的には空気と水の密度の違いにより正鏡像ポテンシャルを考えれば良いと考えられる。ちなみに $\rho_a/\rho_w \doteq 1/850$ である。

またこの時のコッチン関数は (A-25) より

$$H^u(k, \theta) \doteq \frac{\rho_a V}{i \rho_w U^2} e^{-ky' - ik\tilde{y}'} \cos \theta \text{ (A-30)}$$

となり、(A-13) 及び (A-15) を用いて水面変位及び造波抵抗が計算出来る。

また高速の場合 κ_0 は小さい量と見ることが出来るから (A-28) の右边第3項について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y') + ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} k \cos^2 \theta}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} dk \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky + ik\tilde{y}} dk}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} \\ & \xrightarrow{\kappa_0 \rightarrow 0} \frac{1}{r} \text{ (A-31)} \end{aligned}$$

となる。従って (A-28) は又次の様にも考えられる。

$$S^a(P, Q) \doteq \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(P, Q)} + \frac{1}{r(P, Q)} \right] - \frac{\rho_a V^2}{2\pi \rho_w U^2} \frac{1}{r(P, Q)} \text{ (A-32)}$$

しかしいずれにしても水面よりの影響を表わす第3項は小さい量と考えられる。

以上の式で一つの極限として、 $U=0$ の場合が考え

られるがこの時は水は運動しないで静的に水面が変位するだけで造波抵抗の様なものはない。

以上の議論は実は水面効果の模型実験の方法に関連がある。即ち曳引水槽で実験する際はフルード数を合せて、しかもその時の空気流速が臨界レーノルズ数を越えていなくてはならないと考えられる。そのためには非常に高速が必要とされる。従って風洞で静止した水面の上で実験するという様な事が出来れば都合が良い。しかし前述の結論から見ると固体壁上で実験すれば十分である。この際、固体壁は平らでも良いが、出来れば水面変位の形に変形させるとさらに良い事になる。ここで静止した水面上での実験が全く異なる事を再び強調しておく。

付録B 2次元単位循環による水面効果

ここでは付録Aの結果より2次元単位循環が空中にある時の水及び空気の複素速度ポテンシャルを求める。座標系は Fig. 1 のものから z 軸を除き2次元にしたものを用いる。そして x, y 平面を複素平面とする。

即ち

$$z = x + iy \text{ (B-1)}$$

また上につけた横棒で鏡像分、共役複素数を表わす。

さて3次元の空気の速度ポテンシャル $S^a(P, Q)$ は (A-28) の様に表わせるから2次元単位吹出しによる速度ポテンシャルは z 方向に積分してやれば良い。

その第1項について

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \frac{dZ}{\sqrt{x^2 + y^2 + Z^2}} = \lim_{z \rightarrow \infty} [\log(z + \sqrt{z^2 + \rho^2})] z_z \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sqrt{z^2 + \rho^2} + Z}{\sqrt{z^2 + \rho^2} - Z} \right) = 2 \log \rho^{-1} + 2 \lim_{z \rightarrow \infty} (\log 2Z) \\ &= 2 \log \rho^{-1} + \text{const} \text{ (B-2)} \end{aligned}$$

ここに $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

また第3項について Dirichlet の公式を用いて

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{ikz \sin \theta} d\theta dz \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\pi} g(\theta) \frac{\sin(kZ \sin \theta)}{k \sin \theta} d\theta \\ &= 2\pi [g(0) + g(\pi)] \text{ (B-3)} \end{aligned}$$

ここに

$$g(\theta) \doteq \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(\tilde{y}-\tilde{y}')} dk}{k \cos^2 \theta - \kappa_0 + \mu i \cos \theta} \text{ (B-4)}$$

よって 2次元 単位吹出しによる 速度 ポテンシャル S^a は,

$$S^a = \frac{\log\left(\frac{1}{\rho}\right) + \log\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)}{2\pi} - \frac{\rho_a V^2}{2\pi\rho_w U^2} \int_0^\infty \left(\frac{e^{ik(x-x')}}{k-x_0+\mu i} + \frac{e^{-ik(x-x')}}{k-x_0-\mu i} \right) e^{-k(y+y')} dk \quad \text{..... (B-5)}$$

ただし

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad \bar{\rho} = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

またさらに f_s^a を擾乱複素速度ポテンシャルとすると,

$$f_s^a = \frac{1}{2\pi} \log(z-z')(z-\bar{z}') - \frac{\rho_a V^2}{\pi\rho_w U^2} \int_0^\infty \frac{e^{ik(z-\bar{z}')}}{k-x_0+\mu i} dk \quad \text{..... (B-6)}$$

さてここで単位循環による速度ポテンシャルを求めるためにダブルットによるものに直し, 90° 向きを変えて積分する. 単位循環による複素速度ポテンシャルを f^a とすると

$$f^a = \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial y'} f_s^a dx' \quad \text{..... (B-7)}$$

さて第1項については

$$\int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial y'} \log(z-z') dx' = i \log(z-z') \quad \text{..... (B-8)}$$

同様に

$$\int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial y'} \log(z-\bar{z}') dx' = -i \log(z-\bar{z}') \quad \text{..... (B-9)}$$

また第2項については,

$$\int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial y'} e^{-ik\bar{z}'} dx' = -i \int_{-\infty}^x \frac{d}{d\bar{z}'} e^{-ik\bar{z}'} d\bar{z}' = -i e^{-ik\bar{z}'} \quad \text{..... (B-10)}$$

はよって単位循環による空気の複素速度ポテンシャル

$$f^a = \frac{i}{2\pi} \log\left(\frac{z-z'}{z-\bar{z}'}\right) - \frac{i\rho_a V^2}{\pi\rho_w U^2} \int_0^\infty \frac{e^{ik(z-\bar{z}')}}{k-x_0+\mu i} dk \quad \text{for } I_m(z-\bar{z}') > 0 \quad \text{..... (B-11)}$$

さらに

$$G^a(z, z') = Im(f^a) \quad \text{... (B-12)}$$

またコッチン関数は一般に (A-11) に対応して

$$H(k) = \frac{1}{\rho_w U^2} \int_{-\infty}^\infty p(x) e^{ikx} dx \quad \text{..... (B-13)}$$

で与えられ, 前述と同様な方法で単位循環によるものは次式で与えられる.

$$H^a(k) = \frac{\rho_a V}{\rho_w U^2} \frac{(k-x_0-\mu i) e^{ikx'}}{k - \left(x_0 - \frac{\rho_a V^2}{\rho_w U^2} i\right) - \mu i} \approx \frac{\rho_a V}{\rho_w U^2} e^{ikx'} \quad \text{..... (B-14)}$$