

A-8-2

1980-1-05
52-3-1

翼理論に関する覚書

別所正利

A Short Note on Aerofoil Theory
—— Lagrangean and Arbitrality of Solution ——

Masatoshi Bessho

June 27 , 1980

52-3-1

No. 水野/教授

Date 55.6.27

翼理論に関する覚書

別所 公利

"A Short Note on Wing Theory"
(Lagrangian and Arbitrariness of Solution)

By Masatoshi Bessho

内容目次

概要

1. 相反定理とラグランジアン
2. 速度ポテンシャルと漸近展開
3. 解の任意性

結論

参考文献

頁

1

2

6

8

12

13/13

概要

水の波の理論は先行した翼理論に多くのものを負っている事は周知の通りであり、今尚我々が新しい角度に取組む時に殆ど唯一の範例である。

しかしながら船には船特有の事情があって飛行機の翼理論をそのまま適用するのは必ずしも適当でない場合がある。

本文はこのような過程でこの数年の間に著者が気づいた事を記して見たものである。

先ず1節では翼理論における相反定理について従来使われている H. A. Schlichting の変分原理に基づくもの以外に花岡が造波抵抗理論について導出した第2定理を紹介しその汎関数は運動ポテンシャル又はラグランジアンである事を説明する。

次に2節では造波理論的な記述で翼理論を表現し3節では境界値問題の積分方程式を少し変形してその任意性について考察する。

1. 相反定理と Lagrangean

Flax の 変分原理は 2 の 相反定理 (Munk's) から導かれる。

$$\iint_H p_1 \tilde{w}_2 dF = \iint_H \tilde{p}_2 w_1 dF, \quad \dots (1.1)^{(4)}$$

ここで H は 翼面, dF はその面積, $(p_1, w_1), (\tilde{p}_2, \tilde{w}_2)$

は 上流の圧力と x -方向速度で $(\sim) p$ は 逆流れの量である事を示す。

花岡は 逆流れ理論において 上式に対応するものを ϕ 1 定理と称し, もう一つの ϕ 2 定理を導出している。⁽³⁾

$$\iint_H \Delta \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} dF = \iint_H \Delta \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dF, \quad \dots (1.2)$$

ここで ϕ_1 は 速度ポテンシャルで $\Delta \phi$ は H の 上下の差を意味する。

これは H が 薄翼で なりし時は 次のように なる。

$$\int_S \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial n} dS = \int_S \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS, \quad \dots (1.3)$$

ここで n は 面 S の 法線とする。

一方 (1.1) は 薄翼でなければ成立せず,⁽³⁾ また 多くの条件を満たす流れでなければならぬ。

しかし (1.2), (1.3) ではその必要がないので一般性がある。

さて薄層理論では更に

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial z} dx = \zeta(x, y, z), \quad (1.4)$$

なる量, つまり流体粒子の z 方向変位を導入すると (1.2) は次のように書ける。

$$\iint_H p_1 \zeta_2 dF = \iint_H p_2 \zeta_1 dF, \quad (1.5)$$

これは Munk の定理と同様に有用である。⁹⁾

しかし (1.1) は誘導抵抗を意味するのに対して (1.2), (1.3)

又は (1.5) は物理的意味が判然としない。

一方流体力学理論では (1.3) はラグランジアンつまり運動

エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であることが

わかって⁹⁾いるので流体力学理論でもそうなる¹⁰⁾と考えられる

が、この場合のポテンシャルエネルギーとは何であろうか。

さてこの点を考える前に (1.2) の形での z の積分を
考えよう。

$$L = \frac{\rho}{2} \iint_F \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \quad (1.1)$$

壁面 Γ とその後方にはそれに連続して Trefftz 面 T を考え
 又 充分大きい Γ, T を含む 球面 R との間に包まれる
 領域を D とすると グリーンの定理により

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz - \iint_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF + \frac{\rho}{2} \iint_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial R} dS$$

○ となるが (2.6)(2.7) により 右辺 1 項の積分は 0 と
 なるので 結局

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz = \frac{\rho}{2} \iint_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \quad \dots (1.17)$$

右辺 1 項は 明らかに 運動エネルギーであり、 ϕ 2 項
 は Trefftz 面の 運動エネルギーを流れ方向に積分したもの
 であり 両者共 無限大となるが その差は有限となつて
 いる。

これは又 圧力を積分しても同じ開きになり ラグランジュ
 ンである事が 古くから示されている。

従って (1.17) 右辺 2 項は ポテンシャルエネルギー
 に対応している事になるが この辺を 理解する 爲に
 次に 考えて 見よう。

今原点に P のサーフェー・ソースをおき、それから x 離れた点に
 強度は同じで向きが反対の渦をおくと相互引力 F は

$$F = \frac{\rho P^2}{2\pi x}, \quad \dots (1.8)$$

相互距離 A なる点から一方の渦を R なる距離まで
 準静的に引きはなすに必要な仕事 U は

$$(1) \quad U = \int_A^R F dx = \frac{\rho P^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{A}\right), \quad (1.9)$$

これは定義からポテンシャル・エネルギーである。

一方 R が充分大きい時の渦 P の運動エネルギーは
 $\phi = \frac{P}{2\pi} \theta$ であるから

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{T}{2} &= \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = \frac{\rho}{2} \int_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds - \frac{\rho}{2} \int_E \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds \\ &\quad - \frac{\rho}{2} \int_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dV, \end{aligned}$$

ここに R は充分大きい円、 E は原点周りの小さい円、
 T は適当な cut とする。

明らかに右辺の 1, 2 項は 0 となるから 2 つの渦の
 運動エネルギーは

$$T = \frac{\rho P^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{A}\right), \quad \dots (1.10)$$

それ故 2 の場合は

$$T - U = 0, \quad \dots (1.11)$$

一般には有限となつて (1.3) の形になる。

またこの誘導の過程から考えると 吹き出しが存在する場合も同様に 最初有限な所に吸込みを考えれば準静的に無限遠^方まで持つて行く仕事は位置エネルギーである。

2. 速度ポテンシャルと漸近展開

この節では普通に知られている Trefftz 面より充分後流側の速度ポテンシャルの近似値と共に充分上流側の値の近似値を求める。

さて速度ポテンシャルは²⁾

$$\phi(x, y, z) = \iint_H p(x', y') S(x-x', y-y', z) dF(x', y'), \quad (2.1)$$

2. に p は圧力分布を ρU^2 で割ったものとし
以下速度は単位と考える。

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi\rho^2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right) = \frac{z}{2\pi r(1+x)}, \quad (2.2)$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

充分遠方では

$$S(x-x', y-y', z) \rightarrow S(x, y-y', z) + x' \frac{\partial}{\partial x} S(x, y-y', z) + \dots \quad (2.3)$$

のようになるので 第1項のみをとると上流側では

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi r(y+x)} \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi r^2} \text{ or } \frac{z}{4\pi x^2}, \quad (2.4)$$

下流側では

$$S(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{|x|}{r}\right) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{z}{\pi r^2} - \frac{z}{4\pi x^2}, \quad (2.5)$$

よって (2.4) を (2.1) に代入して

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi x^2} \iint_H p dH + \dots \quad (2.6)$$

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{z}{\pi} \iint_H \frac{p(x', y') dH}{z^2 + (y-y')^2} - \frac{z}{4\pi x^2} \iint_H p dH + \dots \quad (2.7)$$

言うまでもなく (2.7) の第1項は Trefftz plane の速度ポテンシャルで 第2項は (2.6) つまり上流側の値と符号が逆になっておりこれは揚力に比例する。

またこれらの式は $r \div x$ と仮定したから 3次元の場合には (2.2), (2.4) から もっと正確に見積る事が出来る事は自明だろう。

3. 解の任意性

よく知られているように境界条件は次の積分方程式

となる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = w(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{p(x', y')}{(y-y')^2} \left[\frac{x-x'}{R} - 1 \right] dx' dy', \quad (3.1)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

この解は壁後端においてクッタの条件を満たす

時に一意的に定まると考えられている。

しかし本来渦のある流れは粘性を考慮しない限り不定

であって数学的には決められず物理的に最と

ももらしい数学モデルがあるだけである。

又実際例では「矩形翼などで後端で」

Kuttaの条件を満たすのは当然として壁立端はどうなる

のかあるはどうかは一つの問題である。

その辺を考えるために上式を少し変形し解の任意性

がどれ位あるかを調べて見よう。

その為には上式を x で微分したものを考えよう。

$$\frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_F \frac{p}{r} dF, \quad (3.2)$$

ϕ はラプラスアンを満たすから上式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, 0) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_{\Pi} \frac{p}{R} dx' dy', \dots (3.3)$$

あらためて

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Pi} \frac{p}{R} dF = f(x, y), \dots (3.4)$$

として f を未知関数とすると (3.3) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, 0), (3.5)$$

となってポアソンの微分方程式となる。

それ故 解は 特解 $a(x, y)$ と $\sqrt{4\pi}$ の $\sqrt{4\pi}$ の調和関数となる。

$$f(x, y) = a(x, y) + h(x, y), \dots (3.6)$$

これを (3.4) の右辺に代入すると 準特異核を

持つ積分方程式となり 教科書によれば

解 p は一意的に定まる。

従って 解の一意性は (3.6) の調和関数に依存し それは Π 内で級数展開する考えると可附番無限個だけある。

さて もう少し 具体的に 境界条件を考えよう。

簡潔のために、

$$w(x, y, 0) = \alpha + \beta x, \quad (3.7)$$

とかくと視察によつて特解 q を

$$q(x, y) = \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \quad (3.8)$$

と置いておこう。右辺の1項は(3.5)からは決まらないけれども、^{調和関数で}こうおいても不都合はないだろう。

- これに対する(3.4)の解は αx に対しては ρ は前後対称 (以下 F は前後対称量とする), $\frac{\beta}{2} x^2$ に対しては前後対称となりこれは更に渦なし流れであると考えられ当然前後端で無限大となっているだろう。

- したがってクツタの条件を満たす為には(3.6)の調和関数に対応する ρ の解を利用せざるを得ない。つまり具体的に後縁の N 個の点でクツタの条件を満たすには N 個の解が必要である。それではこの解を一杯用意して前縁でも流入条件を満たす (Shock-free) 事が出来るかと言うと対称量で考えればわかるようにそれは $\alpha = 0$ の場合しかないだろう。

以上の考察から少なくとも対称翼では後縁全体でクッタの条件を満たす事が出来ると考えられる。

従って最初に考えた矩形翼では翼端^{（2）}の後半部分についてはクッタの条件を指定してよいと考えられる。

- さて最後に積分方程式 (3.4) は (3.1) に比べて特異性が弱いので数値計算上都合がよいと考えられまた一方近似理論を作るにも都合がよいと考えられる。

今例として細長翼理論を取りあげよう。

まず翼幅方向に積分分布を仮定すれば

$$p(x, y) = \frac{2\sqrt{\eta^2(x) - y^2}}{\pi} l(x) \sqrt{\eta^2(x)}; \quad (3.9)$$

(3.4) の左辺は

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{l(x') dx'}{\eta^2(x')} \int_{\eta(x)}^{\eta(x')} \frac{\sqrt{\eta^2 - y'^2} dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = a + b; \quad (3.10)$$

y' に同じ積分は $y=0$ とおくと完全積分積分となり $x=x'$ で対数的特異性を有しその見積りについては 1 案を示した事がある。¹⁰⁾

(3.4) の右辺の任意関数 $l(x, y)$ は左右対称性が

$$h(x, y) = 1, x, x^2 - y^2, \dots \quad (3.11)$$

であつて、 $y=0$ の際には x の巾級数としてよい。

しかもそれは任意でよいので解は決まらなくなる。

これは (3.9) のように圧力分布を仮定ししかも中心線上でのみ境界条件を指定した所爲で、この場合は (3.11) の ϕ 2 項までとすべきである。

つまり y 方向の揚力分布形に応じて (3.11) の項数を増やしておけばよい事になる。

結論

以上薄翼理論においても花岡の ϕ 2 相反定理は有用であり得る、特にクツタの条件を満たさないものにも適用出来る点で、事その積分はラグランジアンである事を示し次に遠場特に上流側の漸近展開を求め最後に境界積分方程式を変形して解の任意性を陽にあらわし、クツタの条件の指定範囲について考察した。

参考文献

- 1) R. Hargreaves, "A Pressure Integral as Kinetic Potential" *Phil. Mag.* 1923, pp. 436~445
- 2) H. Ashley & M. Landahl "Aerodynamics of Wings & Bodies" Addison-Wesley, 1965
- 3) T. Hanacka, "On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory", *Proc. 9-th Japan Nat. Congress for Appl. Mecha.*, 1959
- 4) D.E. Davies, "An Application of Flax's Variational Principle to Lifting Surface Theory", *R. & M. No 3564*, Apr. 1967
- 5) H.R. Lawrence, "The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds," *J. of Aeron. Sci.* Oct. 1951
- 6) E.O. Tuck, "Some Method for Flow past blunt Slender Bodies", *J.F.M.* vol. 18, 1964
- 7) F. Ursell and G.N. Ward, "On some general theorem in linearized theory of compressible flow", *Q. J. M. A. M.* vol. 3, 1950
- 8) M. Bessho & K. Nomura, "A Contribution to the Theory of Two-dimensional Hydro-planing", *Mem. Def. Acad.* vol. 10, 1970
- 9) M. Bessho, "Variational Approaches to steady Ship Wave Problem", 8-th Symp. on Naval Hydro. 1970
- 10) 別冊正刊 "組立翼組立体理論に對する賞与" 水模型委員会第2部会資料 昭和50年6月27日