

A

M-117

No.

Date

59.7.9.

100%

物理力学

浮体による水中音波の放射散乱

別紙

内容

概要

頁
0

1. 速度ポテンシャルと境界条件

1

2. 可逆定理

3

3. 放射パワー

5

4. 物体の振動

6

5. インピーダンス

9

6. ハスケットの定理の拡張

11

7. 小質量等の附加, 除去による振動の変化

13

8. インパルス応答

16/19

概要

船の外板のある点に振動力を加えた時の船体振動に伴って出来る音場と放射音圧の関係を定式化して見た。

つまり加振点の位置と放射音圧並びに指向特性には振動モードが大きく関係しているので、^{マトリクス}イモータリクスを計算して、放射音場を調べてみる必要がある。

この問題では音響学と弾性学を同時に扱う必要があるのだからこの意味から

Structural Acoustics とでも呼ぶべきであろう。 (Hydro-Acoustic Elasticity)

また音響学は流体力学の一部門と見なせるしそれに解決の手法も流体力学に似ているから Acoustical Hydro-Elasticity or Hydro-Elastic Acoustics と呼ぶのも適当かと考えらる。

1. 速度ポテンシャル

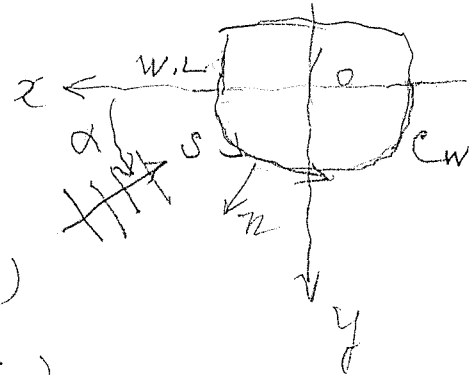
運動方程式は

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (1.1)$$

圧力は

$$p = -\rho i\omega\phi, \quad (1.2)$$

$$\nabla\phi = (u, v) \quad (1.3)$$



自由表面では圧力は一定であるから (1.2) より

$$\phi(x, 0) = 0 \quad (1.4)$$

物体境界 C 上では法線速度 $i\omega W(S)$ が与えられる

とすると

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = i\omega W(S) \quad \text{on } C, \quad (1.5)$$

今

$$S(P, Q) = \frac{i}{4} \left\{ H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR') \right\}, \quad (1.6)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad R' = \overline{PQ'} = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

とすると ϕ は次のように表わされる。

$$\phi(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial\phi}{\partial n} S(P, Q) \right] ds, \quad (1.7)$$

充分遠方では S は

$$S(P, Q) \xrightarrow{R, R' \gg 1} \frac{i}{2\sqrt{2\pi kR}} e^{-ikR + \frac{\pi i}{4}} \left[e^{ik\omega} - e^{ik\omega'} \right],$$

$$\omega = x\cos\theta' + y\sin\theta', \quad \omega' = x'\cos\theta' - y'\sin\theta', \quad (1.8)$$

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad x' = R'\cos\theta', \quad y' = R'\sin\theta'$$

であるから (1.7) に代入すると

$$\phi(\mathbf{Q}) \xrightarrow{r' \gg 1} \frac{i}{2\sqrt{2\pi k r'}} H(k, \theta') e^{-ikr' + \frac{\pi}{4}\pi}, \quad (1.9)$$

$$H(k, \theta') = \int_{C_N} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} (e^{ik\vec{\omega}} - e^{ik\vec{\omega}^*}) d\mathbf{s}, \quad (1.10)$$

さてここで α の方向から来る入射波を考えよう。

それは必ずしも水面からの反射波を含むから

$$\phi_0(x, y, \alpha) = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} - e^{ik(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}, \quad (1.11)$$

この入射波が物体によって反射・散乱される

ポテンシャル ϕ_a の境界条件は

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n}, \quad \text{on } C_W, \quad (1.12)$$

2. 可逆定理とハスキントの定理

$$L_w^*(\phi, \psi) = \frac{\rho}{2} \iint_D [\nabla \phi_1 \nabla \phi_2 + \rho \phi_1 \phi_2] dx dy, \quad (2.1)$$

なる汎関数 L_w^* を導入すると部分積分により

$$L_w^* = -\frac{\rho}{2} \int_{C_w} \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS = -\frac{\rho}{2} \int_{C_w} \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS, \quad (2.2)$$

より可逆定理をうる。

今境界条件が (1.5) で与えられるとすると (1.2) の関係がある故に式は

$$L_w^* = \frac{1}{2} \int_{C_w} \rho_1 w_2 dS = \frac{1}{2} \int_{C_w} \rho_2 w_1 dS, \quad (2.3)$$

と書く事も出来、これは相互イソポテンシスの可逆性を表わしている。

特に ϕ_2 を散乱ポテンシャルとすると (1.12) より

$$\int_{C_w} \phi \frac{\partial \phi_d}{\partial n} dS = \int_{C_w} \phi_d \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (2.4)$$

と互換から (1.10) に適用すると

$$C-H(k, \theta') = - \int_{C_w} \{ \phi_0(p; \theta') + \phi_d(p; \theta') \} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (2.5)$$

となり、ハスキントの定理をうる。

* ϕ なるポテンシャルの電場は (1.9) で示されるように Kochin 周数 H で与えられるから、この H の一方では入射波によって受ける力に等しい事を示している。

特殊な例としては " $H=0$ ならば" (wave-free) 入射波から力は受けないし、また 波を放射しない。
(2.5) を (2.3) のように書けば

$$H(R, \theta') = \frac{1}{\rho} \int_{CW} [P_0(\theta') + P_d(\theta')] w \, ds \quad (2.5')$$

3. 放射パワー

物体が水に対して静止しているとき、電磁波は、電磁波の

$$P = \frac{1}{4} \int_{C_w} \left[p \frac{\partial \phi}{\partial n} + \bar{p} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} \right] ds = \frac{\rho \omega}{4\pi} \int_{C_w} \left[\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (3.1)$$

φは調和関数である。また、経路は

充分遠方の半円 R 上に取るとよく、そこで

(1.9) と近似出来る。

$$P = \frac{\rho \omega}{16\pi} \int_0^\pi H(k, \theta) \overline{H(k, \theta')} d\theta', \quad (3.2)$$

これは π/2 - 角の形に

$$P_{ij} = \frac{1}{4} \int_C \left[p_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} + \bar{p}_j \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} \right] ds, \quad (3.3)$$

とすれば

$$P_{ij} = \frac{\rho \omega}{16\pi} \int_0^\pi [H_i(k, \theta) \overline{H_j(k, \theta)}] d\theta, \quad (3.4)$$

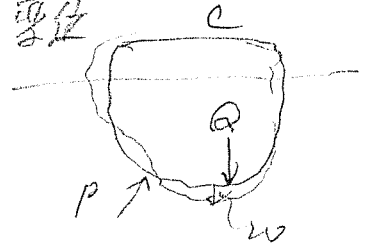
と書くことも出来る。

物体の振動

物体の振動方程式は

$$-\omega^2 M(s) w(s) + \frac{d^2}{ds^2} \left(D(s) \frac{dw}{ds} \right) = -p + Q(s), \quad (4.1)$$

M は質量分布, D は剛性, w は振動変位
 p は水圧, Q は強制外力とする。



(5.1) に $\frac{w}{2}$ をかけて積分すると

$$L_s^* = \frac{1}{2} \int_c \left[D(s) \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 + \omega^2 M(s) w^2(s) \right] ds, \quad (4.2)$$

とかくと

$$L_s^* = + \frac{1}{2} \int_c p w ds + \frac{1}{2} \int_c Q(s) w(s) ds$$

となるから (2.3) を使って, (c の空中の部分では $p=0$ として)

$$L_s^* + L_w^* = \frac{1}{2} \int_c Q w ds, \quad (4.3)$$

今 Q が $s=s_0$ における単位外力である時にこれを解く事を考えて見よう。

まず"適当な直交関数系 $\{w_j\}$ を考えよう

$$\int_c w_j w_k ds = \delta(j-k), \quad \text{--- (4.4)}$$

一本船で c 簡単にとけるならば" 空中における

固有振動のモード" となるから最も便利である。

まず

$$Q = \delta(s-s_0) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(s_0) w_j(s), \quad \dots (4.5)$$

で表すから、今
と書いて

$$w(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j w_j(s), \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{2} \int_C \left[D \frac{d^2 w_i}{ds^2} \frac{d^2 w_j}{ds^2} - \omega^2 M(s) w_i w_j \right] ds = L_{ij}^{(s)},$$

$$\frac{1}{2} \int_{C_W} p_i w_j ds = \frac{1}{2} \int_{C_W} p_j w_i ds = L_{ij}^{(w)}, \quad (4.7)$$

とおくならば" (たゞし p_i は C_W が w_i で振動する
時の圧力とする), (4.3) に w_i をかけて (4.7) を分

すと

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j [L_{ij}^{(s)} + L_{ij}^{(w)}] = w_j(s_0), \quad \dots (4.8)$$

となつて、これを解けば a_j が求められる、問題は
解ける。

もしも w_j が 定中の固有振動モード になっているならば

$$L_{ij}^{(s)} = (\omega_j^2 - \omega^2) \delta(i,j), \quad \dots (4.9)$$

のようになっていて、大変簡単になる。

この時のコッテン関数は (2.5) に表わす。

$$H_j(k, \theta) = \frac{1}{P_0} \int_{CN} P_d(P; \theta) w_j(s) ds, \quad (4.10)$$

$$(4.1) \quad P_d(P; \theta) = p_0 + p_d = -p_0 a (\phi_0 + \phi_d),$$

と表すと

$$H_j(k, \theta) = \sum_{j=0}^{\frac{1}{2} \frac{N}{2}} a_j H_j(k, \theta), \quad (4.11)$$

と与えられるから、 θ 方向への ^{平均} 放射パワーは
また (3.2) で $\frac{1}{N}$ 計算される。

$$\left[\begin{array}{l} Z = R + iX \\ \text{Impedance} = \text{Resistance} + \text{Reactance} \\ \frac{1}{Z} = Y = G + iB \\ \text{Admittance} = \text{Conductance} + \text{Susceptance} \end{array} \right]$$

No. 9

Date

5. イムピーダンス

今力又は電圧を電圧, 電流を電流と認めてみる

イムピーダンス Z は

$$Z = V/I, \quad V: \text{力}, \quad I: \text{電流} \quad (5.1)$$

今振動体に ^{外力} 単位力 Q が加えられた時の ^{s_0 点の} 変位速度は

$$I = i\omega W(s_0) = i\omega \sum_{j=0}^{\infty} a_j w_j(s_0) \quad (5.2)$$

今 (5.2) の解を

$$a L = W(s_0), \quad a = L^{-1} W(s_0) \quad (5.3)$$

と置くならば

$$Y = \frac{1}{Z} = I = i\omega (W(s_0), a) = i\omega (W(s_0), L^{-1} W(s_0)) \quad (5.4)$$

これをアドミタンス (イムピーダンスの逆数) とする。

それ故に ^{単位} 外力 Q の作る単位時間の仕事 (パワー) は

$$P = \operatorname{Re} \left[\frac{Q^2}{Z} \right] = \operatorname{Re} \{ Z |I|^2 \} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\omega \{ W(s_0), L^{-1} W(s_0) \}} \right\}, \quad (5.5)$$

$$\text{つまり} \quad Z = R + iX, \quad (5.6)$$

とすれば今は

$$P = \frac{|Q|^2 R}{R^2 + X^2} = \operatorname{Re} \{ Y \} |Q|^2 \quad (5.7)$$

なお (5.5) とすると振動振動はすべて実効値, つまり
振動の $1/\sqrt{2}$ に等しいことになる。

今はこのパワーはすべて音響パワーとして放射
されて、(3.2)に等しくなっているわけである。

それ故 P を小さくするには Y の実部もしくは ~~抵抗~~ ^{減衰} R
を 0 とすれば $P=0$ となる。

一方減衰抵抗を増やす方法では今それを R_L と
すると

$$P = \frac{R+R_L}{(R+R_L)^2 + X^2} |B|^2, \quad \dots (5.8)$$

となるので、あまり目覚ましい効果はあげられない

ように見える。(もっともこの場合この全部が音になるわけではない)

(6.4) から見れば S_0 点の変位が小さければアドミタンス
は小さいから、外力の作用点 ^{主要} が振動モードの
節点になる所であればよい事になる。

6. ハスキントの定理の拡張

δ 変高土場の可逆定理であるが、物体の振動
について同様な可逆定理がある。

即ち (4.3) において 左辺の量 (Modified Lagrangian)
の対称性から 外力 Q_1 に対する解を w_1 , Q_2 に対する
解を w_2 とすると

$$\int_c Q_1 w_2 ds = \int_c Q_2 w_1 ds, \quad \dots (6.1)$$

なる可逆性が成立つ。

これは もつと複雑な構造でも 互に減衰があつても
成立つ。

特に 外力が 非強制力、つまり 入射波による力であ
るならば (4.

$$Q_2 = P_d(p; \theta) = p_0 + p_d, \quad \dots (6.2)$$

(6.1) を代入して (2.5') により

$$\int_{c_w} P_d w_1 ds = P H(k, \theta) = \int_c Q_1 w_2 ds = Q_1 w_2(s_0) \quad (6.3)$$

$$\therefore Q_1 = Q_1 \delta(s - s_0)$$

つまり、入射波による s_0 点の変位 $w_2(s_0)$ は

s_0 点に単位外力を加えて 共振する時 放射する

音場の指向特性 H に等しい。

これが構造物も含めた系に与えるハスチンズの定理である。

それ故 ある方向が入射波を受けている時の物体各部の振動変位 w を測定すれば、その点に起振源がある時の入射波方向への放射音圧がわかる。

例えば特に $w=0$ となる点があったとするとそこは起振源を置いた場合入射波方向には音は出て行かない。

7. 小質量等の附加, 除去による振動の変化
 実際上の問題として 機械の移動, 減衰材
 の附加, 剛性の変更等によって音放射特性
 がどう変わるかを推定したい。

そこで これらの変化が小さくて, 高次の項は
 省略出来るとして それらを見積る式を導こう。

また 前節 (6.3) のハスオートの定理により, 入射波
 を受けて振動する時の変位がわかれば, その点に
 起振源がある時の音の放射特性はわかるから
 結局, 質量等の変化による各点の変位の変化
 (入射波の放射問題において)
 を見積るだけで充分である。

それ故 運動方程式は (4.1) より

$$-\omega^2 M(s) w(s) + \frac{d^2}{ds^2} \left(D(s) \frac{dw}{ds} \right) + \rho = P_a(s; \theta), \quad (7.1)$$

この解 w が求められたとして, この系に小質量 m
 減衰係数 β , 剛性 ρ が s_0 点に
 加えられたとすると w は

Δw だけ増し, ρ は $\Delta \rho$ だけふえる。
 (物体形状は変化しないので)
 しかし入射波圧力 P_a は変らない。

それ故 高次の項を省略すると Δw に

に対する運動方程式は

$$(-\omega^2 m + i\omega \beta) w(s) \delta(s-s_0) + \frac{d^2}{ds^2} \left[\gamma \frac{d^2 w}{ds^2} \delta(s-s_0) \right] + \Delta p + \frac{d^2}{ds^2} \left(D(s) \frac{d^2 w}{ds^2} \right) = 0, \quad (7.2)$$

ここで 弾性直交系 $\{w_j(s)\}$ を導入すると、つまり

$$\int_C w_j(s) w_l(s) ds = \delta(j, l), \quad \int_C D \frac{d^2 w_l}{ds^2} \frac{d^2 w_l}{ds^2} ds = \lambda_{jl}^2 \delta(j, l), \quad (7.3)$$

とすると

$$\Delta w = \sum_{j=0}^{\infty} (\Delta a_j) w_j, \quad (7.4)$$

と仮定出来るとして、(7.2) に w_j をかけて積分すると

$$\lambda_j^2 \Delta a_j = (-\omega^2 m + i\omega \beta) w(s_0) w_j(s_0) + \gamma w''(s_0) w_j''(s_0) + \int_C \Delta p w_j ds, \quad (7.5)$$

であるが右辺最後の項は可逆定理より

$$\int_C \Delta p w_j ds = \int_C p_j \Delta w ds = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta a_l \int_C p_j w_l ds$$

となるが (4.1) において外力 $Q=0$ とおき、この積分を

計算すると (7.3) の直交性があるならば

$$\int_C \Delta p w_j ds = \Delta a_j \int_C p_j w_j ds = 2L_j \Delta a_j \quad (7.6)$$

(17.5) に代入して

$$\Delta Q_j = \frac{\omega(\omega_m - i\beta)w(s_0)w_j(s_0) - \gamma w''(s_0)w_j''(s_0)}{\lambda_j^2 + 2L_j}, \quad (17.5')$$

(17.4) に代入すると

$$\begin{aligned} \Delta w(s) = & \omega(\omega_m - i\beta)w(s_0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j(s_0)w_j''(s)}{\lambda_j^2 + 2L_j} \\ & - \gamma w''(s_0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j''(s_0)w_j(s)}{\lambda_j^2 + 2L_j}, \quad (17.6) \end{aligned}$$

初めてののべたようにこれから (6.3) により、^(s₁ 位の)単位外力 Q₁ による放射場の指向特性の変化 ΔH は

$$\Delta H(k, Q) = \Delta w(s_1), \quad (17.7)$$

と与えられる。

特に周波数の変化がなげ場合は、

$$\Delta w(s) = \omega(\omega_m - i\beta)w(s_0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w_j(s_0)w_j''(s)}{\lambda_j^2 + 2L_j}, \quad (17.6')$$

のように簡単になり、例えば "w(s₀) = 0 ならば"

放射特性は近似的に変化がなげ事になる。

これは一方では前節でのべたように その方向に音が放射

しない条件であつたから、結局 振動振中の小さい
るから 振動を移す時は 左へ果てしなく移る

8. イmpルス応答

以上の議論は単一周波数に関するもので実際には、いろいろな周波数における応答が知りたい。
これは一般線型重ね合わせ理論を適用する
他ないので全周波数成分を等しく含むイmpルス
による応答を求めるのが实际的である。

まず前節までの周波数領域の量を時間
領域に移すにはフーリエ変換すればよく、例えば

変位は

$$w(s; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(s; \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.1)$$

で逆に

$$w(s; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(s; t) e^{-i\omega t} dt, \quad (8.2)$$

となる。

速度ポテンシャルも同じく、

$$\phi(p; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p; \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.3)$$

$$\phi(p; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p; t) e^{-i\omega t} dt, \quad (8.4)$$

(1.9)より直場で

$$\phi(p; t) \xrightarrow{r \gg \lambda} \frac{i e^{\frac{\pi}{4} i}}{4\pi\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k; \theta) \frac{e^{-ikr + i\omega t}}{\sqrt{k}} d\omega, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (8.5)$$

(8.10) 12 (8.4) を代入すれば

$$H(k, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \int_{CW} \left[\phi(p, t) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi(p, t)}{\partial n} \right] \left[e^{ik\vec{\omega}} - e^{ik\vec{\omega}^*} \right] ds, \quad (8.6)$$

これを (8.5) に代入すると

$$\phi(p, t) \xrightarrow{r \gg 1} \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{CW} \left[\phi(p, \tau) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] I(p, Q, t-\tau) ds, \quad (8.7)$$

$$I(p, Q, t) = \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr + i\omega t}}{\sqrt{k}} d\omega \left[e^{ik\vec{\omega}} - e^{ik\vec{\omega}^*} \right], \quad (8.8)$$

$$\vec{\omega} = x' \omega \theta' + y' \omega \theta', \quad \vec{\omega}^* = x' \omega \theta' - y' \omega \theta',$$

I は ランゲル関数 である (この式は少々あやしいので 検討すべきである。文献にあるはず) か

とにかく 'イムハリス' 入力に対する 応答 である。

エツ42 式が求まっている場合は (8.5) によ

り、この場合は (8.4) により $\phi(p, t)$ を $\phi(p, \omega)$ に

$$\text{変換すれば} \quad \phi(p, \omega) \xrightarrow{r \gg 1} \frac{e^{\frac{3}{2}\pi i}}{2\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} H(k, \theta) \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{k}} d\omega, \quad (8.9)$$

なおこれらの式で ω の虚の部分は $f(\omega) = \overline{f(-\omega)}$ (± 符号は絶対値をとる) として考えればよい。

1 (8.1) 節の 10 は 10 年 10 月 10 日 10 時 10 分 10 秒

さて 物体上の s_0 点には単位イムパルス外力が $t=0$ で働くとしよう。 $\forall p, t$

$$Q(s_0; t) = \delta(t) \delta(s - s_0) \quad , \quad (8.10)$$

こうすると

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad (8.11)$$

であるから、これはすべての周波数成分を一律に含むことになる。

（周波数成分の正負的）
 それ故 解 $w_I(s, t)$ は単位外力による $w(s; \omega)$

によって (8.1) のように与えられる。

$$w_I(s; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w_0(s; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad (8.12)$$

それ故 $w_0(s; \omega)$ に対する コッテリ関数を H_0 とおけば

(8.5) により、ポテンシャルが与えられるからそれを測定すれば、それをフーリエ変換して各周波数における音場の指向特性がわかる。

逆に $t=0$ で原点で、イムパルス波となる入射波は

$$\phi_{0I}(P; t) = C [\delta(x_{\text{end}} + y_{\text{end}} - ct) - \delta(x_{\text{end}} - y_{\text{end}} - ct)]$$

$$= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega(x_{\text{end}} + y_{\text{end}})} - e^{i\omega(x_{\text{end}} - y_{\text{end}})}] e^{i\omega t} d\omega$$

(8.13)

であるから、それによる s_0 点の変位 $w_{0I}(s_0, t)$ は

ω 成分に対して (6.3) が成立つ、つまり上の解の w_0 に対するディラック関数 H_0 との間に (6.3) なる関係がある。

$$w_{in}(s_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{--- (8.14)}$$

と与えられる。

すなわちこれをフーリエ変換すれば、各周波数において s_0 点に単位円周外力を与えた時のその方向への音圧が計算出来る。

このようにして、イムハルス応答によれば、フーリエ変換は必要であるけれども広い周波数域に亘って一度で特性が求められるという利点がある。

理論計算にこれは応用している例もあるが特に実験の面で有用と考えられる。

相似則

水槽に構造物相似模型を浮かして振動試験をする。

i) 音の放射の相似則

波数 k と、船長 L とすると

$$k_s L_s = k_m L_m, \quad \frac{\omega_s L_s}{c} = \frac{\omega_m L_m}{c}$$

$$\therefore \frac{\omega_m}{\omega_s} = \frac{L_s}{L_m} \quad (1)$$

ii) 振動の相似則

$$\frac{\omega_s^2 W_s L_s^4}{g E_s I_s} = \frac{\omega_m^2 W_m L_m^4}{g E_m I_m}$$

$$\frac{L_s}{L_m} = \frac{I_m}{I_s} \quad \text{これは不可能}$$

$$\therefore \left(\frac{\omega_m}{\omega_s} \right)^2 = \left(\frac{W_s}{W_m} \right) \left(\frac{L_s}{L_m} \right)^4 \left(\frac{I_m}{I_s} \right) \left(\frac{E_m}{E_s} \right)$$

重量分布を $\frac{W_s}{W_m} = \left(\frac{L_s}{L_m} \right)^3$ (2)

とすると 結局 (1) となるため

$$\frac{E_m I_m}{E_s I_s} = \left(\frac{L_m}{L_s} \right)^5 \quad (3)$$

としておけばよい。

材料特性法を幾何学的相似とするならば

[(2)の条件が満たせるとして]

それゆえに材料特性法の比値は望み通り

$$\frac{I_m}{I_s} = \left(\frac{L_m}{L_s} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

であるから

$$\frac{E_m}{E_s} = \frac{L_m}{L_s}, \quad (5)$$

のような材料を使えばよい。

その時は (1) の対応がある。

① 今は媒質を水とすると (1) の相似則を満たさねばならないが、逆に材料を同じとして音速をかえる方法も考えられる。
 (油などとして)

その時は $E_m = E_s$ として

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega_s} \right)^2 = \left(\frac{L_s}{L_m} \right)^3, \quad (6)$$

なるが

$$\frac{\omega_s L_s}{C_s} = \frac{\omega_m L_m}{C_m} \quad \text{から}$$

$$\frac{C_m}{C_s} = \frac{\omega_m L_m}{\omega_s L_s} = \sqrt{\frac{L_s}{L_m}}, \quad (7)$$

その時は ρ_m も波速 C を含めた条件と振動数 ω にならないのでうまくないかもしれない。