

一様媒質の無限領域における2次元弾性波 の放射散乱について

——山田金雄教授に捧ぐ——

別 所 正 利* 河 辺 寛**

(昭和57年4月28日 受付)

1. 序 論

無限に広い媒質中にある物体または空孔からの弾性波の放射散乱の問題は数値解析上の良い目標であり、従来有限要素法適用の好例として採り上げられ、また特に最近では、いわゆる境界要素法を適用した数値計算法による研究が多く報告されている。

著者等もまた境界要素法に興味を持ち、特に場の表現式および数値積分法について検討してきた。しかし、動的弾性問題の理論に関しては成書も少なく、また、まとまった記述はほとんど見られない。そこで、簡単のためにまず2次元問題について、無限媒質中の物体の振動防止、振動エネルギー吸収への応用に便利な概念および表現式を導入する。

まず物体境界上の応力および変位によって場を表現する式を導入し、境界積分方程式としては従来用いられている式の他に幾つかの表現を導き、境界値問題の種類によっては計算が簡単な式がある事を記す。次に物体を遠く離れた場所では円筒波が発散していく事から、遠場の性質はその振幅によって示される。それは水波理論ではコッチン関数と呼ばれているが、その表現式を導く。また、一方波長が十分長い時は静的弾性問題に一致するはずであるから、それを一般的に定式化して対応を調べる。次に相反定理と変分原理について言及し、その応用として水波理論でよく知られたハスキントの関係について述べる。相反定理およびハスキントの関係は Tan¹³⁾、Mei¹⁹⁾ 等によって導入されているが、ここに示すようにコッチン関数を導入することによって物体近傍の場との関係がより明確になる。さらに、放射エネルギーの表現式を求め、また変位等の複素共役値との関係（本論は周波数領域で論じているので、ある量の複素共役値は時間を逆にした時の値と考えてもよい）を求める。

以上のような準備の下に、物体または空孔が平面波を受けて振動する問題を解く方針を示し、特に円境界について計算例を示す。そして特に物体または空孔が波を吸収する場合を想定し、アンテナ理論に準拠して波エネルギー吸収能力について考察する。そのためには放射指向性利得を求める必要があるが、それは前出のコッチン関数から導かれる。

これらの検討はアンテナ理論、水波理論とおおむね相似な結論を示すであろう。

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

** 防衛大学校 機械工学教室 助手

2. 理 論

2.1 場の方程式と境界条件^{1), 5)}

現象はすべて円周波数で周期的である場合のみを考えることとし、すべての量を時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示するものとする。

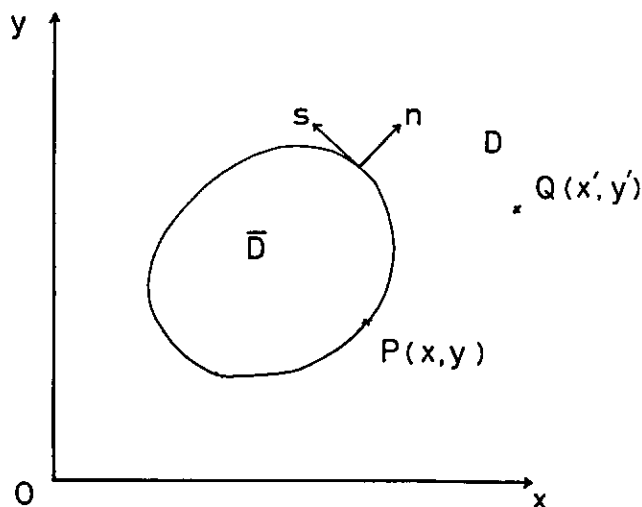


Fig. 1 Co-ordinate system

座標系を Fig. 1 のようにとると、変位 $u_i (i=1, 2)$ の満たすべき微分方程式は Δ をラプラシアンとして、

$$(\Delta + k^2)u_i + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2 \quad (1.1)$$

ここに

$$\gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

$$k^2 = \rho \omega^2 / G, \quad \alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.3)$$

ρ は密度、 G は横弾性係数、 k は横波の波数である。 ν は平面応力問題とした時のポアソン比であるが、今はいわゆる平面歪問題と考えられるので、ポアソン比 σ に対して

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (1.4)$$

となっている。

さて、回転 ω (円周波数と同じ字を使うが混同の恐れはないであろう)

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (1.5)$$

を導入し、(1.1) に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K^2)\gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2)\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2} k^2 \quad (1.7)$$

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

となって、 γ と ω は共にヘルムホルツの方程式を満たしている。 K は縦波の波数である。

いま γ と ω がわかっているとすると、(1.1), (1.2), (1.5) からは変位は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ u_2 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

一方、応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

であって、境界曲線 C に沿って働く力の (x, y) 成分 (t_1, t_2) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_1}{G} \equiv \tau_1 &= \frac{1}{G} \left(\sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{t_2}{G} \equiv \tau_2 &= \frac{1}{G} \left(\tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_x \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial y}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

となる。(1.8), (1.10) を法線、切線成分で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \\ u_s &= u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + u_2 \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{k^2}{K^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_n \\ \tau_s &= \omega + 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_s \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

となる。ただし、 $\rho = ds/d\theta$ で C の曲率半径とする。(密度と同じ字を使うが混同の恐れはないであらう。)

我々は無限に広い媒質中で境界曲線 C を持つ物体もしくは空孔の入射波による振動を知りたいわけであるが、これを2つに分けて考えることができる。

i) 放射問題 C が与えられた変位 (u_n, u_s) で振動して波を放射する問題である。

ii) 散乱問題 入射波が物体によって散乱させられる問題であるが、これは物体の弾性によって全く解が異ってくる。例えば剛体である場合と空孔である場合は大変様子が違う。この場合 C が変形(ここで言う変形とは剛体運動(rotation, translation)およびい

わゆる変形(deformation)を全て含んでいる。)しないとすると入射波は境界にある力を及ぼすから、物体が固定された剛体でないかぎりその力と平衡するまで物体は変形する。

C の任意の変形によって境界に働く力は放射問題の解と物体の性質から求められるから (空孔の場合は内部の力は 0), この力と C が変形しない時に入射波から受ける力とを等置すればよい。

このように考えてみると, C の変形を求めることはこの物体の運動方程式を解くことであるから, 直接境界値問題には関係ない。それ故境界値問題としては, C が変形しない時の入射波による散乱問題が解けていればよい。この問題も散乱場については C 上で入射波による変位を打ち消さねばならないから, 境界条件としては i) と同じく C 上で変位の与えられる問題である。空孔の場合は上述のように考えてもよいが, 初めから C 上で境界力が 0 となる条件を与える従来の方法が簡単であるのは言うまでもない。

2.2 変位, 横波, 縦波の表現と境界積分方程式

付録 A の核関数を使ってグリーンの定理を適用すると, 次のような表現を得る。

$$u_j(Q) = \sum_{i=1}^2 \int_C [u_i(P) \tau_{ij}(P, Q) - \tau_i(P) U_{ij}(P, Q)] ds \quad (2.1)$$

ここに P は境界上の点, Q は物体内の点を意味し, $\tau_{ij}(P, Q)$, $U_{ij}(P, Q)$ はそれぞれ境界上の変位, 境界力が Q 点の変位に与える影響関数である。

以下 i に関する総和記号を省略する。

いま C の内部領域で正則な変位 $u_j^{(a)}$ を考えると, Q 点が外部領域にあれば

$$0 = \int_C [u_i^{(a)}(P) \tau_{ij}(P, Q) - \tau_i^{(a)}(P) U_{ij}(P, Q)] ds \quad (2.2)$$

(1.1) と (1.2) を辺々加え合わせると,

$$u_j(Q) = \int_C [\{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} \tau_{ij}(P, Q) - \{\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P)\} U_{ij}(P, Q)] ds$$

となるが, 特にもし

$$\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C \quad (2.3)$$

ならば,

$$u_j(Q) = \int_C \{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} \tau_{ij}(P, Q) ds \quad (2.4)$$

また,

$$u_i(P) + u_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C \quad (2.5)$$

ならば

$$u_j(Q) = - \int_C \{\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P)\} U_{ij}(P, Q) ds \quad (2.6)$$

となる。

C 内で正則な関数の例としては, 平面波などが考えられる。それ故, (2.4) の表現は空孔の散乱問題の境界積分方程式として適当であり, (2.6) は固定境界の時に適当である。しかし, いずれの場合もこれらの核関数は付録 A に見るように特異性が大変強く, その数値積分には細心の注意が必要である。

一方, (1.6), (1.7) から γ , ω にはよく知られた次の表現がある。

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \gamma(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.7)$$

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \omega(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \quad (2.8)$$

ここに $R = \overline{PQ}$, $H_0^{(2)}$ は第2種0次のハンケル関数。

実際, (1.2), (1.5), (1.8), (1.10) を使って (2.1) を導くことができるが, いまは省略する。

さて, (2.7), (2.8) 右辺第2項に (1.11) を代入して, 1部部分積分すると次の表現を得る。

$$\begin{aligned} \gamma(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \omega(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \\ & + K^2 \int_C u_n(P) H_0^{(2)}(KR) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \\ & + k^2 \int_C u_s(P) H_0^{(2)}(kR) ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

C 上で u_n, u_s が与えられる時はこれらはそのまま γ と ω を未知とする境界積分方程式になり, (2.1) に比して格段に特異性が弱く計算上の難点が少ないと考えられる。

入射波のある時はそれを γ_0, ω_0 とすると,

$$\left. \begin{aligned} \int_C \left[\gamma_0(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \gamma_0(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] ds &= 0 \\ \int_C \left[\omega_0(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \omega_0(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) \right] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

であるから, (2.7), (2.8) に加えて,

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial}{\partial n} \{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial}{\partial n} \{\omega(P) \right. \\ & \left. + \omega_0(P)\} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

再び (1.11) を代入すると, $u_n^{(0)}, u_s^{(0)}$ は γ_0, ω_0 による変位として (なお γ_0, ω_0 のどちらか一方のみの時は他方は0とおく),

$$\begin{aligned} \gamma(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right. \\ & \left. + K^2 \{u_n(P) + u_n^{(0)}(P)\} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right. \\ & \left. + k^2 \{u_s(P) + u_s^{(0)}(P)\} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。

固定境界では,

$$\begin{aligned} u_n(P) + u_n^{(0)}(P) &= 0 \\ u_s(P) + u_s^{(0)}(P) &= 0 \end{aligned} \quad \text{on } C \quad (2.16)$$

なので上式に代入し, $\gamma + \gamma_0 = \Gamma$, $\omega + \omega_0 = \Omega$ を未知関数とすると次の境界積分方程式を得る。

$$\Gamma(Q) - \gamma_0(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\Gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \Omega(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.17)$$

$$\Omega(Q) - \omega_0(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\Omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \Gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \quad (2.18)$$

空孔の場合は, γ_0, ω_0 による力を $\tau_n^{(0)}, \tau_s^{(0)}$ とすると,

$$\begin{aligned} T_n(P) &= \tau_n(P) + \tau_n^{(0)}(P) = 0 \\ T_s(P) &= \tau_s(P) + \tau_s^{(0)}(P) = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

であるから,

$$\begin{aligned} U_n(P) &= u_n(P) + u_n^{(0)}(P) \\ U_s(P) &= u_s(P) + u_s^{(0)}(P) \end{aligned} \quad (2.20)$$

とにおいて, (2.14), (2.15) に (1.12) を代入すると,

$$\begin{aligned} \tau_n(Q) + 2 \frac{\partial u_s(Q)}{\partial s} + \frac{2}{\rho} u_n(Q) \\ = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(KR) \right. \\ \left. + U_s(P) \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(KR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_s(Q) - 2 \frac{\partial u_n(Q)}{\partial s} + \frac{2}{\rho} u_s(Q) \\ = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n(P) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(kR) \right. \\ \left. + U_s(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

となって, U_n, U_s を未知関数とする境界微積分方程式を得る。

Banaugh 等⁷⁾は (2.17) におおむね等しい式を使って数値計算をしている。我々も (2.4), (2.6) 等による方法と, (2.10)~(2.18) による方法とを試みたが精度上は前者の方がすぐれていた²⁴⁾。なおこの際, 前述のようにこの方法では特異性が強いけれどそれは付録Aのように静的弾性論のものに一致するので, 核関数よりそれぞれに対応する静的弾性の部分を解析的に積分することによって, その特異性を評価する方法によった。

2.3 遠方の性質^{14), 16), 18), 19)}

円筒座標 (r, θ) を導入し, 十分半径の大きい円筒面で変位, 境界力を考えてみると (1.11), (1.12) より

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \longrightarrow -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ u_\theta &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{K^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \longrightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (r \longrightarrow \infty) \quad (3.1)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &\longrightarrow \frac{k^2}{K^2} \gamma \\ \tau_\theta &\longrightarrow \omega \end{aligned} \right\} \quad (r \longrightarrow \infty) \quad (3.2)$$

となるから十分遠方の変位等は γ, ω のそれがわかればよい。

その γ, ω は十分遠方では

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(kR) &\xrightarrow{r \gg 1} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp \left\{ -i \left(k r' - \frac{\pi}{4} \right) + i k \tilde{\omega}(\theta) \right\} \\ \tilde{\omega}(\theta) &= x \cos \theta' + y \sin \theta' \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

なる漸近展開があるから、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \int_C \left[\frac{\partial \gamma(P)}{\partial n} - \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= \int_C \left[\frac{\partial \omega(P)}{\partial n} - \omega(P) \frac{\partial}{\partial n} \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

なる関数（水波理論ではコッチン関数と呼ぶ）を導入すると

$$\left. \begin{aligned} \gamma(Q) &\doteq \frac{e^{-i K r'}}{2 \sqrt{2 \pi i K r'}} G(\theta') \\ \omega(Q) &\doteq \frac{e^{-i k r'}}{2 \sqrt{2 \pi i k r'}} F(\theta') \end{aligned} \right\} \quad \text{for } r' \gg 1 \quad (3.5)$$

それゆえ $G(\theta), F(\theta)$ がわかれば遠方の性質は定まる。(3.4) の表現は C 上で γ, ω が与えられるとは限らないので前節の終りのように少し変形しておいたほうが便利である。

まず (2.9), (2.10) から

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \omega(P) \frac{\partial}{\partial s} + K^2 u_n(P) \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= \int_C \left[-\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} - k^2 u_s(P) \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

散乱問題ではさらに簡単になって、固定境界の時 (2.17), (2.18) に対応して、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[\Gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \Omega(P) \frac{\partial}{\partial s} \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= - \int_C \left[\Omega(P) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{k^2}{K^2} \Gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

空孔の (2.21), (2.22) に対応して、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[U_n(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} \right. \\ &\quad \left. + U_s(P) \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} \right] ds \\ F(\theta') &= - \int_C \left[U_n(P) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} \right. \\ &\quad \left. + U_s(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。

なお一般に (3.6) に (1.11), (1.12) を代入し,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= iK e^{ik\tilde{z}(\theta')} \\ u_n^{(K)} &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial n}, \quad u_s^{(K)} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial s} \\ \tau_n^{(K)} &= \left(\frac{k^2}{K^2} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho K^2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \gamma_0 \\ \tau_s^{(K)} &= \left(-\frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho K^2} \right) \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= i k e^{ik\tilde{z}(\theta')} \\ u_n^{(k)} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s}, \quad u_s^{(k)} = -\frac{2}{k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \\ \tau_n^{(k)} &= \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s} \\ \tau_s^{(k)} &= \omega_0 + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

とおくと,

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_n u_n^{(K)} + \tau_s u_s^{(K)} - u_n \tau_n^{(K)} - u_s \tau_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= \frac{-k}{i} \int_C [\tau_n u_n^{(k)} + \tau_s u_s^{(k)} - u_n \tau_n^{(k)} - u_s \tau_s^{(k)}] ds \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

また, (2.12), (2.13) の表現をうる時と同様にして

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= i \frac{K^3}{k^2} \int_C [u_n T_n^{(K)} + u_s T_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= ik \int_C [u_n T_n^{(k)} + u_s T_s^{(k)}] ds \\ &\text{for } U_n^{(k,K)} = U_s^{(k,K)} = 0 \quad \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここに大文字は入射波と散乱波を含む諸量を示す。空孔による散乱波で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_n U_n^{(K)} + \tau_s U_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= \frac{k}{i} \int_C [\tau_n U_n^{(k)} + \tau_s U_s^{(k)}] ds \\ &\text{for } T_n^{(k,K)} = T_s^{(k,K)} = 0 \quad \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

となる。

2.4 長波近似

物体の寸法に比して波長が十分大きい時は,

$$(k, K \rightarrow 0)$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(kR) &\xrightarrow{kR \ll 1} \frac{2}{\pi i} \log \left(\frac{\gamma k R}{2} \right) \\ H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) &\xrightarrow{kR \ll 1} \frac{i(1+\nu)}{4\pi} k^2 R^2 \log R \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

なる近似式があるので, 核関数に入れて計算すると付録Aのように静力学の式に一致する。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の反射波について

それ故、波長が十分大きい時は静的弾性論によって導かれた変位変位、力を前節の F, G に代入して発散波振幅が近似的に求められる。

さて、 θ 方向から入射する単位振幅の縦波は、

$$\gamma_0 = iK e^{iK\tilde{\omega}(\theta)}$$

$$\tilde{\omega}(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$$

であるが原点近傍では、

$$u_1^{(0)} = \cos \theta e^{iK\tilde{\omega}(\theta)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \{1 - \frac{1}{2}K\tilde{\omega}(\theta)\} F \cos \theta$$

$$u_2^{(0)} = \sin \theta e^{iK\tilde{\omega}(\theta)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \{1 + \frac{1}{2}K\tilde{\omega}(\theta)\} F \sin \theta$$

$$\gamma \doteq iK, \quad \omega \doteq 0$$

$$\tau_1 \doteq iK \left[\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right] \quad (4.2)$$

$$\tau_2 \doteq iK \left[\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right]$$

横波についても同様に、

$$\omega_0 = iK e^{ik\tilde{\omega}(\theta)}$$

$$u_1^{(0)} \doteq -[1 + ik\tilde{\omega}(\theta)] \sin \theta$$

$$u_2^{(0)} \doteq [1 + ik\tilde{\omega}(\theta)] \cos \theta$$

$$\gamma \doteq 0, \quad \omega = ik$$

$$\tau_1 \doteq ik \left[\frac{\partial y}{\partial n} \cos \theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin \theta \right] \quad (4.3)$$

$$\tau_2 \doteq ik \left[\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right]$$

となる。

それ故 (3.11) により

$$G(\theta) \doteq \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta] ds$$

$$+ \frac{K^4}{k^2} \int_C \left[\tilde{\omega}(\theta) (\tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta) \right. \\ \left. - u_1 \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ \left. - u_2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] ds \quad (4.4)$$

$$F(\theta) \doteq \frac{k}{i} \int_C [-\tau_1 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta] ds$$

$$+ k^2 \int_C \left[\tilde{\omega}(\theta) (-\tau_1 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta) \right. \\ \left. - u_1 \left(\frac{\partial y}{\partial n} \cos 2\theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ \left. - u_2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right] ds$$

ここで特に C が x 軸に関して対称で、 τ も u も $\tilde{\omega}$ も対称性を持つとし

$$\left. \begin{aligned} \int \tau_2 ds &= \int x \tau_2 ds = \int y \tau_1 ds = 0 \\ \int u_1 \frac{\partial y}{\partial n} ds &= \int u_2 \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となっているとすると、上式は大分簡単になって、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C \tau_1 ds \\ &+ \frac{K^4}{k^2} \int_C \left[\tau_1 x \cos^2 \theta + \tau_2 y \sin^2 \theta - \frac{2}{1-\nu} u_1 \frac{\partial x}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - u_2 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C \tau_1 ds \\ &- k^2 \sin 2\theta \int_C \left[\frac{1}{2} (\tau_2 y - \tau_1 x) + u_1 \frac{\partial x}{\partial n} - u_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

それぞれの右辺第2項は第1項に比して (k, K に関し) 高次であるからさらに省略すると、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C \tau_1 ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C \tau_1 ds \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

となり右辺の積分は境界に働く x 方向の力であるからそれがわかれば近似的にコッチン関数が上のように与えられることを示す。

散乱問題では、まず x の正の方向から縦波が来る場合は (4.2) で $\theta=0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq 2G \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) iK \\ \sigma_y &\doteq 2G \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) iK \\ \tau_{xy} &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

のような2軸応力問題となり、横波では同じく (4.3) より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq \sigma_y \doteq 0 \\ \tau_{xy} &\doteq ikG \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

となって、一様せん断力による静的弾性問題になる。以下縦波の散乱を考えると、もし固定境界ならば (4.2) によって、

$$\int_C \tau_1^{(0)} ds = 0 \quad (4.10)$$

であるから (4.7) はまた次のようにも書ける。

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C T_1^{(d)} ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C T_1^{(d)} ds \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

ここに

$$T^{(d)} = \tau^{(0)} + \tau^{(d)}$$

となり、右辺の積分は波強制力の x 成分である。ハスキントの関係によりこれはまた、 C が x 方向に振動する時のコッチン関数で (6.7) のように与えられる。

一方空孔では、 $\tau^{(d)} = -\tau^{(0)}$ で (4.10) により (4.7) の項はすべて消えて、

$$G \doteq F \doteq 0 \quad (4.12)$$

で (4.4) に帰って右辺第項が残るが、この部分は $(\cos \theta, \sin \theta)$ の成分を含まず $(1, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ の成分である。

2.5 相反定理^{(13), (18)}と変分原理

領域 D 内で正則な2つの変位場 $u^{(1)}, u^{(2)}$ について次の積分を導入しよう。(Modified Lagrangean とよぶ)

$$L(u_1, u_2) = \frac{G}{2} \iint_D [k^2 u_j^{(1)} u_j^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)}] dx dy \quad (5.1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} Gk^2 &= \rho\omega^2 \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ij} &= 2e_{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \gamma \delta_{ij} \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \\ \gamma &= e_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

そうすると、明らかに次の相反性がある。

$$L(u^{(1)}, u^{(2)}) = L(u^{(2)}, u^{(1)}) \quad (5.3)$$

いま $u^{(1)}, u^{(2)}$ が D 内で弾性振動の微分方程式を満たすならば、部分積分により

$$\frac{2}{G} L(u^{(1)}, u^{(2)}) = \int_C u_j^{(1)} \tau_j^{(2)} ds \quad (5.4)$$

ここに

$$\tau_j = \sigma_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad (5.5)$$

(5.3) は次の形に表わされる。

$$\int_C u_j^{(1)} \tau_j^{(1)} ds = \int_C u_j^{(2)} \tau_j^{(1)} ds \quad (5.6)$$

これを以下では相反定理と呼ぼう。

この応用については次節に述べる事とし、ここでは境界値問題の変分原理についてのべる。

いま、 u が D 内で正則な弾性振動の方程式を満たす比較関数とし、境界 C 上で与えられた値 v となるような境界値問題は次の汎関数の極値問題と等価である。

$$I = \int_C u_j \tau_j ds - \int_C v_i \tau_i ds \quad (5.7)$$

実際変分をとると、

$$\delta I = \int_C (u_j - v_j) \delta \tau_j ds \quad (5.8)$$

となるから

$$u_j = v_j \quad \text{on } C \quad (5.9)$$

である。

C 上で境界力 τ が与えられても同じである。

2.6 可逆性とハスキントの関係¹⁹⁾

今物体が C_1, C_2 と 2 つあって、それぞれの振動によって $u^{(1)}, u^{(2)}$ なる振動が起るとし、境界条件はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(1)} &: \text{given on } C_1 \\ u_j^{(1)} &= 0 \quad \text{on } C_2 \\ u_j^{(2)} &= 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_j^{(2)} &: \text{given on } C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

とし相反定理を適用すると、

$$\int_{C_1} u_j^{(1)} \tau_j^{(2)} ds = \int_{C_2} u_j^{(2)} \tau_j^{(1)} ds \quad (6.2)$$

となる。これは可逆性を表わしていて、例えば、

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} &= 1, \quad u_2^{(1)} = 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_1^{(2)} &= 1, \quad u_2^{(2)} = 0 \quad \text{on } C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

つまり C_1, C_2 ともに x 軸に平行に振動しているとする、(6.2) から、

$$\int_{C_1} \tau_1^{(2)} ds = \int_{C_2} \tau_2^{(1)} ds \quad (6.4)$$

となって、 C_1 の振動によって C_2 に働く x 方向の力は、 C_2 の振動によって C_1 に働く x 方向の力に等しい事を意味する。

この可逆性は基本的な関係で、これから種々の可逆性を導く事ができるが、特に便利なのは散乱問題の場合である。

すなわち C_1 と C_2 が十分離れていればそれぞれ相手の振動は平面波として到着するので散乱問題となる。そこであらためて入射波の変位等を肩符 (0) で表わし、 $u^{(d)}$ を C による散乱場としよう。

境界条件は

$$u_j^{(d)} = -u_j^{(0)} \quad j=1, 2 \quad (6.5)$$

となるものとして、もう 1 つの放射場 u を考え (5.6) を適用すると、

$$\int_C u_j \tau_j^{(d)} ds = \int_C u_j^{(d)} \tau_j ds \quad (6.6)$$

となるが、(6.5) より

$$\int_C u_j \tau_j^{(d)} ds = - \int_C u_j^{(0)} \tau_j ds$$

それゆえ

$$\int_C u_j (\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = \int_C (u_j \tau_j^{(0)} - u_j^{(0)} \tau_j) ds$$

(3.11) によって、

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{array}{l} \text{縦波ならば} \\ \text{横波ならば} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_C u_j(\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = -\frac{ik^2}{K^3} G(\theta) \\ \int_C u_j(\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = -\frac{i}{k} F(\theta) \end{array} \quad (6.7)$$

特に u が C の剛体的運動の場合は左辺は波の強制力となり、水波理論ではハスキントの関係と呼ばれている²⁵⁾。今の場合、振動モードは無限にあり、左辺は一般力と考えられるのでやはり波の強制力は放射問題の G, F つまりコッチン関数によって与えられると言ってよく、この関係から振動振幅 u を決めるためには放射問題を解いておけばよく、散乱問題の解は必要としない。

この関係でも種々の変形が考えられるが、ここでは最後に空孔による散乱の場合を考えておこう。

境界条件は

$$\tau_j^{(d)} = -\tau_j^{(0)} \quad \text{on } C \quad (6.8)$$

(6.6) に代入して前と同様に (3.13) に等しく

$$\left. \begin{array}{l} \text{縦波} \\ \text{横波} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_C (u_j^{(0)} + u_j^{(d)}) \tau_j ds = -\frac{ik^2}{K^3} G(\theta) \\ \int_C (u_j^{(0)} + u_j^{(d)}) \tau_j ds = -\frac{i}{k} F(\theta) \end{array} \quad (6.9)$$

それ故今度は境界 C に τ_j を加えた強制振動の解によって境界の変位が表わされることになる。

2.7 エネルギー定理^{9), 17), 18), 19)}

C の線素を通して法線方向になす単位時間当りの仕事の時間平均は、

$$\frac{\omega G}{4i} [u_j \bar{\tau}_j - \bar{u}_j \tau_j] ds \quad (7.1)$$

上棒は複素共役値とする。

これは電磁波理論で Poynting Vector と呼ばれる。それ故 C の単位時間になす仕事 (以下動力と呼ぶ)

$$W = \frac{\omega G}{4i} \int_C [u_j \bar{\tau}_j - \bar{u}_j \tau_j] ds \quad (7.2)$$

一方 (5.1) をまねて一般に2つの場を肩符 (1), (2) で表わせば、

$$\frac{2}{G} L(u^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) = \iint_D [k^2 u_j^{(1)} \bar{u}_j^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \bar{o}_{ij}^{(2)}] dx dy \quad (7.3)$$

を導入して部分積分すると境界積分に変形できるが、今度は無限遠方の積分が消えないので今それを半径の充分大きい円周 R にとる事としよう。

そうすると、

$$\int_C [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds = \int_R [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds \quad (7.4)$$

R 上の積分は (3.1), (3.2), (3.5) によって

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \frac{\omega G}{4i} \int_C [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds \\ &= \frac{\rho \omega^3}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{G^{(1)}(\theta) \bar{G}^{(2)}(\theta)}{K^4} + \frac{F^{(1)}(\theta) \bar{F}^{(2)}(\theta)}{k^4} \right] ds \end{aligned} \quad (7.5)$$

を得る。

一方、単位振幅の平面入射波が進行方向に直角な単位面積当りに運ぶ動力は、縦波では

$$\begin{aligned}\gamma &= iK e^{iKz} \\ u &= e^{iKz}, \quad v=0 \\ \tau_x &= i \frac{k^2}{K} e^{iKz}, \quad \tau=0\end{aligned}$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} E_K &= \frac{\rho \omega^3}{2K} = \frac{\omega G}{2K} k^2 \\ E_k &= \frac{\rho \omega^3}{2k} = \frac{\omega G k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

同様に横波では

これで (7.5) を割ると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{E_k} &= \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \\ \frac{W}{E_K} &= \frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

2.8 逆時間運動¹⁵⁾

いまある放射問題の解 u に対してその複素共役値 $\bar{u}$ を考えると、これは時間を逆にした運動の解と考えてもよいから、それを逆時間運動と呼ぼう。そして C 上で

$$u_j = \bar{u}_j \quad (8.1)$$

のような関係があるとしておこう。

無限遠方では u は発散波を持ち、 $\bar{u}$ は収束波を持っているが、これは各方向からの入射平面波の集まりと考える事ができる。

r について考えると (3.5) 又は (2.7) を参照して、

$$\gamma(P) \rightarrow \frac{1}{4\pi i} \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} e^{-iK(x \cos(\theta-\theta') + y \sin(\theta-\theta'))} G(\theta') d\theta' \quad (\epsilon \ll 1) \quad (8.2)$$

と書くことができるから、単位振幅の θ' 方向から来る入射波

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(P, \theta') &= iK e^{iK\bar{u}(\theta-\theta')} \\ \omega_0(P, \theta') &= ike^{ik\bar{u}(\theta-\theta')} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

の散乱波、 γ_d , ω_d と合わせて

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(P, \theta') &= \gamma_0(P, \theta') + \gamma_d(P, \theta') \\ \Omega(P, \theta') &= \omega_0(P, \theta') + \omega_d(P, \theta') \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

とおくと、 Γ, Ω による C 上の変位は 0 となる。

そこで、

$$\left. \begin{aligned} \overline{\gamma(P)} - \gamma(P) + \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ \overline{\omega(P)} - \omega(P) + \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \Omega(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

を考えると、これらによる C 上の変位は (8.1) と散乱場の定義より 0 である。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

ここで解の唯一性を考慮すれば、上式は恒等的に0とならねばならないから、

$$\left. \begin{aligned} \gamma(P) - \overline{\gamma(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ \omega(P) - \overline{\omega(P)} &= \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \Omega(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

となり、これから変位等も計算できる。

すなわち、

$$\begin{aligned} u_j(P) - \overline{u_j(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} U_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} U_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここに $U_j^{(K)}, U_j^{(k)}$ はそれぞれ縦横の単位振幅波による変位とする。

それ故

$$\begin{aligned} \tau_j(P) - \overline{\tau_j(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} T_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} T_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \quad (8.8)$$

次に散乱ポテンシャルでは (8.1) が成立たないで、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\theta) &= iK e^{iK\pi(\theta)}, \quad \omega_0(\theta) = ik e^{ik\pi(\theta)} \\ \overline{\gamma_0(\theta+\pi)} &= -\gamma_0(\theta), \quad \overline{\omega_0(\theta+\pi)} = -\omega_0(\theta) \\ \overline{u_j^{(0)}(\theta+\pi)} &= -u_j^{(0)}(\theta) \\ \overline{\tau_j^{(0)}(\theta+\pi)} &= -\tau_j^{(0)}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

等の関係があるから、

$$\overline{u_j^{(d)}(\theta)} + u_j^{(d)}(\theta+\pi) = 0 \quad \text{on } C \quad (8.10)$$

となるので、前同様にして

$$\begin{aligned} \overline{\tau_j^{(d)}(P, \theta)} + \tau_j^{(d)}(P, \theta+\pi) &= T_j^{(d)}(P, \theta) + T_j^{(d)}(P, \theta+\pi) \\ &= -\frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} T_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G^{(d)}(\theta', \theta)} d\theta' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} T_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F^{(d)}(\theta', \theta)} d\theta' \end{aligned} \quad (8.11)$$

2.9 運動方程式^{8), 10)}, 指向性利得^{3), 25)}

物体に平面波が当たって境界 C が変形する問題を考えて見よう。

2.1 節の終わりに述べたように、これはまず C が変形しないとして散乱問題を解き波の強制力を求める。それを $GT_j^{(d)}$ とするとこれは実はハスキントの関係 (6.7) により必ずしも散乱問題を解かないまでも、その変形モードの放射問題の入射波方向のコッチン関係がわかればよい。

一方このモードでの放射問題を解くと境界力がわかるからこれを次のように書こう。

$$Gr_j^{(out)} = -Z_{out}(i\omega u_j) \quad (9.1)$$

この Z_{out} はインピーダンス (外部系の) である。これは一般にはマトリックスである。

同様にして物体を u_j だけ変位させる時の力は

$$Gr_j^{(in)} = -Z_{in}(i\omega u_j) \quad (9.2)$$

と書くことができよう。

それ故、平衡方程式は

$$G(T_j^{(d)} + \tau_j^{(\text{out})} + \tau_j^{(\text{in})}) = 0$$

すなわち、

$$i\omega(Z_{\text{out}} + Z_{\text{in}})u_j = T_j^{(d)} \quad (9.3)$$

これが変位を定める式である。

これらの関係はかなり複雑であるので、例えば物体自身の固有振動のモードに分解して考えれば簡単になろう。今は簡単のために、ある1つのモードの振動のみがある場合を考えよう。そのモードを u_j とし、振動速度振幅は Iu_j となるものとする。

$$G \int_C \tau_j^{(\text{out})} u_j ds = -i\omega Z^{(\text{out})} \quad (9.4)$$

横波が入射する場合を考えて、

$$\int_C T_j^{(d)} u_j ds = \frac{1}{ik} F(\theta) \quad (9.5)$$

それ故

$$-I(Z^{(\text{out})} + Z^{(\text{in})}) = \frac{G}{ik} F(\theta) \quad (9.6)$$

$$\therefore I = \frac{\frac{iG}{k} F(\theta)}{Z^{(\text{out})} + Z^{(\text{in})}} \quad (9.7)$$

所で (9.4) の定義で u_j を実数値と定義すると、

$$\begin{aligned} R_e[Z^{(\text{out})}] &= R = \frac{iG}{\omega} \int_C \tau_j u_j ds \\ &= \frac{iG}{2\omega} \int_C [\tau_j \bar{u}_j - \bar{\tau}_j u_j] ds \end{aligned} \quad (9.8)$$

となる故、(7.5) より

$$R = \frac{\rho\omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \quad (9.9)$$

物体が波から受けとる動力は

$$-\frac{G}{4k} [I\bar{F}(\bar{\theta}) + \bar{I}F(\theta)] \quad (9.10)$$

で与えられるが、これが最大となるのは (9.7) によって

$$Z^{(\text{out})} = \bar{Z}^{(\text{in})} \quad (9.11)$$

な時であり、この時物体が吸収する動力は、

$$W_a = \frac{G^2 |F(\theta)|^2}{8k^2 R} = \frac{\rho^2 \omega^4}{8k^6} \frac{|F(\theta)|^2}{R} \quad (9.12)$$

したがって、

$$A_{ab} = \frac{W_a}{E_k} = \frac{\rho\omega |F(\theta)|^2}{4k^5 R} = \frac{\frac{|F(\theta)|^2}{k^4}}{\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \quad (9.13)$$

なる量を定義すると、 A_{ab} は最大波動力吸収断面積である。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

一方 (9.9) は u_i の振動による発散波の持ち去る動力であるから、その放射指向性利得 $G_i(\theta)$ は、

$$G_i(\theta) = G_i^{(K)}(\theta) + G_i^{(k)}(\theta) \quad (9.14)$$

$$\left. \begin{aligned} G_i^{(k)}(\theta) &= \frac{\frac{|F(\theta)|^2}{k^4}}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \\ G_i^{(K)}(\theta) &= \frac{\frac{|G(\theta)|^2}{K^4}}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

となる。これを使うと (9.13) は

$$A_{ab}^{(k)} = \frac{1}{k} G_i^{(k)}(\theta) \quad (9.16)$$

と整理することができる。

同様にして縦波を受ける時は次式となる。

$$A_{ab}^{(K)} = \frac{1}{K} G_i^{(K)}(\theta) \quad (9.17)$$

2.10 散乱断面積^{9), 16), 18), 19)}

入射波を受けて物体が波を散乱させている時、散乱波の持ち去る動力 W_s が入射波のどれだけの断面積が運ぶ動力に相当するかを示す量を散乱断面積 A_s と呼ぶ。

(7.5) によって (和記号を省略して)

$$W_s = \frac{\rho\omega^3}{4ik^2} \int_C [(\bar{u} + \bar{u}^{(d)})(\bar{\tau} + \bar{\tau}^{(d)}) - (\bar{u} + \bar{u}^{(d)})(\bar{\tau} + \bar{\tau}^{(d)})] ds \quad (10.1)$$

(2.7.7) より

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= \frac{W_s}{E_k} = \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta) + G^{(d)}(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta) + F^{(d)}(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \\ A_s^{(K)} &= \frac{W_s}{E_K} = \frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta) + G^{(d)}(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta) + F^{(d)}(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

特に放射分 u, τ が無い時はまず固定境界では、

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{(k)} &= \frac{W_{ss}}{E_k} = \frac{1}{2ik} \int_C [u^{(d)} \bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)} \tau^{(d)}] ds \\ A_{ss}^{(K)} &= \frac{W_{ss}}{E_K} = \frac{K}{2ik^2} \int_C [u^{(d)} \bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)} \tau^{(d)}] ds \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

となるが、

$$\begin{aligned} \overline{u^{(d)}(\theta)} &= -\bar{u}^{(0)} = \bar{u}^{(0)}(\theta + \pi) \\ -u^{(0)}(\theta + \pi) \tau^{(0)}(\theta) &= \overline{u^{(0)}(\theta) \tau^{(0)}(\theta + \pi)} \\ &= \overline{u^{(0)}(\theta + \pi) \tau^{(0)}(\theta)} \end{aligned}$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{(k)} &= \frac{1}{2ik} \int_C [\overline{u^{(0)}(\theta+\pi)T^{(d)}(\theta)} - u^{(0)}(\theta+\pi)T^{(d)}(\theta)] ds \\ &= -\frac{1}{2k^2} \{F^{(d)}(\theta; \theta+\pi) + \overline{F^{(d)}(\theta; \theta+\pi)}\} \\ A_{ss}^{(K)} &= -\frac{k^2}{K^4} \{G^{(d)}(\theta; \theta+\pi) + \overline{G^{(d)}(\theta; \theta+\pi)}\} \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

空孔散乱の場合も同様にして符号だけ異なる式を得る。

一般の場合に戻って考えて (10.1), (10.2) を3つの部分に別けて考えよう。

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= \text{I} + \text{II} + \text{III} \\ \text{III} &= A_{ss}^{(k)} \\ \text{I} &= \frac{1}{2ik} \int_C (u\bar{\tau} - \bar{\tau}u) ds \\ \text{II} &= \frac{1}{2ik} \int_C (u^{(d)}\bar{\tau} + u\bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)}\tau - \bar{u}\tau^{(d)}) ds \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

運動方程式は波パワの吸収がなければ,

$$\tau = -T^{(d)} \quad (10.6)$$

であるから, I の右辺に代入すると,

$$\text{I} = \frac{i}{2k} \int_C [u\bar{T}^{(d)} - \bar{u}T^{(d)}] ds$$

となるから, (横波入射を考えているから)

$$F^*(\theta) = ik \int_C \bar{u}T^{(d)} ds \quad (10.7)$$

のようなコッチン関数を導入すれば,

$$\text{I} = \frac{1}{2k^2} \{F^*(\theta) + \overline{F^*(\theta)}\} \quad (10.8)$$

II については,

$$\begin{aligned} &u^{(d)}\bar{\tau} + u\bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)}\tau - \bar{u}\tau^{(d)} \\ &= \overline{u^{(0)}(\theta+\pi)}\bar{\tau} + u\cdot\overline{T^{(d)}(\theta)} - \overline{u\tau^{(0)}(\theta)} - u^{(0)}(\theta+\pi)\tau \\ &= \overline{uT^{(d)}(\theta)} - uT^{(d)}(\theta) + \overline{\tau u^{(0)}(\theta+\pi)} - \overline{u\tau^{(0)}(\theta+\pi)} \\ &\quad + u\tau^{(0)}(\theta+\pi) - \tau u^{(0)}(\theta+\pi) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \text{I} + \text{II} &= \frac{1}{2ik} \int_C [u\tau^{(0)}(\theta+\pi) - \tau u^{(0)}(\theta+\pi) - \overline{u\tau^{(0)}(\theta+\pi)} - \overline{\tau u^{(0)}(\theta+\pi)}] ds \\ &= \frac{-1}{2k^2} \{F(\theta+\pi) + \overline{F(\theta+\pi)}\} \end{aligned} \quad (10.9)$$

(10.4) と合わせて,

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= -\frac{1}{k^2} R_* [F^{(d)}(\theta; \theta+\pi) + F(\theta; \theta+\pi)] \\ A_s^{(K)} &= -\frac{k^2}{K^4} R_* [G^{(d)}(\theta; \theta+\pi) + G(\theta; \theta+\pi)] \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

となるが, これが (10.6) が成立つ場合, つまり系外にパワーが出て行かない場合である。

物体がパワー W_{ab} を吸収する場合は I の部分が吸収パワーだけ変るから (10.10) の右辺から吸収幅を差引いておけばよい。

3. 円境界に関する計算例²⁴⁾

縦波または横波を受ける物体が、振動しつつ波のエネルギーを吸収する問題を円境界について数値計算例を次に示す。この場合、さきに述べたように、ある入射波で波動力吸収断面積が最大となるようにするには、境界内部と外部系のインピーダンスが共役整合となる場合であり、そのためには剛体質量と減衰抵抗によって波エネルギーを吸収するようにした。以下、円境界は単位円 (半径1) についての計算例を示す。

i) 円筒剛体の縦波および横波による振動

x 軸の正の方向から単位振幅の縦波または横波が入射する時の剛体の振動モードは、前者については x 軸にそっての振動、後者については y 軸にそっての振動と xy 面に垂直な軸まわりの回転モードとなる。ここでは x 軸、 y 軸にそっての振動モードのみによって入射波のエネルギーを吸収する方法を考えているので、以下回転運動は考えない。

外部系のインピーダンス $Z^{(out)}$ と波強制力 f_x, f_y は、それぞれの振動モードの放射問題の解より付録Bを参照して次式となる。

$$\left. \begin{aligned} Z^{(out)} &= \frac{G}{i\omega} z^{(out)} = -\frac{G\pi}{i\omega} \{z_1^{(1,1)} + z_1^{(2,2)} - 2z_1^{(1,2)}\} \\ f_x &= \frac{k^2}{iK^3} G(0) = \frac{k^2}{iK^3} \frac{4}{A_1} \{K^2 k H_1^{(2)'}(k) - K^2 H_1^{(2)}(k)\} \\ f_y &= \frac{1}{ik} F(0) = \frac{1}{ik} \frac{4}{A_1} \{k^2 H_1^{(2)}(K) - k^2 K H_1^{(2)'}(K)\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

内部系のインピーダンス $Z^{(in)}$ は剛体質量 M と減衰抵抗 R_e によって次式で与えるものとする。

$$Z^{(in)} = R_e + i\omega M \quad (2)$$

剛体の単位体積質量を ρ_0 とすると、外部系の単位体積質量 ρ との比 $\mu = \rho_0/\rho$ を用いて $Z^{(in)}$ を次のように書き変える。

$$Z^{(in)} = \frac{G}{i\omega} z^{(in)} = \frac{G}{i\omega} (-\mu\pi k^2 + ikR_e') \quad (3)$$

ここに、

$$R_e' = R_e / \sqrt{\rho G}$$

剛体の振動振幅 x_0, y_0 は、振動速度振幅をそれぞれ I_x, I_y とすると、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= I_x / i\omega = \frac{i \frac{k^2}{K^3} G(0)}{z^{(out)} + z^{(in)}} \\ y_0 &= I_y / i\omega = \frac{i \frac{1}{k} F(0)}{z^{(out)} + z^{(in)}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。物体が受けとる動力は、

$$W_a = \left\{ \frac{k^2}{4K^3} G[I_x \bar{G}(0) + \bar{I}_x G(0)] \right. \quad (5)$$

$$\left| \frac{1}{4k} G[I_Y \bar{F}(0) + \bar{I}_Y F(0)] \right|$$

となり、これより波動力吸収断面積は次式より求まる。

$$A_{ab}^K = \frac{W_a}{E_K}, \quad A_{ab}^k = \frac{W_a}{E_k} \quad (6)$$

入射波のある波数の時に活動力吸収断面積が最大となる条件は、内部と外部のインピーダンスが共役整合となる場合であり、そのためには内部の質量比 μ と減衰抵抗 R_s' の値を次のようにおけばよい。

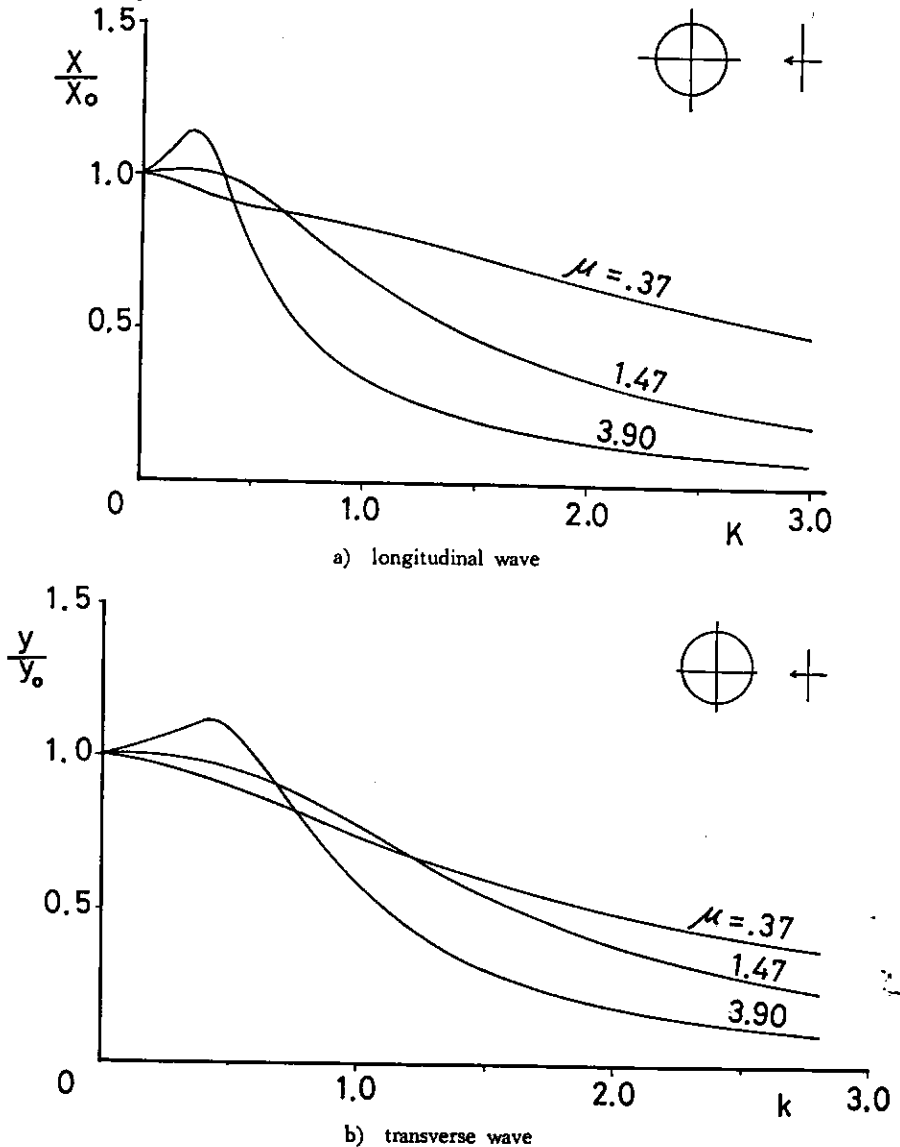
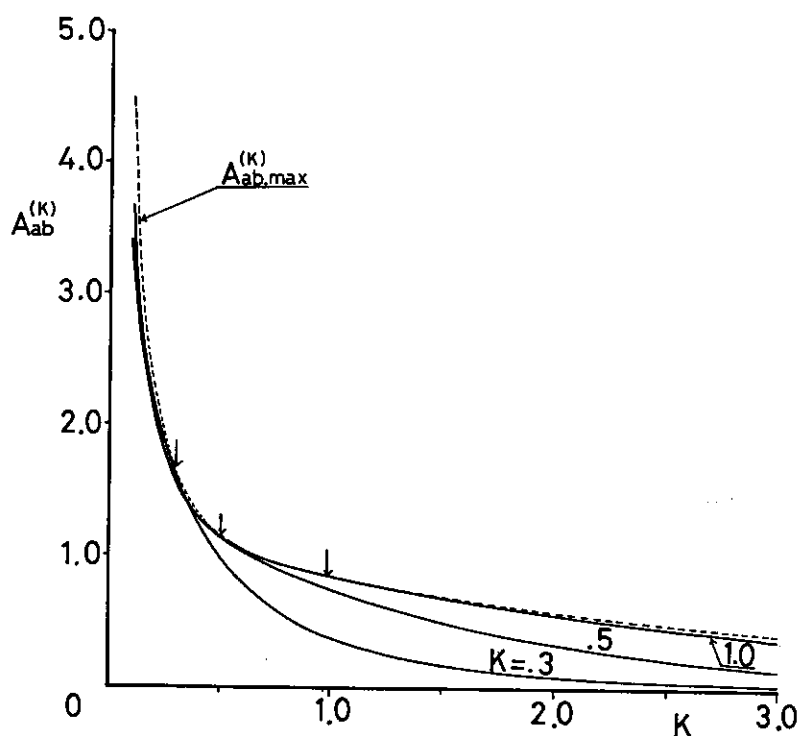
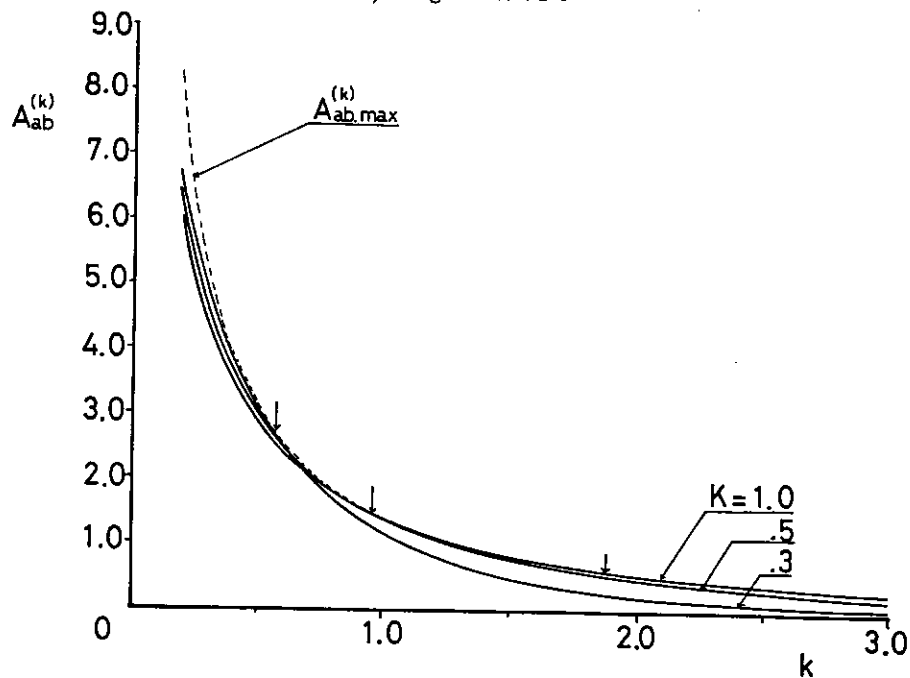


Fig. 2 Response amplitude of a rigid circular cylinder for various mass density ratio ($\mu = \rho_0/\rho$).

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について



a) longitudinal wave



b) transverse wave

Fig. 3 Cross sectional area absorbing wave power of a rigid circular cylinder for various mass density and damping.

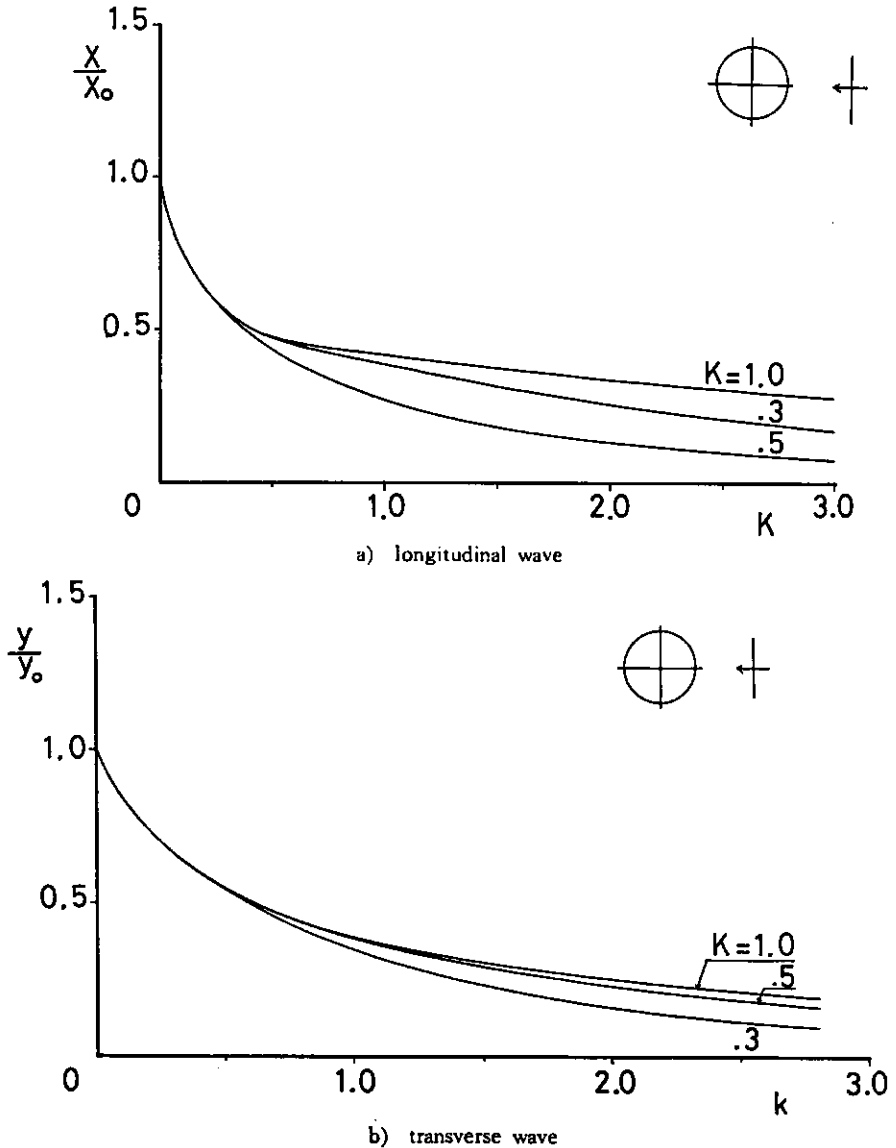


Fig. 4 Response amplitude of a rigid circular cylinder for various mass density and damping.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= R_e [z^{(out)}] / \pi k^2 \\ R_e' &= I_m [z^{(out)}] / k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Fig. 2 に内部系の減衰抵抗がない時、剛体の質量比を種々に変えた場合の振動振幅応答計算例を示す。

入射波数 $K=0.3, 0.5, 1.0$ で波動力吸収断面積が最大となるように (7) によって μ と R_e' を選んだ時の波動力吸収断面積と剛体振動振幅を Fig. 3, 4 に示す。図において破線は (9.16), (9.17) より計算される最大波動力吸収断面積 $A_{ab, \max}^{(K)}$, $A_{ab, \max}^{(k)}$ で

あり、 μ と R_s' を調整することによって与えられた波数で $A_{ab, \max}^{(K)}$ または $A_{ab, \max}^{(k)}$ と接するようになっている。

ii) 空孔のぼう張収縮振動

空孔が縦波をうけ、そのぼう張収縮変形によって波エネルギーを吸収する問題である。

空孔内には流体を満たし、空孔のぼう張収縮によって空孔内の圧力 p は変動するものとする。空孔内に満たす流体は非粘性とする。変形による外部領域の反力を τ_n 、波の強制力を $(\tau_0 + \tau_d)_n$ とすると力の平衡方程式は次式となる。

$$G\{\tau_n + p + (\tau_0 + \tau_d)_n\} = 0 \quad (8)$$

これにぼう張収縮変位 u_n をかけて円孔上で積分すると、次の運動方程式を得る。

$$2\pi(z^{(out)} + z^{(in)})u_n = i \frac{k^2}{K^3} G(0) \quad (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} 2\pi z^{(out)} &= \int_0^{2\pi} \tau_n d\theta = 2\pi z_0^{(1,1)} \\ &= 2\pi \left\{ 2 - \frac{k^3 H_0^{(2)}(K) H_0^{(2)*}(k)}{4_0} \right\} \\ 2\pi z^{(in)} &= \int_0^{2\pi} p d\theta \\ i \frac{k^2}{K^3} G(0) &= - \int_0^{2\pi} (\tau_0 + \tau_d)_n U_n d\theta \\ &= 4 \frac{k^3 H_0^{(2)}(k)}{K 4_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

内部系のインピーダンスは空孔内の流体に連結された質量と減衰抵抗とを考慮して、次のように表わされるものと仮定する。

$$Z^{(in)} = \frac{G}{i\omega} z^{(in)} = R_s + i\omega M \quad (11)$$

前と同様に、質量比と減衰抵抗の値を(7)を使って調整することにより、入射波数 $K=0.3, 0.5, 1.0$ の時に波動力吸収断面積が最大となるように計算した結果を Fig. 5, 6 に示す。この場合、最大波動力吸収断面積はコッチン関数が無指向性であることより

$$A_{ab, \max}^{(K)} = \frac{1}{K} \quad (12)$$

となっている。

iii) 散乱断面積

円筒剛体に縦波または横波が入射した時の散乱断面積は前の式(10.2)より計算でき、特に放射分がない時は(10.3)または(10.4)より求めることができる。付録に示したコッチン関数を使って $A_{ss}^{(K)}, A_{ss}^{(k)}$ を計算した結果を Fig. 7, 8 に示す。Barrat と Collins は K および k の小さい部分での近似式を与えているが、図に示した結果とよく一致している。また、散乱波の各方面に広がる分布状態を表わす散乱波指向性利得を Fig. 9 に示す。

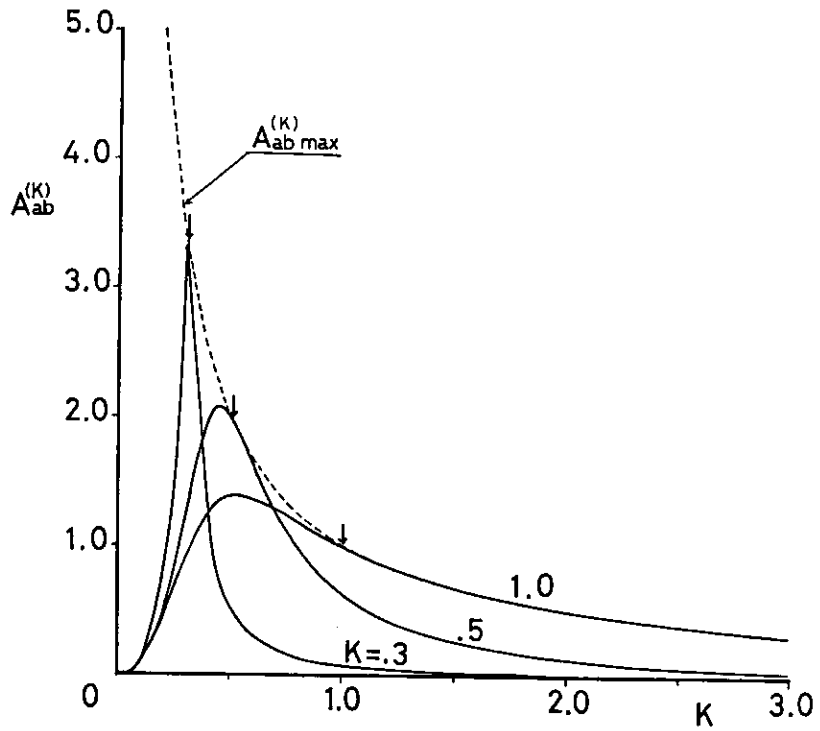


Fig. 5 Cross sectional area absorbing wave power of a circular cavity.

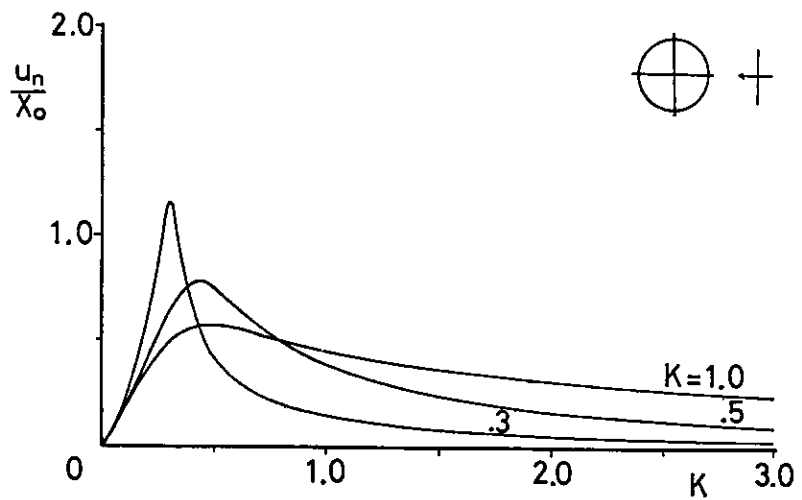


Fig. 6 Response amplitude of a circular cavity

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

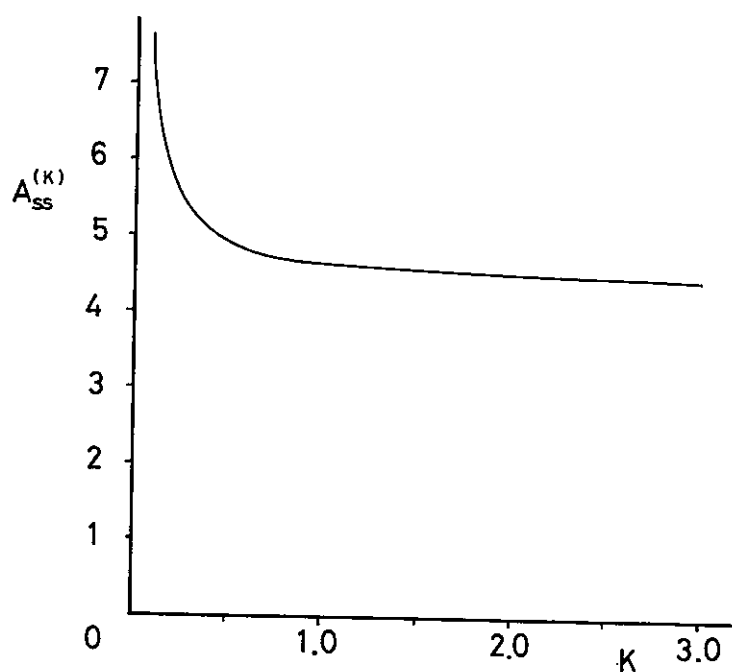


Fig. 7 Scattering cross sectional area of a rigid circular cylinder for longitudinal wave

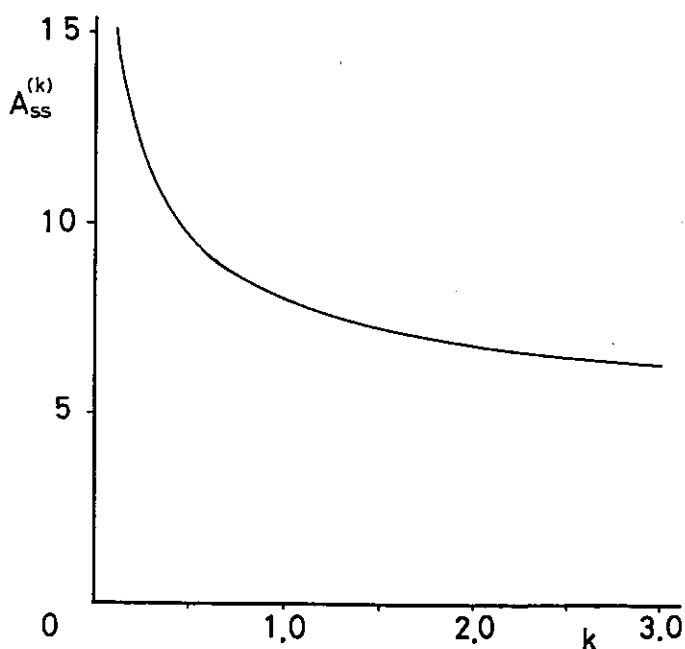


Fig. 8 Scattering cross sectional area of a rigid circular cylinder for transverse wave

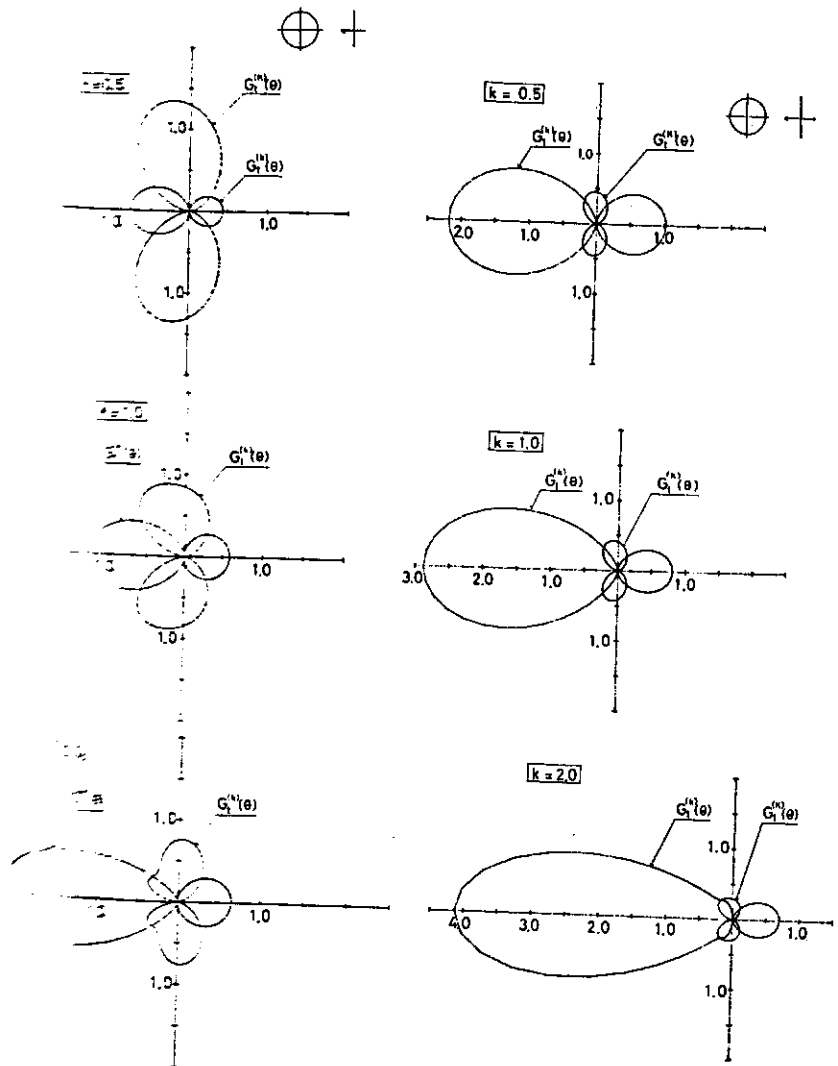


Fig. 9 Directional distribution of scattering wave from a rigid circular cylinder for various wave number

1. 物体が無限大の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。
2. 物体が有限の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。
3. 物体が有限の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。
4. 物体が有限の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。
5. 物体が有限の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。
6. 物体が有限の媒質の中にある場合、平面弾性波を受けて振動する問題を、境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列挙し、その特色について述べた。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

- iii) 波長が充分長い時は 静的弾性問題に帰着する事を示し、具体的にその対応性を記した。

また、核関数についていえば、原点の近くでは静的問題のそれに全く一致するので、数値計算にあたってはこれを利用する事により容易に数値積分が実行できる。

- iv) 相反定理を導入し、それから境界値問題の変分原理を誘導した。

また特に水波理論でハスキントの定理として知られている平面入射波による強制力は、その物体が振動して放射する波の振幅つまりコッチン関数に比例すると言う関係を誘導した。この定理によって入射波の散乱問題を解かなくても、物体または空孔の放射波がわかっていれば入射波による振動は求められる。

- v) 放射波エネルギーをコッチン関数で表わした。また変位等の複素数表現の複素共役値が時間を逆にした時の振動になっている事に留意し、その間の関係式を与えた。

- vi) 最後に平面入射波によって振動する剛体または空孔の運動方程式の解を考え、特にそれらが放射波による減衰以外の減衰によって入射波エネルギーを吸収する問題を考え、それを最大にする条件を求めた最大波動力吸収断面積を与える式を与えた。また散乱断面積についても言及した。

これらの事を円境界の場合について数値計算例を示した。

以上、個々の式等それぞれ個別に文献に見られるものであるが、今回はつとめて統一的に記述し後の利用の便に資したいと考えたものである。

なおまた vi) 項については特にアンテナ理論の用語をかりてまとめて見たもので、相互の相似性は著るしいものがあり実用上の有用性が期待される。

参 考 文 献

- 1) Love, A. E. H.: "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th ed., Cambridge, (1959).
- 2) Morse, P. M. and Feshbach, H.: "Methods in Theoretical Physics", McGraw-Hill, (1953).
- 3) 虫明康人: "アンテナ・電波伝搬", コロナ社, (1960).
- 4) Kupradze, V. D.: "Dynamical Problems in Elasticity", Progress in Solid Mechanics, Vol. 3 North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, (1963).
- 5) Fung, Y. C.: "Foundations of Solid Mechanics", 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀正訳, "固体の力学/理論", 培風館, 昭和51年.
- 6) Pao, Y. H.: "Dynamical Stress Concentration in Elastic Plate", J. of Applied Mechanics, Vol. 29, No. 2, (1962), 299-305.
- 7) Banaugh, R. P. and Goldsmith, W.: "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surface of Arbitrary Shape", J. of Applied Mechanics, Vol. 30, No. 4, (1963), 589-597.
- 8) Pao, Y. H. and Mow, C. C.: "Scattering of Compressional Waves by a Spherical Obstacle", J. of Applied Physics, Vol. 34, No. 3, (1963), 493-499.
- 9) Barratt, P. J. and Collins, W. D.: "The Scattering Cross-Section of an Obstacle in an Elastic Solid for Plane Harmonic Waves", Proc. Camb. Soc., 61, (1965), 969-981.
- 10) Thau, S. A.: "Radiation and Scattering From a Rigid Inclusion in Elastic Medium", J. of Applied Mechanics, Vol. 34, (1967), 509-511.
- 11) Cruse, T. A. and Rizzo, F. J.: "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 22, (1968), 244-259.
- 12) 丹羽義次, 小林昭一, 横田和男: "積分方程式による任意形状多数空洞週辺応力の解析", 土木学会論文報告集, 第195号, (1971年11月), 27-35.

- 13) Tan, T. H.: "Scattering of Elastic Waves by Elastically Transparent Obstacles (Integral-Equation Method)", Appl. Sci. Res., 31, (1975), 29-51.
- 14) Tan, T. H.: "Far-Field Radiation Characteristics of Elastic Waves and the Elastodynamic Radiation Condition", Appl. Sci. Res., 31, (1975), 363-375.
- 15) 別所正利: "逆時間ポテンシャルについて", 関西造船協会誌, 第159号, (昭和50年12月), 75-84.
- 16) Tan, T. H.: "Theorem of the Scattering and the Absorption Cross Section for Scattering of Plane, Time-Harmonic, Elastic Waves", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 59, No. 6, (1976), 1265-1267.
- 17) Varatharajulu, V. and Pao, Y. H.: "Scattering Matrix for Elastic Waves. 1. Theory", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 60, No. 3, (1976), 556-566.
- 18) Varatharajulu, V.: "Reciprocity Relations and Forward Amplitude Theorems for Elastic Waves", J. of Mathematical Physics, Vol. 18, No. 4, (1977), 537-543.
- 19) Mei, C. C.: "Extensions of Some Identities in Elastodynamics with Rigid Inclusions", J. Acoust. Soc. Am., 64 (5), (1978), 1514-1522.
- 20) 丹羽義次, 小林昭一, 北原道弘: "弾性固有値問題の積分方程式による解法", 土木学会論文報告集, 第285号, (1979年5月), 17-28.
- 21) 柴原正雄, 立野重明, 黒柳治: "任意形状弾性不連続による応力波の回折", 日本機械学会論文集A編, 45巻396号, (昭和54年8月), 894-901.
- 22) 別所正利, 河辺寛: "弾性論の境界値問題における特異点法について, 第1報 理論, 第2報 数値計算, 第3報 三次元軸対称問題", 関西造船協会誌, 第177号, (昭和55年6月), 99-106, 第178号, (昭和55年9月), 121-126, 第184号, (昭和57年3月), 105-111.
- 23) 丹羽義次, 小林昭一, 北原道弘: "積分方程式による平板の固有振動問題の解析", 土木学会論文報告集, 第304号, (1980年12月), 1-16.
- 24) 鐘江茂, 水野伸彦: "境界要素法による動的弾性問題の解析", 防衛大学校卒業論文, (昭和57年3月).
- 25) 別所正利: "水波工学入門", 日本造船学会誌, 634号, (昭和57年4月), 9-20.

付録A 核関数とその長波極限值

(1.8), (1.10) の γ, ω を次のようにとると,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \\ \omega_1(P, Q) &= -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \\ \omega_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A, 2)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

変位は次式となる。

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{(-1)^{i+j} \partial \omega_i(P, Q)}{k^2 \partial x_{i+1}} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_i(P, Q)}{\partial x_j} \quad (A, 3)$$

$$x_1 = x_3 \equiv x, \quad x_2 \equiv y$$

境界力は,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{j1}(P, Q) &= -\omega_j(P, Q) \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \gamma_j(P, Q) \frac{\partial x}{\partial n} \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial s} U_{j2}(P, Q) \end{aligned} \right\}$$

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} \tau_{j2}(P, Q) = m_j(P, Q) \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2}{K^2} \gamma_j(P, Q) \frac{\partial y}{\partial n} \\ + 2 \frac{\partial}{\partial s} U_{j1}(P, Q) \end{aligned} \right\} \quad (A, 4)$$

これらを書き下すと,

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ U_{12}(P, Q) = U_{21}(P, Q) &= \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ U_{22}(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \end{aligned} \right\} \quad (A, 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ \tau_{12}(P, Q) &= -\frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad + \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(kR) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\} \right] \\ \tau_{21}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(kR) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\} \right] \\ \tau_{22}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad + \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \end{aligned} \right\} \quad (A, 6)$$

これらの式で波長が充分長いとして (4.1) の近似値を代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R^2 \log R) \\ U_{12}(P, Q) = U_{21}(P, Q) &\doteq -\frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (R^2 \log R) \\ U_{22}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (R^2 \log R) \end{aligned} \right\} \quad (A, 7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R) \\ \tau_{12}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x^2} (R^2 \log R) \\ \tau_{21}(P, Q) &\doteq -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y^2} (R^2 \log R) \\ \tau_{22}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R) \end{aligned} \right\} \quad (A, 8)$$

なお定数項は省略してある。

これは静的弾性問題の核関数である。

付録 B 円境界の放射散乱問題

半径 1 の円境界の解析解を以下に記し、その数値を Table 1, 2 に示す。

1. 放射問題

a) 円周上で $u_r = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$, $u_\theta = 0$ の振動

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 A_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \omega &= k^2 B_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 1)$$

とおくと、これによる変位は

$$\begin{aligned} u_r|_{r=1} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ &= \{n B_n H_n^{(2)}(k) - k A_n H_n^{(2)'}(k)\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_\theta|_{r=1} &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \\ &= \{k B_n H_n^{(2)'}(k) - n A_n H_n^{(2)}(K)\} \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{k H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \\ B_n &= \frac{n H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \\ J_n &= n^2 H_n^{(2)}(k) H_n^{(2)}(K) - k K H_n^{(2)'}(k) H_n^{(2)'}(K) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 2)$$

コッチン関数は

$$\left. \begin{aligned} G_1(\theta) &= 4i^{n-1} K^2 A_n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} = 4 \frac{i^{n-1} K^2 k H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ F_1(\theta) &= 4i^{n-1} k^2 B_n \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} = 4 \frac{i^{n-1} n k^2 H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 3)$$

境界力

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \frac{k^2}{K^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2u_r = -z_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \tau_\theta &= \omega + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - 2u_\theta = -z_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \\ z_n^{(1,1)} &= 2 - k^2 A_n H_n^{(2)}(K) = 2 - \frac{k^3 H_n^{(2)}(K) H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \\ z_n^{(1,2)} &= 2n - k^2 B_n H_n^{(2)}(k) = n \left[2 - \frac{k^2 H_n^{(2)}(k) H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 4)$$

インピーダンスは次のように定義される。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$K=0.1$

Table 1 Coefficients $Z_n^{(i,j)}$

n	$Z_n^{(1,1)}$		$Z_n^{(1,2)} = Z_n^{(2,1)}$		$Z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	1.9164	0.0534	0.0	0.0	1.9392	0.0508
1	2.2376	0.2019	1.7362	-0.2007	2.2545	0.1999
2	3.5039	0.0336	2.4824	-0.0336	3.5138	0.0335
3	5.0922	0.0003	2.8987	-0.0003	5.0987	0.0003
4	6.6556	0.0000	3.3376	0.0000	6.6605	0.0000
5	8.2142		3.7804		8.2181	
6	9.7714		4.2241		9.7746	
7	11.3280		4.6681		11.3310	
8	12.8840		5.1123		12.8870	
9	14.4400		5.5565		14.4430	
10	15.9960		6.0008		15.9980	

$K=0.5$

n	$Z_n^{(1,1)}$		$Z_n^{(1,2)} = Z_n^{(2,1)}$		$Z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	1.3064	1.0019	0.0	0.0	1.6793	0.7238
1	1.9067	0.8468	1.4422	-0.6523	2.2605	0.6827
2	3.0618	0.5268	2.5782	-0.5026	3.3202	0.4838
3	4.6338	0.1267	3.1313	-0.1233	4.8068	0.1210
4	6.3713	0.0082	3.4560	-0.0081	6.4961	0.0080
5	8.0157	0.0002	3.8471	-0.0002	8.1143	0.0002
6	9.6160	0.0000	4.2700	0.0000	9.6977	0.0000
7	11.1991		4.7030		11.2690	
8	12.7740		5.1403		12.8350	
9	14.3442		5.5799		14.3991	
10	15.9110		6.0208		15.9600	

$K=1.0$

n	$Z_n^{(1,1)}$		$Z_n^{(1,2)} = Z_n^{(2,1)}$		$Z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	0.8342	2.7716	0.0	0.0	1.5741	1.7146
1	1.1289	2.3338	0.9290	-0.8666	2.0280	1.4261
2	2.1916	1.5296	2.2831	-1.1777	3.1598	1.0891
3	3.6340	0.8473	3.3591	-0.7774	4.3863	0.7204
4	5.4024	0.2657	3.8714	-0.2546	5.9480	0.2440
5	7.3183	0.0351	4.1177	-0.0342	7.7320	0.0334
6	9.1006	0.0022	4.4359	-0.0022	9.4364	0.0022
7	10.7840	0.0001	4.8212	-0.0001	11.0690	0.0001
8	12.42400	0.0000	5.2326	0.0000	12.6710	0.0000
9	14.0390		5.6557		14.2580	
10	15.6410		6.0851		15.8371	

$K=2.0$

n	$Z_n^{(1,1)}$		$Z_n^{(1,2)} = Z_n^{(2,1)}$		$Z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	0.4844	6.4760	0.0	0.0	1.5236	3.6491
1	0.4485	6.2206	0.3895	-0.6562	1.6989	3.3520
2	0.4697	5.2991	1.0501	-1.5110	2.4262	2.5624
3	1.1983	3.7329	2.4421	-2.1682	3.8353	1.9220
4	2.7336	2.3927	3.9660	-1.9196	5.1707	1.6117
5	4.5257	1.3435	4.9573	-1.1972	6.4794	1.0704
6	6.6041	0.5179	5.3876	-0.4815	8.1456	0.4478
7	8.8131	0.1141	5.5232	-0.1084	10.0580	0.1031
8	10.8600	0.0147	5.7144	-0.0142	11.9090	0.0137
9	12.7320	0.0013	6.0159	-0.0012	13.6450	0.0012
10	14.5072	0.0001	6.3754	-0.0001	15.3173	0.0001

Table 2 Coefficients G and F $K=0.1$

n	G_1		F_1		G_2		G_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-0.0619	-0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.2113	-0.0056
1	-0.0360	0.0418	0.2346	-0.2920	0.0359	-0.0464	-0.2334	0.2815
2	-0.1347	-0.0003	0.1654	0.0037	0.0136	0.0003	-0.1650	-0.0037
3	0.0000	-0.0007	0.0000	0.0159	0.0000	0.0007	0.0000	-0.0159
4	0.0000	0.0000	-0.0008	0.0000		0.0000	0.0007	0.0000

 $K=0.5$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-1.3233	-0.2179	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.5707	-1.7799
1	-0.6288	-0.1760	3.5514	-0.8880	0.5627	-0.3406	-3.1018	-0.3046
2	-0.2224	-0.1119	3.0366	1.2667	0.2980	0.1072	-2.8175	-1.2137
3	0.0034	-0.0716	-0.0744	1.6418	-0.0034	0.0779	0.0730	-1.6064
4	0.0100	0.0000	-0.4228	-0.0008	-0.0104	0.0000	0.4183	0.0008
5	0.0006	0.0009	0.0000	-0.0682	0.0000	-0.0009	0.0000	0.0678
6	-0.0001	0.0000	0.0081	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0081	0.0000
7	0.0000		0.0000	0.0008			0.0000	-0.0008
8			-0.0001				0.0001	0.0000
9			0.0000				0.0000	

 $K=1.0$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-3.8869	-2.1895	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.6581	-11.7230
1	-2.0468	-2.4273	8.4059	3.3366	1.6324	-0.6473	-2.9638	-8.8816
2	-5.8655	-1.0632	5.5470	9.4819	1.1265	0.8938	-3.0872	-7.8063
3	0.1674	-0.3202	-3.0958	7.9589	-0.1544	0.5179	2.8530	-7.1871
4	0.1168	0.0091	-4.8053	-0.3338	-0.1418	-0.0088	4.5951	0.3199
5	-0.0002	0.0233	0.0109	-1.7555	0.0002	-0.0258	-0.0106	1.7107
6	-0.0032	0.0000	0.4436	0.0001	0.0034	0.0000	-0.4361	-0.0001
7	0.0000	-0.0003	0.0000	0.0866	0.0000	0.0003	0.0000	-0.0855
8		0.0000	-0.0139	0.0000		0.0000	0.0137	0.0000
9			0.0000	-0.0019			0.0000	0.0019
10			0.0002	0.0000			-0.0002	0.0000

 $K=2.0$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-2.4886	-13.4100	0.0	0.0	0.0	0.0	35.6940	-3.1446
1	0.7605	-12.4680	-4.9068	15.9150	3.3185	0.6845	32.2300	0.0553
2	6.3608	-6.1739	-21.1430	21.3290	2.9112	4.4607	23.2980	3.3501
3	3.6423	1.2288	-33.6291	1.2432	-2.5757	3.3110	20.9272	4.7723
4	0.9090	0.9922	-19.1260	-21.5170	-1.6568	-0.8135	14.7751	17.5234
5	-0.1547	0.2904	7.2802	-20.4550	0.1381	-0.5799	-6.4959	18.1680
6	-0.1122	-0.0126	13.4370	1.2229	0.1611	0.0117	-12.4880	-1.1372
7	0.0005	-0.0287	-0.0930	6.3337	-0.0005	0.0357	0.0885	-6.0210
8	0.0055	0.0000	-2.2774	-0.0035	-0.0063	0.0000	2.1941	0.0033
9	0.0000	0.0008	0.0001	-0.6667	0.0000	-0.0009	-0.0001	0.6479
10	-0.0001	0.0000	0.1663	0.0000	0.0005	0.0000	-0.1625	0.0000

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} G\tau_r &= -i\omega Z_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ G\tau_\theta &= -i\omega Z_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 6)$$

それ故

$$\left. \begin{aligned} Z_n^{(1,1)} &= G \frac{z_n^{(1,1)}}{i\omega} \\ Z_n^{(1,2)} &= G \frac{z_n^{(1,2)}}{i\omega} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 7)$$

b) 円周上で

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$$

の振動

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 C_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ \omega &= k^2 D_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 8)$$

とおくと、これによる変位は

$$\left. \begin{aligned} u_r|_{r=1} &= \{-nD_n H_n^{(2)}(k) + KC_n H_n^{(2)'}(K)\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_\theta|_{r=1} &= \{-kD_n H_n^{(2)'}(k) + nC_n H_n^{(2)}(K)\} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 9)$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{nH_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} \\ D_n &= \frac{KH_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 10)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G_2(\theta) &= 4i^{n-1} \frac{nK^2 H_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ F_2(\theta) &= 4i^{n-1} \frac{k^2 KH_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 11)$$

境界力

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -z_n^{(2,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \tau_\theta &= -z_n^{(2,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 12)$$

$$\left. \begin{aligned} z_n^{(2,1)} &= z_n^{(1,2)} \\ z_n^{(2,2)} &= 2 - \frac{k^2 KH_n^{(2)}(k) H_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 13)$$

c) 円が剛体で x 軸にそって振動する場合

$$u_r = \cos \theta, \quad u_\theta = -\sin \theta \quad (\text{B}, 14)$$

となるから、境界力は

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -(z_1^{(1,1)} - z_1^{(2,1)}) \cos \theta \\ \tau_\theta &= -(z_1^{(1,2)} - z_1^{(2,2)}) \sin \theta \\ \frac{X}{G} \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta &= -\pi [z_1^{(1,1)} + z_1^{(2,2)} - 2z_1^{(1,2)}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 15)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4}{A_1} \{K^2 k H_1^{(2)'}(k) - K^2 H_1^{(2)}(k)\} \cos \theta \\ F(\theta) &= \frac{4}{A_1} \{k^2 H_1^{(2)}(K) - k^2 K H_1^{(2)'}(K)\} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 16)$$

2. 散乱問題

a) 固定境界による縦波の散乱

単位振幅の縦波では x の正の方向から来るものを考えれば充分であるから、

$$\gamma_0 = iK e^{iKx} = iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta \quad (\text{B}, 17)$$

ここに

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad \text{for } n \geq 1$$

これによると C 上の変位、境界力は

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(0)} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n'(K) \cos n\theta \\ u_\theta^{(0)} &= \frac{i}{K} \sum_{n=0}^{\infty} n i^n \varepsilon_n J_n(K) \sin n\theta \\ \tau_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{k^2}{K} J_n(K) + 2J_n'(K) - \frac{2n^2}{K} J_n(K) \right] \cos n\theta \\ \tau_\theta^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[nJ_n'(K) - \frac{n}{K} J_n(K) \right] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 19)$$

境界条件は、

$$u_r = -u_r^{(0)}, \quad u_\theta = -u_\theta^{(0)} \quad \text{on } C \quad (\text{B}, 20)$$

であるから、前項の結果を適用して直ちに解は求まる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n'(K) - \frac{n}{K} J_n(K) C_n \right] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} \varepsilon_n}{A_n} \left[k J_n'(K) H_n^{(2)'}(k) - \frac{n^2}{K} J_n(K) H_n^{(2)}(k) \right] \\ &\quad \times H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[J_n'(K) B_n - \frac{n}{K} J_n(K) D_n \right] H_n^{(2)}(kr) \sin n\theta \\ &= -\frac{2k^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n i^n}{A_n} H_n^{(2)}(kr) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 21)$$

$$\Gamma|_{r=1} = \gamma^{(0)} + \gamma|_{r=1}$$

$$= \frac{2ikK}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \frac{H_n^{(2)'}(k)}{A_n} \cos n\theta \quad (\text{B}, 22)$$

境界力は、

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \frac{k^2}{K^2} \Gamma|_{r=1} \\ \tau_\theta &= \omega|_{r=1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 23})$$

例えば x 方向の力は

$$\begin{aligned} \frac{X}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{4k^2}{iK\Delta_1} \{kH_1^{(2)'}(k) - H_1^{(2)}(k)\} \end{aligned} \quad (\text{B, 24})$$

これは (B.16) の $G(0)$ に確かに比例している。

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= 4K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} [kKJ_n' H_n^{(2)'}(k) - n^2 J_n(K) H_n^{(2)}(k)] \cos n\theta \\ F(\theta) &= \frac{8ik^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 25})$$

b) 固定境界による横波の散乱

単位振幅の横波とそれによる C 上の変位と境界力

$$\omega_0 = ike^{ikz} = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n J_n(kr) \cos n\theta \quad (\text{B, 26})$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(0)} &= -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} ni^{n+1} \varepsilon_n J_n(kr) \sin n\theta \\ u_\theta^{(0)} &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n J_n'(kr) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 27})$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_r^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{n}{k} J_n(k) - nJ_n'(k) \right] \sin n\theta \\ \tau_\theta^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n \left[kJ_n(k) - \frac{2n^2}{k} J_n(k) + 2J_n'(k) \right] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 28})$$

境界条件は

$$u_r = -u_r^{(0)}, \quad u_\theta = -u_\theta^{(0)}$$

であるから、解は

$$\left. \begin{aligned} r &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n(k) \frac{n}{k} - C_n J_n'(k) \right] \sin n\theta \\ &= \frac{2K^2}{\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[-\frac{n}{k} B_n J_n(k) + D_n J_n'(k) \right] \cos n\theta \\ &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{\Delta_n} \left[KH_n^{(2)'}(K) J_n'(k) - \frac{n^2}{k^2} H_n^{(2)}(K) J_n(k) \right] \\ &\quad \times H_n^{(2)}(kR) \cos n\theta \\ \Omega &= \omega^{(0)} + \omega|_{r=1} = -\frac{2kK}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)'}(K) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 29})$$

境界力

$$\tau_r = \frac{k^2}{K^2} r|_{r=1}, \quad \tau_\theta = \Omega|_{r=1} \quad (\text{B.30})$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{8K^2}{\pi k i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta \\ F(\theta) &= 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} [k K H_n^{(2)'}(K) J_n'(k) - n^2 H_n^{(2)}(K) J_n(k)] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.31})$$

 x 方向および δ 方向力

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta = 0 \\ \frac{Y}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \sin \theta + \tau_\theta \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{4ki}{\Delta_1} [H_1^{(2)}(K) - K H_1^{(2)'}(K)] \\ &= 4kK \frac{H_2^{(2)}(K)}{\Delta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.32})$$

c) 空孔による縦波の散乱

境界上の変位が

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n M_n \cos n\theta \\ u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n N_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.33})$$

とすると, (B.4), (B.12) より

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [z_n^{(1,1)} M_n + z_n^{(2,1)} N_n] \cos n\theta \\ \tau_\theta &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [z_n^{(1,2)} M_n + z_n^{(2,2)} N_n] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.34})$$

となる。これらの力が (B.23) による波の力と平衡しなければならないから,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2k^2}{\pi k} A_n &= -\frac{2k^3}{\pi K} \frac{H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} = z_n^{(1,1)} M_n + z_n^{(2,1)} N_n \\ -\frac{2k^2}{\pi k} C_n &= -\frac{2k^2}{\pi K} \frac{n H_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} = z_n^{(1,2)} M_n + z_n^{(2,2)} N_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.35})$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \left(-\frac{2k^2}{\pi K} \right) [k H_n^{(2)'}(k) z_n^{(2,2)} - n H_n(k) z_n^{(1,2)}] \\ N_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \left(-\frac{2k^2}{\pi K} \right) [n H_n^{(2)}(k) z_n^{(1,1)} - k H_n^{(2)'}(k) z_n^{(1,2)}] \\ D_n' &= z_n^{(1,1)} z_n^{(2,2)} - z_n^{(1,2)} z_n^{(2,1)} \\ M_n &= -\frac{2k^2}{\pi K \Delta_n D_n'} [(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) + 2k H_n^{(2)'}(k)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.36})$$

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$N_n = -\frac{4nk^2}{\pi K \Delta_n D_n'} [H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)]$$

そうすると,

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n [A_n M_n + C_n N_n] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ &= -\frac{2k^2 K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \epsilon_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta}{\Delta_n^2 D_n'} [kH_n^{(2)'}(k) \{(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) \\ &\quad + 2kH_n^{(2)'}(k)\} + 2n^2 H_n^{(2)}(k) \{H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)\}] \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n H_n^{(2)}(kr) \sin \theta [B_n M_n + D_n N_n] \\ &= -\frac{2k^4}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \epsilon_n H_n^{(2)}(kr) \sin \theta}{\Delta_n^2 D_n'} [nH_n^{(2)}(K) \{(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) \\ &\quad + 2kH_n^{(2)'}(k)\} + 2nKH_n^{(2)'}(K) \{H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)\}] \end{aligned} \right\} \quad (B, 37)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4K^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n [A_n M_n + C_n N_n] \cos n\theta \\ F(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n [B_n M_n + D_n N_n] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (B, 38)$$

d) 空孔による横波の散乱

境界上の変位を

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n P_n \sin n\theta \\ u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n Q_n \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (B, 39)$$

とおくと, これによる境界力は (B. 4), (B. 12) より,

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \sin n\theta [P_n z_n^{(1,1)} - Q_n z_n^{(2,1)}] \\ \tau_\theta &= -\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos n\theta [-P_n z_n^{(1,2)} + Q_n z_n^{(2,2)}] \end{aligned} \right\} \quad (B, 40)$$

平衡方程式は (B. 29), (B. 30) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{2k}{\pi} B_n &= \frac{2k}{\pi} \frac{nH_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} = P_n z_n^{(1,1)} - Q_n z_n^{(2,1)} \\ -\frac{2k}{\pi} D_n &= -\frac{2kK}{\pi} \frac{H_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} = -P_n z_n^{(1,2)} + Q_n z_n^{(2,2)} \end{aligned} \right\} \quad (B, 41)$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \frac{2k}{\pi} [nH_n^{(2)}(K) z_n^{(2,2)} - KH_n^{(2)'}(K) z_n^{(1,1)}] \\ &= \frac{4nk}{\pi \Delta_n D_n'} [H_n^{(2)}(K) - KH_n^{(2)'}(K)] \\ Q_n &= \frac{1}{\pi \Delta_n D_n'} \frac{2k}{\pi} [nH_n^{(2)}(K) z_n^{(1,2)} - KH_n^{(2)'}(K) z_n^{(2,2)}] \\ &= \frac{-2k}{\pi \Delta_n D_n'} [(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(K) + 2KH_n^{(2)'}(K)] \end{aligned} \right\} \quad (B, 42)$$

これより、境界力とコッチン関数は

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta [A_n P_n - C_n Q_n] \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta [-B_n P_n + D_n Q_n] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 43})$$

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4K^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n (A_n P_n - C_n Q_n) \sin n\theta \\ F(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n (-B_n P_n + D_n Q_n) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 44})$$

On the Radiation and Diffraction of the Two Dimensional Elastic Waves in an Infinite Domain of Homogeneous Medium

By Masatoshi BESSHO* and Hiroshi KAWABE**

(Received April 28, 1982)

Abstract

The theory of vibration of a solid body or a cavity in an infinite domain of elastic medium by in-coming plane waves are treated and summarized as follows;

- i) Some formulations of the boundary integral equation to solve its boundary value problem are discussed and proposed.
- ii) The far field property are described introducing so-called Kochin's function, that is, the amplitude of radiating cylindrical wave.
- iii) The long wave approximation are identified to the static problem of elasticity.
- iv) The reciprocity and the variational principle of boundary value problems are described.
- v) The complex conjugate of the displacement or stress in the field are represented as the sum of the ones of the original vibration and the diffraction term.
- vi) Formulating the equation of motion by making use of Haskind's relation which says that the wave-exciting force is proportional to the amplitude of radiating wave, the most favorable condition to absorb wave energy are obtained and its maximum absorbing sectional area of wave power are formulated.
- vii) Various numerical examples are shown for a circular cylindrical boundary.

* Professor Dept. of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

** Research Associate Dept. of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.