A-8-1

1980-II-10
SK62-7

流体力学における境界積分方程式について

別所正利

On the Boundary Integral Equation in Hydrodynamics

by Masatoshi Bessho

Oct. 22, 1980

No. 水委2部会
Date 55.10.22

「流体力学における境界積分方程式について」

別所正利*

"On The Boundary Integral Equation in Hydrodynamics"

By Masatoshi Bessho

内容

	頁
1. 序論	1
2. 境界積分方程式	3
3. 2次元問題	8
4. 3次元問題	12
5. 回転体	20
6. 結論	
参照文献	

* 防衛大学校機械工学科

1. 序論

最近特に海洋構造物に作用する流体力の造波理論的計算法の普及は目ざましくその信頼性も高まり実用的方法としての評価も略々確立されて来たように見える。

それと同時に計算法も段々と進歩し計算機の大容量化とあいまって複雑な3次元的構造物や船体のようなものについての計算も日常化しつゝあるようである。[1,3]

このような計算法は周知のように大別して境界要素法と有限要素法に別ける事が出来る。[2]

前者は物体の境界を微少要素に分割して境界値問題を積分方程式(以下これを境界積分方程式[2]と呼ぶ)に帰着させて解く方法であり、後者は考えている領域を細分して境界条件を満たしかつ領域全体で与えられた微分方程式を満たす解を求めるものである。

当然前者は後者に比して要素数は少ないが一般に境界積分方程式の核関数は複雑で特に3次元問題となると現在の所小さい計算機ではかなり困難である。

それに比して後者の方法では要素数は格段に多くなるがそのマトリックス要素の計算は一般に極めて容易でかつ帯状マトリックスとなり

計算機による処理に好適である。

たゞここで考えようとする問題では一般に領域が無限に広がっているのでこの方法では実際上有限の領域での計算しか出来ないからそれをその外部の無限領域の解に接続する問題が残る。

このように両法の得失は聯立方程式の元数の大小とその要素係数の計算の難易の2点にあると考えられるから計算機の能力および特徴に従って有利な方法を選ぶべきであろう。

また境界要素法では核関数の計算が容易になれば一層強力な方法となりうる事もわかるであろう。

さて本報告はこの境界要素法の核心である積分方程式について考察と言うよりはむしろその各種の形式と特徴を整理して概観しまた特にその特異積分の計算法についての知見を紹介しようとするものである。

つまり従来この種の問題では吹出し吸込み分布による表現が最も多く利用されて来たが最近ではその他の特異性を使うものもかなり利用されており[3]それら相互の関聯得失の検討も望ましい所である。

2. 境界積分方程式

以下非粘性非圧縮性の流体が無限又は半無限に広がっている領域で物体上の法線速度が指定される場合の流れ場について考える事にしよう。

これは数学的には調和関数の第2境界値問題と呼ばれるものである。なお自由表面のある場合は第3境界値問題との混合問題となるが普通は自由表面条件を満足する単位吹出しポテンシャル S を導入して形式上第2境界値問題に帰着させている。

そこでその場合も含めて無限遠方で正則な速度ポテンシャル ϕ はグリーンの定理により

$$\phi(Q) = \iint_S \left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial n_P} S(P,Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P,Q) \right] dS_P \ , \qquad (1)$$

ここに S は物体表面とし, n は外向き法線とする。

今物体の内部領域 $\bar{D}$ で正則な関数 a を考えると外部領域 D では

$$0 = \iint_S \left[a(P)\frac{\partial}{\partial n} S(P,Q) - \frac{\partial a}{\partial n} S \right] dS_P \ , \quad Q \in D \ , \qquad (2)$$

(1)から(2)を辺々差引いて $\phi = -a$, on S とすれば

$$\phi(Q) = \iint_S \sigma(P) S(P,Q)\, dS_P \ , \quad \sigma = -\frac{\partial}{\partial n}(\phi + a) \ , \qquad (3)$$

また $\partial\phi/\partial n = -\partial a/\partial n$ とすれば

$$\phi(Q) = \iint_S \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}S(P,Q)\,dS_P, \quad \mu = \phi + a, \tag{4}$$

となってよく知られた吹出し、2重吹出し表現が得られ境界積分方程式は夫々次のようになる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(Q) = -\frac{\sigma(Q)}{2} + \iint_S \sigma(P)\frac{\partial}{\partial n_Q}S(P,Q)\Big|_S dS_P, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \iint_S \mu(P)\frac{\partial^2}{\partial n_P \partial n_Q}S(P,Q)\Big|_S dS_P, \tag{6}$$

(1)も又境界積分方程式と見なしてよい。[6),16)]

(4),(6)については物体表面Sが閉じていて特に

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}, -\frac{\partial y}{\partial n}, -\frac{\partial z}{\partial n}, -\frac{\partial}{\partial n}\exp.\left[-Kz + iK(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\right], \tag{7}$$

の場合は a として

$$a = x, y, z, \exp.\left[-Kz + iK(x\cos\alpha + y\sin\alpha)\right], \tag{8}$$

と選ぶと(4)は

$$\mu(Q) - \iint_S \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n_P}S(P,Q)\,dS_P = a(P), \tag{9}$$

となって主要部は(1)と同形でこの儘境界積分方程式として使え、かつ(1)の右辺第2項の積分を実行する手間が省ける。

なお平板やビルゲキールのある場合は(1),(5)では境界条件が指定出来ないので(6)または(9)を使用しなければならない。

これらの解の相互関係を見る為にこれらの方程式を簡略化して次のようにマトリックス表示して見よう。

まず(1),(3),(5)は A' を A の転置行列として

$$A\{\phi\} = B\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (1')$$

$$\{\phi\} = B\{\sigma\}, \qquad (3')$$

$$A'\{\sigma\} = \left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (5')$$

と書くと(1')の解は

$$\{\phi\} = A^{-1}B\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (10)$$

(5')の解は $\{\sigma\} = (A')^{-1}\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\} = (A^{-1})'\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}$, (11)

となるから(3')により

$$\{\phi\} = B(A')^{-1}\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (12)$$

(10)と較べて $A^{-1}B = B(A')^{-1}$, (13)

を得るがこれは行列の演算規則そのものである。

このようにして吹出し分布で(5')を解く時は ϕ を求めるのにもう一回積分演算を要するので2度手間のようにも見えるが(10)(12)を比較して見ると行列の演算は実質的には同じである。

2重吹出し分布では I を単位行列として

$$\{\phi\} = (I - A)\{\mu\}, \qquad (4')$$

$$C\{\mu\} = \left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (6')$$

と書くとその解は

$$\{\mu\} = C^{-1}\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (14)$$

$$\{\phi\} = (I-A)C^{-1}\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\}, \qquad (15)$$

となり、(10)と(15)を較べて次の等式を得る。

$$A(I-A) = BC, \qquad (16)$$

これから A と B がわかれば C は計算出来る事がわかる。

さて Irregular Frequency として知られている波数では、例えば吹出し分布では、A' 従って A が特異であって(5')の解はないが、ϕ は有限確定の解を有する事がわかっているので(1')からこの時 B も特異でなければならない。同様にして C が特異ならば $(I-A)$ が同時に特異でなければならず、一方 B と C を特異にする波数は常に異なっているので片方で具合の悪い時はもう一方を使えばよい事になる。[4),5)]

この波数の近くでは特異値分解法[20)]を使って特異性をさける方法も考えられるが結局の所小さい数同志の割算となるので精度は大変劣るだろう。

最後に(9)とそれに対応する(1')は

$$A\{\mu\} = \{a\}, \qquad (9)$$

$$A\{\phi\} = (I-A)\{a\}, \qquad (1')$$

となり、その解は

$$\{\mu\} = A^{-1}\{a\}, \qquad (17)$$

$$\{\phi\} = A^{-1}(I-A)\{a\}, \qquad (18)$$

(17)を(14)と較べて

$$\{a\} = AC^{-1}\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\} \quad , \quad \cdots \qquad (19)$$

を得るがこれは(2)を法線微分したものから得られる関係である。

また(18)は同じ法線微分を有する外部解 ϕ と内部解 a との関係を示している。

上式は又(2)そのものでも導出来

$$\{a\} = (I-A)^{-1}B\left\{\frac{\partial a}{\partial n}\right\} \quad , \quad \cdots \qquad (20)$$

となるがこれは又(19)から(16)を使って導く事も出来る。

3. 2次元問題

2次元問題では共役関数を導入すると大変便利である。
まず流れ関数をψとすると速度ポテンシャルとの関係は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n} \,, \qquad (21)$$

であるから核関数についても

$$\frac{\partial}{\partial n_P} S(P,Q) = \frac{\partial}{\partial s_P} T(P,Q) \,, \quad \frac{\partial}{\partial s_P} S(P,Q) = -\frac{\partial}{\partial n_P} T(P,Q) \,, \qquad (22)$$

なる共役核Tを導入しよう。

特に

$$S(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \log \overline{PQ} \,, \quad T(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \Theta \quad , \qquad (23)$$

$$\Theta = \tan^{-1} \frac{y-y'}{x-x'} \,, \quad P \equiv (x,y) ,\ Q \equiv (x',y') \,.$$

先ず(4)に(22)を代入すると

$$\phi(Q) = \int_C \mu(P) \frac{\partial}{\partial s_P} T(P,Q)\, ds_P \,, \qquad (24)$$

となるのでμが微少要素上で階段関数となっていれば積分の苦労がなく境界方程式を(9)に選ぶ事が出来れば大変簡単になる。

又吹出し分布(3)の場合も流れ関数では

$$\psi(Q) = \int_C \sigma(P)\, T(P,Q)\, ds_P \,, \qquad (25)$$

となってTの特異性は$P=Q$におけるジャンプのみであるので積分計算は容易である。[7)]

また(24)を流れ関数に変換すると.

$$\psi(Q) = -\int_C \mu(P)\frac{\partial}{\partial s_P}S(P,Q)\,ds_P, \quad \cdots\cdots (26)$$

となって μ が階段関数ならば積分が容易であり，ビルヂキールのあるような場合も取扱かえる。

次に (24) を部分積分して一価性を仮定すると

$$\phi(Q) = -\int_C \frac{\partial\mu}{\partial s}(P)\,T(P,Q)\,ds_P \quad , \cdots\cdots (27)$$

その流れ関数は

$$\psi(Q) = \int_C \frac{\partial\mu}{\partial s}\,S(P,Q)\,ds_P \quad , \qquad (28)$$

となるがこれはサーキュレーション $(\partial\mu/\partial s)$ による流れ場であって，一様流れの場合は (4) 第2式からわかるように $\partial\mu/\partial s$ は直接C上の速度を与える。

さて自由表面のある場合も2次元では計算量が少ないので現在の所あまり不便もないようであるが核関数の計算の手間を省くには波なし核を使う方法がある。[5)18)]

例えば動揺問題では

$$S^*(P,Q) \equiv \left(K+\frac{\partial}{\partial y_Q}\right)S(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\left[K\log\frac{r_2}{r_1} - \frac{\partial}{\partial y_Q}\log r_1 r_2\right],$$

$$r_1 = \overline{PQ},\quad r_2 = \overline{\bar{P}Q},\quad \bar{P} = (x,-y) \qquad (29)$$

として (1) を微分し右辺第2項を部分積分すると

$$\left(K+\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(Q) = \int_C\left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial s_P}T^*(P,Q) + \psi(P)\frac{\partial}{\partial s_P}S^*(P,Q)\right]ds_P, \quad (30)$$

を得,核関数の計算は大変簡単である。

なお左辺は

$$(K+\frac{\partial}{\partial y})\phi = K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad (31)$$

と解釈するのでこれは微積分方程式となる。

また,この方法では散乱問題の方程式は(7)および(9)から

$$(K+\frac{\partial}{\partial y})\mu = \int_C \mu \frac{\partial}{\partial s} T^* ds_p, \qquad (32)$$

となって(30)の斉次方程式となるので(30)は斉次解として散乱解を含む。

それ故(30)を解くにはC上の幾つかの点で法線速度を与えなければ解は定まらない。[8]

核関数を簡単化すると言う意味ではさらに一歩すゝめてすべて対数核のみですます方法が有望になってきた。[9] [10] [11]

今それを定常造波抵抗問題で考えて見よう。

充分遠方に検査面 L_1, L_2 を考え自由表面をFとすると(9)から(22),(23)によって

$$\mu(Q) - \frac{1}{2\pi}\int_{C+F+L_1+L_2} \mu(P)\frac{\partial}{\partial s_p} H(P,Q)\, ds_p = \chi(Q), \qquad (33)$$

あるいは

$$\frac{\partial \mu}{\partial s}(Q) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial s_Q}\int_{C+F+L_1+L_2} \frac{\partial \mu}{\partial s}(P)\, H(P,Q)\, ds_p = \frac{\partial \chi}{\partial s}(Q), \qquad (34)$$

F.S.では圧力一定故ベルヌーイの定理より

$$\frac{\partial \mu}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(x+\phi) = \pm\sqrt{1-2g\eta}\ , \qquad (35)$$

但し η は水面変位とする。[9]

この方法はさらに試行錯誤法によって水面の非線型性も扱かえる[10][9]点で魅力があるが L_1, L_2 の選定とその上での境界条件(放射条件)の取扱いにはまだ検討の余地が残されているように思われる。

この点については次節で再び論ずる事としよう。

4. 3次元問題

3次元流れでも回転体に関しては2次元並みに簡単化されるので更ためて次節において論ずる事としここでは一般的な場合を考えよう。

3次元計算の困難な点は2次元の場合に比して聯立方程式の元数,従って行列の要素係数の数が飛躍的に増加する事である。それ故少しでも計算の少くなる,例えば従来の吹出し分布法による(5)よりは(1)または(9)の方が望ましい。

また核関数は簡単な,例えば前節(29)以下のような方が望ましい。

そこで特に(9)を用いる方法について少し考えて見よう。この場合の計算上の問題点は特異積分の評価である。

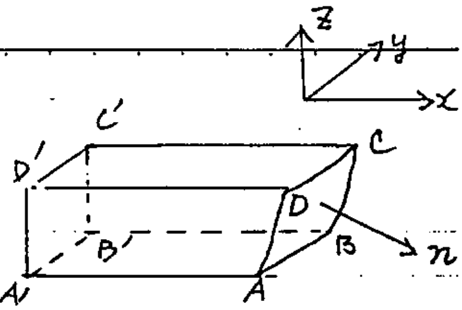
今ABCDで囲まれた微少要素ΔS上の次の積分を考えよう。

$$I(Q)=\iint_{\Delta S}\frac{\partial}{\partial n_p}S(p,Q)\,dS_p\ , \qquad (36)$$

もし要素上でポテンシャルが変動するならば更に分割して上式の積分の和として評価すればよい。

面ΔSが座標面に平行な場合は容易に計算出来るので一般の場合にも上式を変形して座標面に平行な面上の

特異点分布で表現出来ないだろうか。



核は調和関数であるからグリーンの定理を使えば良く，直ちに

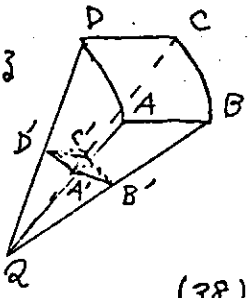
$$I(Q)=\int_{\overline{ABB'A'}-\overline{CDD'C'}}\frac{\partial S}{\partial z}\,dxdy-\int_{\overline{BCC'B'}-\overline{DAA'D'}}\frac{\partial S}{\partial y}\,dxdy$$

なお A'B'C'D'は無限遠方にあるものとする。

これを x で積分すると

$$I(Q)=\int_{\overline{AB}-\overline{CD}}dy\left[\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial S}{\partial z}dx\right]-\int_{\overline{BC}-\overline{AD}}dz\left[\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial S}{\partial y}dx\right],\qquad(37)$$

となるが(36)をABCD回りの渦系によるポテンシャルと見なすならばストークスの定理によって上式は明白である。



同じ様な事をQ点とABCDを結んで出来る角錐面上の特異点分布とする事も出来よう。

この方法は特に

$$S(P,Q)=\frac{1}{4\pi r},\quad r=\overline{PQ},\qquad(38)$$

の時は大変簡単になって，今Qを中心とする単位球面と $\overline{QA}$, B. C. D との交点をA'B'C'D'とすると角錐面の法線は動径 r と直交するからその上の積分は消えて

$$I(Q)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{A'B'C'D'}\frac{dS_P}{r^2},$$

となるが立体角 ω は定義により

$$dS_p = r^2 d\omega, \qquad (39)$$

であるから

$$I(Q) = \frac{1}{4\pi}\iint_{A'B'C'D'} d\omega \quad , \cdots \qquad (40)$$

となり、これはQ点から ΔS を見込む立体角である。

その計算には球面3角法の公式を利用する事が出来代数演算によって求められ、法線の方向余弦等を計算する必要はない。

このように積分の評価にグリーンの定理を適用して積分が簡単になるようにする事は2次元問題において複素積分を利用する事に相当しており、次節においても他の例を示す事にする。

また(1)の右辺第2項の積分についても同じ方法を適用する事によって簡単な評価式を得る。

一様流れの中の物体の周りの流れでは(40)を利用して(9)を解けば従来の方法に比して かなり簡単に解ける事になるが解はポテンシャルで与えられるので速度を求めるには数値微分をしなければならず、その為に精度は少しそこなわれるであろう。

しかし動揺問題では表面上の圧力(ポテンシャルに比例)を

求めればよいのでその欠点はない。

そこで以下前節の終りでの試みを少し進めて見よう。

充分遠方の検査面Lは円筒面としてポテンシャルを

$$\phi(Q) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+L+F}\left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} - \frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{R}\right]dS_P, \qquad (41)$$

と書け、これを境界面上の積分方程式と考える。

まず検査面L上の境界条件(放射条件)

$$\left(iK + \frac{\partial}{\partial r}\right)\phi(Q) = 0 \quad , \quad \text{on } L \ , \qquad (42)$$

K：波数

について考えて見よう。

これは面Lが面に垂直に上式に従って振動していると見る事が出来、この振動によって波は内側に反射していない筈である。(この条件は元来波が外側に進む条件である事から明らかである)

一方(41)でQ点が領域の外に出れば積分的に0であるから外方に波は出ていない筈で、従って(42)はL上で波を全部吸収する条件となっている。

これを水槽試験に対比させると大きい円筒形の水槽の壁全体に波吸收装置を装備してある事に相当する。

しかし水の波は側壁全面に消波装置をつけなくとも水面におけば充分であるからそのような性質を持つ特異性を考えて見よう。

まず単位強さの波をもつ特異性 S は充分遠方で次の漸近展開を持っている。[6]

$$
\left.
\begin{aligned}
S(P,Q) &\xrightarrow[r'\gg r]{} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}}\, e^{Kz' - iKr' + iKr\cos(\theta-\theta')} \\
&\xrightarrow[r\gg r']{} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r}}\, e^{Kz - iKr + iKr'\cos(\theta-\theta')}
\end{aligned}
\right\} \quad (43)
$$

ここに $P \equiv (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, $Q \equiv (r'\cos\theta', r'\sin\theta', z')$.

それ故今

$$
W(P,Q) = \left(iK + \frac{\partial}{\partial r}\right) S(P,Q) \quad , \quad \cdots (44)
$$

なる特異性を検査円筒面 L と水面 F の交線 Γ 上におくとすると (43) から

$$
\begin{aligned}
W(P,Q) &\xrightarrow[r\gg r']{} 0 \\
&\xrightarrow[r'\gg r]{} iK\sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}}\, e^{Kz' - iKr' + iKr\cos(\theta-\theta')} \{1+\cos(\theta-\theta')\}
\end{aligned}
\quad (45)
$$

となって領域内に波はなくその外側にのみ発散波がある。

この全体の速度ポテンシャルは

$$\phi_w(Q)=\int_\Gamma A(\theta)W(P,Q)\,d\theta, \quad \cdots \quad (46)$$

で(45)によって領域内には波はないが外側では

$$\phi_w(Q)\xrightarrow[r'\gg r]{} iK\sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}}\,e^{Kz-iKr'}\int_\Gamma e^{iKr\cos(\theta-\theta')}A(\theta)(1+\cos\overline{\theta-\theta'})\,d\theta, \quad \cdots (47)$$

なる波をもつ。

一方 物体の発散する波は

$$\phi(Q)\xrightarrow[r'\gg 1]{} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r'}}\,e^{Kz-iKr'}H(K,\theta'), \quad (48)$$

$$H(K,\theta')=\iint_S\left(\phi\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)e^{Kz+iKr\cos(\theta-\theta')}\,ds_P, \quad \cdots (49)$$

のように与えられるから 領域の外側に波が出て行かない為には

(47) と (48) から

$$H(K,\theta')=-iK\int_\Gamma e^{iKr\cos(\theta-\theta')}A(\theta)(1+\cos\overline{\theta-\theta'})\,d\theta, \quad (50)$$

となるように $A(\theta)$ を定めれば 領域の外に波は残らず

Γ上の特異性で波を吸収してしまった事となる。

そこで今 $\qquad \varphi=\phi-\phi_w, \quad \cdots \quad (51)$

なるポテンシャルを考えると 領域の外 ではこれは波なしであるから

$$\varphi(Q)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S+F}\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{1}{R}\right)ds_P+\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma A(\theta)\left(iK+\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{R}\,d\theta, \quad (52)$$

なる表現を得る。こゝに右辺第2項は ϕ_w の特異性が少し水面下にあって極限として水面にあると考えれば導びかれる。

境界条件は

$$\left.\begin{aligned} K\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \quad \text{on } F \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n}(\phi - \phi_w) \quad \text{on } S \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

である。

この(52)を(53)と(50)によって解けばよい訳であるがこの方法では考えて見るとPを遠方に持って行く事もなく逆に物体の内部に取り込んでしまった方が簡単になり、(52)の右辺第2項は不要となる。

所で φ は波なしであるから(30)におけるように波なし特異性

$$S_F(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\left(K + \frac{\partial}{\partial z'}\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right), \qquad (54)$$

$$R' = \overline{PQ},$$

によって例えば次のように表わせる。

$$\varphi(Q) = \iint_S \sigma(P) S_F(P,Q)\, ds_P, \qquad (55)$$

この法線微分を(53)第2式によって指定すれば σ がもとめられ解がきまり、この場合は自由表面上の積分は不要でかつ(30)の場合に現われた斉次解はないが波なし条件(49)が必要である。

またよく知られた方法として検査面を物体の近くにあるいは垂直舷側船では物体に接した鉛直面に採るものがある。

この時特に有限水深ならば検査面の外側の領域で固有関数系があるので便利である。[19]

いずれにしてもこの方法では内側(検査面と物体の間)の領域では(41)の表現を用い、外側の領域では例えば上の場合のように固有関数系で表現し、最後に検査面L上で速度とポテンシャルが内外一致するように解を定めるものである。

なお2次元では外側の表現として

$$\phi(Q) = -2\int_L \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P,Q)\, ds_P \, , \qquad (54)$$ [17]

等を使えば一層便利であろう。

5. 回転体

円筒座標を導入して $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ として，x軸に関して回転対称な物体のまわりの流れを考えよう。

まず軸対称な流れではストークスの流れ関数が存在して次のように定義される。

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (57)$$

一方(1)はθで積分して次のように書ける。

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial n_P} S^*(P,Q) - \frac{\partial\phi}{\partial n} S^*\right] r\, ds_P, \qquad (58)$$

$$S^*(P,Q) = \int_0^{2\pi} S(P,Q)\, d\theta, \qquad (59)$$

こゝに ds は縦断面 C の線素とし，$P \equiv (x, r, 0)$, $Q \equiv (x', r', 0)$,

Sがニュートンポテンシャルならば

$$S^*(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x-x')^2 + \varpi^2}}, \qquad (60)$$

$\varpi^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta$,

で完全楕円積分となる。

S^*に対応する流れ関数T^*を次のように定義しよう。

$$\frac{\partial}{\partial x} S^* = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} T^*, \quad \frac{\partial}{\partial r} S^* = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} T^*, \qquad (61)$$

これを(58)に代入すると

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial s_P} T^*(P,Q) - r\frac{\partial\phi}{\partial n} S^*(P,Q)\right] ds_P, \qquad (62)$$

一方で $T^*(P,Q)$ は Q の変数で考えると渦輪の速度ポテンシャルとなっているからこれからさらに Q に関してストークスの流れ関数 G を次のように導入出来る。

$$\frac{\partial}{\partial x}T^*(P,Q)=\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}G(P,Q),\ \frac{\partial}{\partial r'}T^*(P,Q)=-\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial x'}G, \quad (63)$$

これを用いると (63) に対応する流れ関数表示は[21]

$$\Psi(Q)=\int_c\left[\phi(P)\frac{\partial}{\partial s_p}G(P,Q)-r\frac{\partial\phi}{\partial n}T^*(Q,P)\right]ds_p\ . \quad (64)$$

従来は吹出し分布による表現(5)などと共に上式が境界積分方程式としてよく使われた[3]が2節の所論からもわかるように(58),(62)式,又は(9)のような形で用いる事が出来る。

またこれを用いるとすると軸対称流れでなくとも一般的に

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}(P)\cos m\theta \quad or \quad \phi(P)=\varphi(P)\cos m\theta, \quad (65)$$

となっている時(x軸に直角な流れでは $m=1$)も取り扱えて

$$S_m(P,Q)=\int_0^{2\pi}S(P,Q)\cos m\theta\, d\theta, \quad (66)$$

とおくと (1) は

$$\varphi(Q)=\int_c\left[\varphi(P)\frac{\partial}{\partial n_p}S_m(P,Q)-\frac{\partial\varphi}{\partial n}S_m\right]r\,ds_p\ . \quad (67)$$

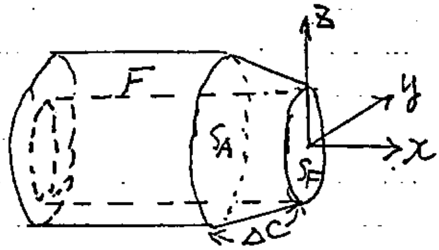
と書けてこれを使えばよい。[12][13]

この左辺の積分について4前節の初めにみたように変形して

おくと便利である。

例えば
$$I(Q)=\frac{1}{r_0^m}\iint_{\Delta S}\left[\frac{\partial}{\partial n}S(p,Q)\right]r^{m}\cos m\theta\, r\,dr\,d\theta, \qquad (68)$$

なる積分を考えて見よう。



φはこの区間で $(r/r_0)^m\cos m\theta$ となっているものとする（r_0は区間中央の値）とグリーンの定理より
$$I(Q)=\frac{m}{r_0^m}\cos m\theta\int_{\Delta C}r^{m+1}\frac{dr}{\partial n}S_m(p,Q)\,ds_p+\frac{1}{r_0^m}\iint_{S_F-S_A}\frac{\partial}{\partial x}S\; r^{m+1}\cos m\theta\,dr\,d\theta, \qquad (69)$$

右辺第2項の積分は後続円筒面F上の積分とする事も出来
$$\iint_{S_F}\frac{\partial S}{\partial x}r^{m+1}\cos m\theta\,d\theta\,dr=\iint_{F}\left(\frac{\partial S}{\partial r}-\frac{m}{r}S\right)r^{m+1}\cos m\theta\,d\theta\,dx, \qquad (70)$$

この右辺第1項から留数分が出て来るので注意すべきである。

Sがニュートンポテンシャルならばこれらの積分はすべて完全楕円積分で表わされるがmが大きい時は複雑になるのでむしろ(40)によってθ方向に数値積分する方が簡単であろう。

6. 結論

以上無限に広がったあるいは自由表面を持つ水の中の物体の周りの流れを求める為に物体および境界面に特異点をおいて積分方程式を作る方法について従来から多用されている吹出し分布法を含めて種々の表現を列挙し，利害得失相互関係について検討し，それぞれの場合に現われる積分の評価にグリーンの定理を利用する事を提案しまた波の問題について積分方程式およびその核関数の簡略化について考察した。

結論を列挙すれば

1) 境界上の特異性としては吹出し吸込み分布，2重吹出し分布，サーキュレーション分布以外に直接速度ポテンシャルを未知数とする方法もあり，これはいくつかの点で吹出し分布よりはすぐれている。

2) 上記各種方法による解の特異点分布の間には比較的簡単な関係があり，相互に換算可能である。

3) 積分方程式に現われる特異積分の評価にはグリーンの定理を使って便利な面積分（3次元の場合）に変換する事が推奨される。

4) 速度ポテンシャル又は2重吹出しを未知数としてここに提唱する方法では回転体の軸方向に垂直な流れでも軸対流れと略同じ位単純化される。

5) 波の放射散乱問題では核関数が複雑になるので
それを簡略化出来ると計算時間が短縮されると考えられる。
6) その方法には2つあって1つは物体と検査面との間の領域
でニュートンポテンシャルで表現するものでもう1つは物体
と同じ波を吸収する特異性を仮想してその差が
波無しポテンシャルとなる事からそれを物体上の波無し特異点の
分布で表現する方法である。

以上.

参照文献

1) 日本造船学会編「第2回耐航性シンポジウム」第1篇 昭和52年2月
2) Brebbia, C.A. "The Boundary Element Method for Engineers" Pentech Press, Plymouth, 1978
3) 広瀬直喜「計算空気力学の展望」日本航空宇宙学会誌 28巻 318号 昭和55年
4) 別所, 経塚「水の波の理論における内部問題について」西部造船会会報 57号 昭和57年3月
5) Motoshima, H, "Radiation and Diffraction of Shallow Water Waves by an Arbitrary Number of Bodies", 日本造船学会論文集 147号 昭和55年
6) Bessho, M., "On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water", Mem. of Defense Academy, Japan, vol. 8, 1968
7) 前田久明「任意船型に及ぼす波の強制力について」日本造船学会論文集 126号, 昭和44年
8) 別所, 小松「水面で動揺する2次元平板に働く流体力について」関西造船協会誌 154号 昭和49年9月
9) Bessho, M, "A Contribution to the Theory of Free Surface Flow", Mem. of the Defense Academy, Japan, vol. 10, No. 2, 1970
10) Dawson, C.W., "A practical computer method for solving ship-wave problems" 2nd Internat. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, 1977
11) Yeung, R.W. & Bouger, Y.C., "Hybrid Integral Equation Method for Steady Ship-Wave Problem", Do.
13) Kyozuka, Y. & Yoshida, K. "On Wave-Free Floating Body Forms in Heaving Oscillation", Applied Ocean Research, to be published, 1980
12) 佐尾邦久「動揺する物体の左右揺れおよび横揺れについて」日本造船学会論文集 140号 昭和51年
14) 経塚雄策「2次元物体に働く非線型流体力について（第1報）前進問題」日本造船学会 昭和55年秋季講演会講演予定
15) Ursell, F., "On the heaving motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid", Q.J.M.A.M. vol. 2, 1949
16) Ursell, F., "Water Waves generated by Oscillating Body", Q.J.M.A.M. vol. 7, 1954
17) Havelock, T.H. "Forced Surface Waves on Water", Phil. Mag. S.7. vol. 8, 1929
18) 木野俊明「半没柱状体の左右揺れおよび横揺れについて」日本造船学会論文集 127号 昭和45年

19) 井島, 田渕, 湯村「有限水深の波による円柱状浮体の運動」土木学会論文集 206号, 1972
20) 森正武 訳 Forsythe 他「計算機のための数値計算法」科学技術出版社 1978
21) 別所, 水野「ダクト付プロペラの推力減少について」(第1報) 関西造船協会誌 163号 昭和51年.