

M-127

No.

Date 6.5.25

H.B.

2次元浮体の振動による音波の水中放射

1. 固有関数系展開法

頁
1

77-1061
2. 境界要素展開法

7

3. 可逆定理 (流体運動)

11

4. " (振動系全体)

14

5. ハスギントの定理の応用例

17

6. 入射波方向への散乱波を消す方法

22

7. 全没円筒

25~28

1. 固有周数展開法

(1) 固有周数 ω を 夫に 船殻の 法線方向, θ 線方向 変位とすると
減衰を無視して
真空中 振動方程式は 2つの形に かける。

$$\begin{aligned} [A]\{\omega\} + [B]\{\psi\} &= 0 \\ [C]\{\omega\} + [D]\{\psi\} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

これより $\{\psi\}$ を消去すると次の固有値方程式を得る。

$$\{[B]^{-1}[A] - [D]^{-1}[C]\}\{\omega\} = 0 \quad (1.2)$$

これを解けば、真空中の固有周波数 ω_n ^{船中の境界} と固有周数系 $w_n(s)$ [3次元に沿う変位] を得る。

w_n は 直交系をなしているので

$$\int_{C_s} w_n w_m ds = l_s \delta_{n,m} \quad (1.3)$$

のように規格化しておく。

$$\cos n\theta$$

基底化
規格化
normalizing

$$w_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n=0) \\ \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}} & (n \neq 0) \end{cases}$$

定義

→ 工業数学の本
巻末

ii) 水圧 p

水の運動力のポテンシャル ϕ , 面上の圧力を p とすると

中の境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega w \quad \text{on } C_w \quad (\text{法線方向}) \quad (1.4)$$

圧力は $p = -i\rho\omega\phi$, (1.5)

前項の直交系 (w_n) に対応するポテンシャル, 圧力を ϕ_n, p_n とすると ~~a_n~~

$a_n \phi_n$ = ポテンシャル $\frac{\partial \phi_n}{\partial n} \approx i\omega \frac{(w_n)}{\cosh \theta}, \quad p_n = -i\rho\omega \phi_n$, (1.6)

一般に (w_n) に対する圧力 p_n は (w_n) に比例しない (全波内筒ではしている) ので p_n を (w_n) の上に展開すると

$$p_n(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{nm} w_m(s) \quad \left. \vphantom{\sum_{m=0}^{\infty}} \right\} \dots (1.7)^*$$

$$p_{nm} = \frac{1}{L_s} \int_{C_s} p_n(s) w_m(s) ds$$

で後述するが $p_{n,m} = p_{m,n}$ [可換性] (1.8)

となる。

それ故今 $w(s) = \sum a_n w_n(s)$ (1.9)

の時は $p(s) = \sum_n a_n p_n(s) = + \sum_{n,m} a_n p_{nm} w_m(s)$, (1.10)

* p は 湯水面 以外は 0 として展開する

iii) 振動方程式

外力を $f(s)$, 水圧を $p(s)$ とし (外力 f は常に殻に直角に働くものとする) 振動方程式は

$$[K]\{w\} - [K_P]\{w\} = \{f\} \quad (1.11)$$

$$(1.12) \quad [K] = [A] - [B][D]^{-1}[C]$$

構造減衰等のあるときは $[K]$ に附け加えておけばよい。

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n w_n(s), \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w_n(s) \quad (1.12)$$

と展開できれば (1.11) に $w_n(s)$ をかけて積分すると、

$$(-\omega^2 M_0 + K_n) a_n = \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} a_m = g_n \quad (1.13)$$

の形となる。 $[M_0 = \rho_0 t, K_n(\omega)]$ バネ定数

$$[Z]\{i\omega w\} = \{f\} \quad (1.13')$$

の形にかけると $[Z]$ はイミピーダンス・マトリクスで相互
イミピーダンスを食すか。それは水圧の項のみである。

さらにこれを解いて

$$\{i\omega w\} = [Y]\{f\} \quad (1.14)$$

の形に変わると $[Y]$ はアドミッタンス・マトリクス

と呼ばれる。

$[Y] = [Y_{nm}]$, つまり $[Y]$ の要素を Y_{nm} とすると 特に
 Y_{nn} は 駆動アドミタンス (Driving ^{mode} ~~point~~ admittance)
 $Y_{nm} (n \neq m)$ は 伝達アドミタンス (Transfer admittance)
 と呼ばれる。

- 例として " g_{nn} のみ 0 で" なく 他は 0 とすると.

$$i\omega a_n = g_{nn} \cancel{Y_{nm}} \quad (1.15)$$

のように なり, Y_{nm} は " $u_m(s)$ モード" の 振動 振幅を
 表すものである。

$$i\omega a_n = Y_{nn} g_n \text{ だけ?}$$

iv) 放射効率

物体のなすエネルギーは

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{i\omega}{4} \int_C (\bar{p}w - p\bar{w}) ds = \frac{i\omega l_s}{4} \sum_{n,m} (a_n \bar{a}_m \bar{p}_{nm} - \bar{a}_m a_n p_{nm}) \\
 &= \frac{i\omega l_s}{4} \sum_{n,m} a_n \bar{a}_m (\bar{p}_{nm} - p_{nm}) \quad \dots (1.16)
 \end{aligned}$$

 $\frac{P}{P_0}$ とは放射されるエネルギーは

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{i\omega}{4} \int_{CV} \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) ds \\
 &= \frac{\rho\omega}{16\pi} \int_0^\pi |H(k,\theta)|^2 d\theta, \quad \dots (1.17)
 \end{aligned}$$

$$H(k,\theta) = \int_{CV} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} \left\{ e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} - e^{ik(x\cos\theta - y\sin\theta)} \right\} ds, \quad (1.18)$$

$$H(k,\theta) = \sum a_n \bar{F}_n(k,\theta), \quad \dots (1.19)$$

物体のなすエネルギーがすべて音として放射されるならば、この式の式より

$$\frac{i\omega l_s}{4} (\bar{p}_{nm} - p_{nm}) = -\frac{\rho\omega}{16\pi} \int_0^\pi \{ \bar{F}_n(k,\theta) \bar{F}_m(k,\theta) + F_m \bar{F}_n \} d\theta, \quad (1.20)$$

のような関係がある。

また放射効率 η は

$$\eta = P / \left[\frac{\rho c \omega^2}{2} \int w \bar{w} ds \right], \quad \dots (1.21)$$

と定義される。

この時 分母の 積分として 船体外面 浸水部を とるのか
~~水面~~
 適当であるように 思われるが、そうすると計算が複雑に
 なるので ^{いいては} 全周を とる事とし、^{今の場合は} 肩符 (*) で それを区別して
 おこう。

そうすると

$$\phi_r^* = \frac{i}{2\pi c_0} \frac{\sum_{n,m} a_n \bar{a}_m (p_{nm} - p_{mn})}{\sum_n a_n \bar{a}_n}, \quad (1.22)$$

→ 船体外面の積分

2. 境界要素法

1) 同数系

船体外板(および他の部材)を微少要素に分割し、
ある要素で1, 他は0という値数列を考えるとこれは
直交系をなしている。

有限要素法で固有値方程式をつくれれば、それは
(1.2)の形になり、そこで"のべた"ようにして固有値数系
をおめる事が出来る。

それ故、その固有値数系を用いて前章のように
問題をとりてもよいが、水圧の方は、境界要素法で
おめるのがこの際便利であるし、また、^{同じ要素分割で}外力も一般に
微少要素への集中荷重の集まりと考えられるので、
この方法で統一的に記述する方が便利であるとも
考えられる。

ii) 水圧

ポテンシヤル, 圧力, 境界条件は (1.4), (1.5) で与えられる。

要素ポテンシヤルとしては今度は、 n 番目の要素のみ

w_n で変位し, 他は $w=0$ なるものを考える。

ポテンシヤル
の値

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial x} = \begin{cases} i\omega & \text{for } n\text{-th element } S_n \\ 0 & \text{for another } \end{cases} \quad (2.1)$$

$$p_n(s) = -i\rho\omega\phi_n(s) \quad (2.2)$$

n 番目の要素を S_n とする様に記す事にすれば $p_n(s_n)$ は S_n 上のみ単位速度で振動する場合の S_n 上の圧力である。

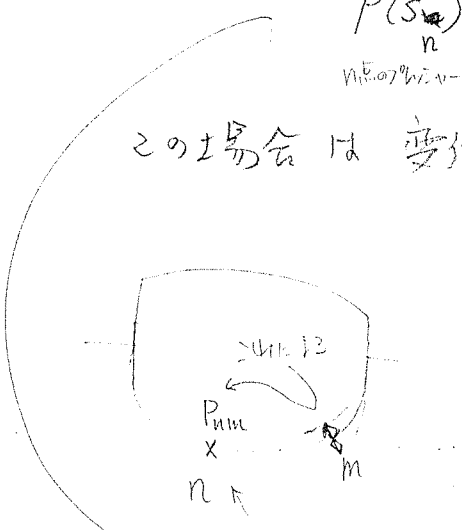
ここで

それは S_n 上の変位を w_n とすれば 圧力は

$$p(s_n) = \sum_m p_m(s_n) w_m = \sum_{n,m} p_{nm} w_m \quad (2.3)$$

$p_{nm} = p_{mn}$

この場合は変位は浸水部分でのみ考えればよい。



浸水部分でのみ

$$p(s_0) = \sum_{m=1}^N a_m p_m(s_0)$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^N p_{nm} w_m(s_0)$$

iii) 振動方程式

振動方程式は (1.11) で与えられる。

$$g(s_n) = g_n, \quad w(s_n) = w_n \quad (2.4)$$

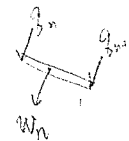
のように記号にすると (2.3) と令せて, (1.13') と同じく

$$i\omega [Z] \{w\} = \{g\} \quad (2.5)$$

と書ける。2.12 $\{w\} = \{w_n\}, \{g\} = \{g_n\}$

$$\text{また (2.3) より} \quad \{P\} = [P_{mn}] \{w\} \quad (2.6)$$

で, 4ピーダンス Z の中この $[P_{mn}]$ が相互 4ピーダンスおよび抵抗をもっているのは前通りで, 他は帯コリツクスである。



(2.5) をとくと, (1.14) 同様

$$i\omega \{w\} = [Y] \{g\} \quad (2.7)$$

の形になる筈であるが, 今は各要素上の外力と変位の関係となっているので大変直観的にならないう。

例えば $g_n \neq 0$ で他は 0 とすると

$$i\omega w_m = Y_{mn} g_n \quad (2.8)$$

のようになっているから駆動点, 伝達アドミッタンスの意味は直観的に把握できよう。

さらに g_n が実とすると外力の作る仕事 W は
単位時間には

$$W = \frac{1}{2} g_n^2 (\overline{Y_{nn}} + \overline{Y_{nn}}) \Delta \quad \text{--- 電磁波 ---} \quad (2.10)$$

一般に $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + iX} = \frac{R - iX}{R^2 + X^2} = G - iB$, (2.11)

= Conductance - i (Susceptance)

と書ける。

$$W = \frac{1}{2} g_n^2 G_{nn} \Delta \quad (2.10')$$

音の放射抵抗以外に減衰がないとは、 $\frac{1}{2}$ の放射パワー P に等しい

$$P = W = \frac{1}{2} g_n^2 G_{nn} \Delta \quad (2.12)$$

この放射効率 η は

$$\eta = P / \left[\frac{\rho c \omega^2}{2} \Delta \sum_m \overline{w_m w_m} \right] \quad (2.12)$$

$$\frac{\rho c \omega^2}{2} \sum_m \overline{w_m w_m} = \frac{\rho c}{2} g_n^2 \sum_m \overline{Y_{nm} Y_{nm}} \quad (2.13)$$

$$\eta = \frac{1}{\rho c} G_{nn} / \left[\sum_m \overline{Y_{nm} Y_{nm}} \right] \quad (2.14)$$

この場合は前章と異なり分母の和を 浸水部分のみに とし、
定義通り浸水部の放射する音のパワーとなる。

3. 可逆定理 (流体運動部分)

速度ポテンシヤル ϕ , 圧力 p , C_W 上の法線, 変位 w とする

$$p = -\rho i\omega \phi \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = i\omega w \quad \text{on } C_W \quad (3.2)$$

i) 今 C_W に ϕ 変位が w_1, w_2 なる 2つのポテンシヤル ϕ_1, ϕ_2 があり

圧力はそれぞれ p_1, p_2 となるものとする

例として $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$\int_{C_W} p_1 w_2 ds = -\rho \int_{C_W} \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} ds = -\rho \int_{C_W} \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} ds = \int_{C_W} p_2 w_1 ds \quad (3.3)$$

∴ グリーンの定理より

$$\int_{C_W} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} \right) ds = \iint_D [\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1] dx dy = 0$$

なる可逆定理をうる。

例として ϕ_1 は ϕ_2 変位から ϕ_1 周上 s_1 点の δ 関数で表わされ, ϕ_2 は

同じく s_2 点の δ 関数による圧力とすると上式から

$$p_1(s_2) = p_2(s_1)$$

(s_1 点と s_2 点の間の圧力)

となり, この意味は明白である。

(3.3)

$2\pi \rho^{-1}$
 p_{max}

ii) 次にもう一つの物体 C_U があつたとし, 境界条件が

次のような ϕ_1, ϕ_2 を考えよう。

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} = \begin{cases} i\omega w_1 & \text{on } C_W \\ 0 & \text{on } C_U \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \nu} = \begin{cases} 0 & \text{on } C_W \\ i\omega w_2 & \text{on } C_U \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.3) の積分範囲を $C_W + C_W'$ としてそれを適用し、

$$\int_{C_W'} p_1 w_2 ds = \int_{C_W} p_2 w_1 ds \quad (3.6)$$

iii) C_W' が充分遠方にあると p_2 は C_W のすぐ外は 入射平面内 として居るから p_2 は C_W による 散乱ポテンシヤル となる。

今入射波は水面の反射を考えると

0 方向から入る波

$$\phi(\theta) = c \left[e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} - e^{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)} \right] \quad (3.7)$$

となるから、その散乱ポテンシヤルを ϕ_d として

$$(\phi_0 + \phi_d) = \Phi_d, \quad \frac{\partial \Phi_d}{\partial n} = 0 \text{ on } C_W \quad (3.8)$$

$$P_d = (p_0 + p_d) = -i\rho\omega\Phi_d$$

$$\int_{C_W} P_d w_1 ds = \int_{C_W} (p_0 w_1 + p_d w_1) ds = \int_{C_W} (p_0 w_1 + \frac{p_1}{i\rho\omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) ds$$

$$= \int_{C_W} (p_0 w_1 - \frac{p_1}{i\rho\omega} \frac{\partial \phi_0}{\partial n}) ds = -i\rho \int_{C_W} [\phi_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial \phi_0}{\partial n}] ds$$

$$= \rho c F_1(k, \theta) \quad (3.9)$$

一方 ϕ の漸近展開は

$$\phi_1 \xrightarrow{r \gg 1} \frac{i}{2\sqrt{2\pi kr}} e^{-ikr + \frac{\pi}{4}} F_1(k, \theta) \quad (3.10)$$

$F_1(k, \theta)$ は ϕ の θ 方向からの散乱振幅

特に ϕ が $w = \delta(r)$ であるとする。

CE

$$P_d(r) = \rho_0 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \quad (3.11)$$

$\sin\theta$ の物体圧力

となるから、 θ 方向から来る音波による物体上 r の圧力は r なる点から δ 固数状に振動する時 θ 方向に透過波の振幅を表わすコッチニ対称に比例する。

この関係は水波理論では Haselund の関係として知られ、電磁波理論では受波特性と送信特性の可逆性としてよく知られている関係である。

4. 可逆性 (振動系全体)

振動系も一般に可逆性があるから前章の水運動の可逆性と合せて全体として可逆性がある事になる

即ち 外力 f と C 上の速度の間に (2.7) の関係があり, $[Y]$ は対称マトリクスであるから

$$i\omega [g_1] \{w_2\} = [g_1] [Y] \{g_2\} = \{g_2\} [Y] [g_1] = i\omega [g_2] \{w_1\}$$

つまり

$$\int_{C_S} g_1 w_2 ds = \int_{C_S} g_2 w_1 ds, \quad (4.1)$$

= 即ち C_S を充分離れた点に C_S' なる物体があると w_1 は C_S 上の g_1 なる外力による振動, w_2 は C_S' 上の g_2 なる外力による振動とすると, 上式は 積分範囲を $(C_S + C_S')$ とすればやはり成立つから 直ちに

$$\int_{C_S} g_1 w_2 ds = \int_{C_S'} g_2 w_1 ds, \quad (4.2)$$

特等 C_S' は P 点まわりの小さい物体とすれば

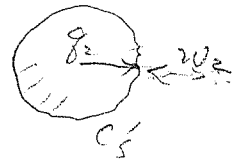
$$w_1(p) \int_{C_S'} g_2 ds = \int_{C_S} g_1 w_2 ds$$

また g_2 が S_1 で δ 関数ならば $\int_{C_S'} g_2 ds = 1$ として

$$w_1(p) = w_2(s_1) \quad (4.3)$$

つまり P 点において小物体を振動させて、 C_w 上の振動変位を測定するとそれは、その点に外力をかけて振動させた時の P 点における振動変位に等しい。

この時 C_w からの力は C_w 上で常に平面波となつてゐるので、あらためて平面波として考えて見ると、物体上の振動速度は、



$$i\omega \{w_d\} = [Y] \{P_d\} \quad (4.5)$$

P_d は入射波、散乱波による圧力である。

今 $w_d(s_n) \equiv w_{dn}$, $P_d(s_n) \equiv P_{dn}$ 等と書くことにする。

$$i\omega w_{dn} = \sum_m Y_{nm} P_{dm} \quad (4.5')$$

次に s_n 点で単位外力 δ_n があつた場合の振動は、

$$i\omega \{w^{(n)}\} = [Y] \{0 \dots 1 \dots 0\}^T \quad (4.6)$$

このコワチ=変位を F とすると

$$\rho_A F^{(n)}(\theta) = \int P_d w^{(n)} ds \quad (4.7)$$

で与えられるから (4.6) と (4.5') から

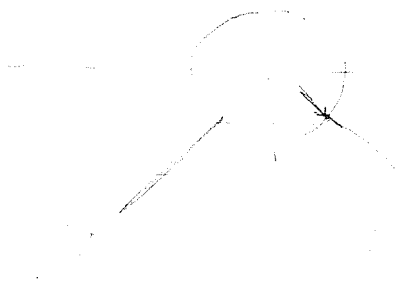
$$i\omega \sum_m P_{dm} w_m^{(n)} = \sum_{m,h} Y_{nm} P_{dm} = i\omega w_{dn}$$

したが

$$i\omega w_d(s_n) = \rho_A \overline{H}^{(n)}(\theta) \quad (4.8)$$

つまり、 S_n 点の放射線速度は、その点に単位外力をかけて
(入射波をうけて振動する時)
振動させた時に、入射波方向への放射波のコッチン
係数に等しい。

これが二の振動系におけるハスキントの定理である。

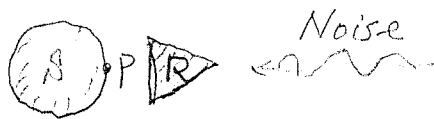


5. ハスキントの定理の応用129

ソーナードームでは一般に船尾方向から来るフロップラ雑音等を遮断するために後方に遮断板をおくが、そうすると受信に際して後方に Ghost が出て来るという困難があるという。

この現象は^(散乱問題と反射問題の)計算によって定量的に見積る事が出来るが、この際ハスキントの定理を^(容易に)応用するとより一層容易に理解出来る。

さて簡單の爲に 2次元問題とし、外殻は無視し、かつソーナー、遮断板は固体として振動しないものとする。



船尾方向からの雑音を R 点の

物体で反射させれば、波長

が小さければ P 点の音圧は小さくなるであらう。

一方前方から来る信号は R で反射して P 点の音圧を高めて Ghost になると考えられる。

(3.11) によれば P 点の音圧は P 点を振動させた時放射する波のコッテン係数に比例するからこれを小さくするのはその方向へ出て行く波を小さく

すればよい事になる。

即ち散乱問題のかわりに放射問題を考えればよい。
アンテナ理論でよく使われる^でように、受信特性は
送信特性で説明出来る。

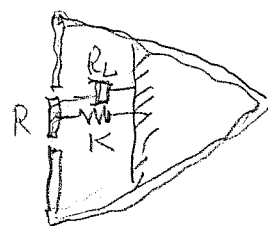
計算も放射問題の方が容易である。

さてこの場合 R が剛体とすると上述のように明らかに
具合が悪いから R の P に面している面で音を吸収
してやればよいと考えられる。

そこで簡単の爲に P に向い合った点を R
とし、そこで音を吸収する事にしよう。



その後には図のように R 部分を可動とし
バネ K と抵抗 R_L を附すものとする。



あるいはスピーカーまたはマイクロフォンを使用するならば

R_L のかわりに回路の荷重抵抗を入れておけばよい。

さて P 点を単位振幅で振動させた時の

フット2度数を $f_P(\omega)$, R 点を振動させた時の

それを $f_R(\omega)$ としておこう。

をうすると点 R がどれだけ変位する時のコツチン度数は

$$F(R, \theta) = F_p(R, \theta) + \alpha F_R(R, \theta), \quad \dots (5.1)$$

となる。

今 P 点の振動による R 点の圧力を P とすると R の運動方程式は次のようになる。

$$(M + M_A)\ddot{x} + (R_W + R_L)\dot{x} + Kx = PA, \quad \dots (5.2)$$

こゝに M は系の質量, R_W は水抵抗, K はバネ定数
 M_A は附加質量

A は面積 (今は R の長さ) とする

M_A, R_W は R 点の単位振動による R 点の圧力 R により

$$PA = \omega^2 M_A - i\omega R_W, \quad \dots (5.3)$$

のように計算出来る。

またこの振動で出て行く音響パワーは

$$P = \frac{\omega^2}{2} R_W |1|^2 = \frac{\omega^2}{2} R_W, \quad (5.4)$$

一方これをコツチン度数を使って表わすと

$$P = \frac{\rho \omega}{16\pi} \int_0^\pi |F_R(R, \theta)|^2 d\theta, \quad \dots (5.5)$$

それ故

$$R_W = \frac{\rho}{8\pi\omega} \int_0^\pi |F_R(R, \theta)|^2 d\theta, \quad (5.6)$$

また放射効率 η_r は

$$R_W = \rho C \eta_r L_W, \quad (5.7)$$

L_W は $i\omega$ の長さ

と定義されるが

$$\eta_r = \frac{1}{8\pi\omega C L_W} \int_0^\pi |F_R|^2 d\theta, \quad (5.8)$$

と表わされる。

さて

$$Z = R_W + R_L + i\left\{\omega(M + M_A) - \frac{K}{\omega}\right\}, \quad (5.9)$$

とおくと (5.2) より

$$i\omega X Z = pA, \quad \text{or } i\omega X = \frac{pA}{Z}, \quad (5.10)$$

ここで K を調整して

$$K = \omega^2(M + M_A), \quad (5.11)$$

つまり 同調させると

$$i\omega X (R_W + R_L) = pA \quad (5.12)$$

この時 R_L で ~~外~~ ~~に~~ ~~失~~ われる パワーは

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{A}{4} (p i\omega X + \bar{p} i\omega X) - \frac{1}{2} A \omega^2 R_W \\ &= \frac{A}{2} R_L \omega^2 X^2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

これを最大とするのはよく知られているように

$$R_L = R_W \quad (5.14)$$

の時である。

つまりこの条件が最も多く波を吸収するため必要である。

その時の振幅は

$$i\omega x = \frac{pA}{2R_W} \quad , \quad \dots \quad (5.14)$$

(5.1)に代入すると

$$F(r, \theta) = \overline{F}_P(r, \theta) + \frac{pA}{2i\omega R_W} \overline{F}_R(r, \theta) \quad , \quad (5.15)$$

$\theta = \pi$ でこれば小さくなっていけば"良"いわけであるから計算して見なければ"わから"ない。

なお (5.1) から直接 $F(r, \pi) = 0$ なるために

$$x = - \frac{\overline{F}_P(r, \theta)}{\overline{F}_R(r, \theta)} \quad \dots \quad (5.16)$$

なるよう制御すれば"よい"ように思えるが、~~これは~~ 散乱問題では

この関係は成立たず"直接 P 点の圧力を 0 とする"は

R 点の単位運動による P 点の圧力を $R(P)$ とすると

$$P_d(r, \pi) + x R(P) = 0 \quad , \quad \dots \quad (5.17)$$

のように x を制御しなければ"なら"ない。

この時入射波の振幅も考えねば"なら"ないので

制御は困難に思われる。

6. 入射波方向への散乱波を消す方法

今度は元円筒に x の正方向から單波入射波が
(全波)
あたるとしよう。

散乱ポテンシャルは

$$\phi_d(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta, \quad (6.1)$$

$$\phi_0 = e^{ikx}, \quad \frac{\partial}{\partial r}(\phi_0 + \phi_d) \Big|_c = 0, \quad (6.2)$$

2つの円筒は

$$F_d(-k, \theta; 0) = \frac{4}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\theta, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial r} = i\omega \cos n\theta, \quad (6.4) \quad ?$$

なる放射ポテンシャルは

$$\phi_n(r, \theta) = ic \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\theta, \quad (6.5)$$

2つの円筒は

$$F_n(k, \theta) = \frac{4c i^n}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\theta, \quad (6.6)$$

今入射波の中で ϕ_n の振動のみあつてその振幅が
 X_n であつたとしよう。

は強制力は $P \bar{F}_n(k, 0)$ である (4.7) から

$$i\omega X_n Z_n = P \bar{F}_n(k, 0) \quad , \quad \dots \quad (6.7)$$

$$Z_n = R_n - i\left[\omega(M_0 + M_{An}) - \frac{K_n}{\omega}\right] \quad , \quad \dots \quad (6.8)$$

R_n, M_{An} 等は δ^2 であると考えられるもので M_0, K_n はここで与えられた値に決められるものとする。

$$(6.7) \text{ より } i\omega X_n = \frac{P \bar{F}_n(k, 0)}{Z_n} \quad (6.9)$$

となるからこれによるコッチニ関数は

$$\bar{H}(k, \theta) = X_n \bar{F}_n(k, \theta) = \frac{P \bar{F}_n(k, 0)}{i\omega Z_n} \bar{F}_n(k, \theta) \quad , \quad (6.10)$$

これと散乱波を合わせると $\theta=0$ の反射波はコッチニ関数の形で

$$\bar{F}_T(k, 0) = \bar{F}_a(k, 0, 0) + \bar{F}(k, 0) \quad (6.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_a(k, 0, 0) &= \frac{4}{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} \\ \bar{F}(k, 0) &= \frac{P \bar{F}_n^2(k, 0)}{i\omega Z_n} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

この n 次の振幅が ω が増えるように $\bar{F}_a$ の振幅 M_0 を調節する事が出来るとしてまた外部抵抗を R_n の μ 倍加えるとして

$$\bar{F}(k, 0) = \frac{P \bar{F}_n^2(k, 0)}{i\omega R_n (1 + \mu)}$$

であるから R_n と $\bar{F}_n$ の間に

$$R_n = \frac{2\rho c}{\pi k a} \frac{1}{|H_n^{(2)}(ka)|^2}$$

$$\bar{F}_n(k, 0) = \frac{4ci^2}{H_n^{(2)'}(ka)}$$

より
$$R_n = \frac{\rho}{8\pi\omega a} |\bar{F}_n(k, 0)|^2, \quad \dots (6.13)$$

なる関係があるので

$$F(k, 0) = \frac{8\pi a}{i(1+\mu)} \frac{\bar{F}_n(k, 0)}{\bar{F}_n(k, 0)}, \quad \dots (6.14)$$

よって
$$F_T(k, 0, 0) = F_d(k, 0, 0) + \frac{8\pi a}{i(1+\mu)} \frac{F_n}{\bar{F}_n}, \quad (6.15)$$

(6.12) から F_d は純虚数であり、また $|F_n/\bar{F}_n| = 1$ であるから

μ が実数では $F_T = 0$ とするわけにゆかない。

よって (6.12) を直接 (6.11) に代入して、 $F_T = 0$ なるため

$$\frac{\rho \bar{F}_n^2(k, 0)}{i\omega Z_n} = -F_d, \quad Z_n = -\frac{\rho \bar{F}_n^2(k, 0)}{i\omega F_d(k, 0, 0)}, \quad (6.16)$$

のようにインピーダンスを調整出来ればよいことになる。

7. 全波円筒 附加質量, 減衰の無次元化と放射効率

1) 流体運動

$$p = -i\rho\omega\phi \quad \frac{\partial\phi}{\partial r} = i\omega w$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\phi = \frac{i\omega}{k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\theta = i c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)}(ka)} a_n \cos n\theta$$

$$p|_{r=a} = +\rho c \omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\theta$$

$$\frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} = \frac{J_n - iY_n}{J_n' - iY_n'(ka)} = \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + i(J_n Y_n' - J_n' Y_n)}{J_n'^2 + Y_n'^2}$$

$$\begin{aligned} J_n Y_n' - J_n' Y_n &= J_n (-Y_{n+1} + \frac{n}{ka} Y_n) - Y_n (-J_{n+1} + \frac{n}{ka} J_n) \\ &= Y_n J_{n+1} - J_n Y_{n+1} = \frac{2}{\pi ka} \end{aligned}$$

$$= \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + \frac{2i}{\pi ka}}{J_n'^2 + Y_n'^2}$$

$$p = \rho c \omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + \frac{2i}{\pi ka}}{J_n'^2 + Y_n'^2} \right] \cos n\theta$$

$$P = + \sum a_n (\omega^3 M_{An} + i\omega R_n) \cos n\theta$$

$$M_{An} = \left(+ \frac{\rho}{k} \right) \times \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n'}{J_n'^2 + Y_n'^2} \rightarrow - \frac{\rho}{k} \frac{\frac{\pi (ka)^2}{2}}{\frac{2}{\pi ka}} = - \frac{\rho}{2k^3 a^2}$$

$$R_n = \rho c \times \frac{2}{\pi ka} \times \left(\frac{1}{J_n'^2 + Y_n'^2} \right) \left(\frac{1}{J_n'^2 + Y_n'^2} \right) \rightarrow \frac{2}{2ka^2 \pi ka} = \frac{2}{\pi ka^3}$$

2) 運動方程式

$$\sum q_n (-\omega^2 \beta t + K_n) \cos n\theta - \frac{p}{a} = f$$

$$f = \sum_n f_n \cos n\theta \stackrel{f_0}{=} f(\theta) = \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n\theta$$

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2$$

$$K_n = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{a^2} \left[\left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{r} \right)^2 n^4 \right) + \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{r} \right)^2 n^2 \right)^2}{\frac{a^2 \omega^2 \beta (1-\nu^2)}{E} - n^2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right)} \right]$$

$$\therefore \sum q_n [-\omega^2 \beta t + K_n - \omega^2 M_{An} - i\omega R_n] \cos n\theta = \frac{q_0}{\pi} \sum \epsilon_n \cos n\theta$$

$$q_n = \frac{\frac{\epsilon_n q_0}{\pi}}{K_n - \omega^2 (\beta t + M_{An}) - i\omega R_n} = \frac{\frac{\epsilon_n q_0}{\pi}}{-i\omega Z_n}$$

$$Z_n = R_n + i\omega (\beta t + M_{An}) - \frac{K_n}{i\omega} \quad // \quad \left[\frac{M_{An}}{M_0} = \mu_n \right]$$

$$\beta t + M_{An} = \beta t (1 + \mu_n) = M_0 (1 + \mu_n), \quad M_0 = \beta t$$

$$\mu_n = \frac{\left(\frac{a}{r} \right)}{\sigma(r/a)} \times \frac{-\bar{y}_n' + \bar{y}_n \bar{y}_n'}{\bar{J}_n'^2 + \bar{y}_n'^2}, \quad \sigma = \beta/\beta$$

$$\frac{K_n}{\beta t} = \omega_{no}^2 // \quad K_n = f_n(\omega) \quad \begin{matrix} \text{= } h_0 \text{ と } 1) \text{ } \omega_{no} \text{ と } \text{決} \text{る} \end{matrix} \quad z \neq 0$$

$$\frac{R_n}{\beta t} = \eta_{rn} // \text{放射効率} = \frac{\frac{2}{\pi R a}}{\bar{J}_n'^2 + \bar{y}_n'^2} \xrightarrow{ka \rightarrow \infty} 1$$

$$\xrightarrow{ka \rightarrow \infty} \eta_{ro} = \frac{\pi R a}{2 a}$$

$$(\omega_{ho}^*)^2 = \frac{K_n K_n(\omega)}{M_0(\omega)}$$

$$a_n = \frac{\frac{E_n}{\pi} \delta_0}{\left[\omega_{ho}^2 + \omega^2(1+\mu_n) \right] M_0 - i\omega R_n}$$

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_{ho}^{*2}}{1+\mu_n} \quad \text{or} \quad \left(\frac{\omega_n}{\omega_{ho}^*} \right)^2 = \frac{1}{1+\mu_n}$$

水中固有周波数の定義とする。

$$R_n = 2\zeta_n \sqrt{1+\mu_n} \omega_{ho}^* M_0 = 2\zeta_n \frac{\omega_{ho}^{*2} M_0}{\omega_n}$$

$$a_n = \frac{\frac{E_n}{\pi}}{\left[\omega_{ho}^{*2} - \omega^2(1+\mu_n) \right] M_0 - 2i\zeta_n \frac{\omega \omega_{ho}^{*2} M_0}{\omega_n}}$$

$$\xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\frac{E_n}{\pi}}{\frac{2i\zeta_n}{K_n} \frac{M_0 \omega_{ho}^{*2}}{\omega_n}} \left(\frac{1}{\zeta_n} \right) = \frac{i\frac{E_n}{\pi}}{2\zeta_n} \left(\frac{1}{K_n \zeta_n} \right)$$

$$\zeta_n = \frac{\omega_n A C}{2\omega_{ho}^{*2} M_0} \quad \eta_r = \frac{c \omega_n}{20\pi \omega_{ho}^{*2}} \quad \eta_r = \frac{1}{20\pi \zeta_n} \left(\frac{\omega_n}{\omega_{ho}^*} \right)^2$$

$$= \frac{1}{20\pi \zeta_n (1+\mu_n)} \quad , \quad k_{cr} = \frac{\omega_n}{c \eta_r}$$

μ_n : 附加質量係数

ζ_n : 減衰係数

$$2 = \zeta \text{ 系 } \omega_n \text{ 係 } s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$\zeta > 1$ over-damped

$\zeta = 1$ critical

$\zeta < 1$ under damped (oscillation)



$$w = \sum a_n \cos n\theta$$

$$p = \sum a_n (\omega^2 M_n + i\omega R_n) \cos n\theta. \quad \frac{\pi}{2}$$

$$P = \frac{\omega a}{2} \int_0^{2\pi} p \bar{w} d\theta = \frac{\omega^2 a}{2} \pi \sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n R_n}{\epsilon_n} [\eta_0^2]$$

$$\eta_r = \frac{P}{\omega^2 \rho c a \int_0^{2\pi} w \bar{w} d\theta} = \frac{\frac{\omega^2 a \pi}{2} \sum_0^{\infty} \frac{R_n a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}}{\omega^2 \rho c a \pi \sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}} = \frac{\sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n} \eta_{rn}}{\sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}} //$$

↑ 全体の放射効率

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_{n0}^2} = \frac{1}{1+\mu_n} \cdot \frac{K_n(\omega_n)}{K_n(\omega_{n0})} //$$

$$\mu_n = \mu_n(\omega_n)$$

$$\omega_{ho}^2 = \frac{K_n(\omega_{ho})}{M_0}$$

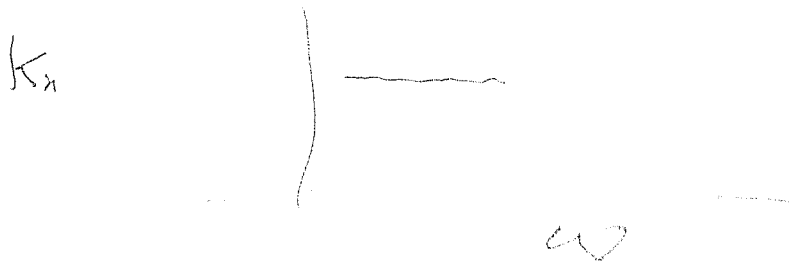
$$\omega_{ho}^{*2} = \frac{K_n(\omega_n)}{M_0}$$

$$1 + \mu_n = \left(\frac{\omega_{ho}^*}{\omega_n} \right)^2 = \left(\frac{\omega_{ho}}{\omega_n} \right)^2 \times \left(\frac{\omega_{ho}^*}{\omega_{ho}} \right)^2$$

$$\left(\frac{\omega_{ho}^*}{\omega_{ho}} \right)^2 = \frac{K_n(\omega_n)}{K_n(\omega_{ho})}$$

$$\left(\frac{\omega_{ho}}{\omega_n} \right)^2 = (1 + \mu_n) \frac{K_n(\omega_{ho})}{K_n(\omega_n)}$$

$\uparrow$
 ω_{ho}



全波円筒 附加質量, 減速の無次元化と放射効力

1) 流体運動

$$p = -i\rho\omega\phi, \quad \frac{\partial\phi}{\partial r} = i\omega v$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

$$R = \frac{\omega}{c}$$

$$\phi = \frac{i\omega}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\theta = i c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}(kr) a_n \cos n\theta}{H_n^{(2)}(ka)}$$

$$p|_{R=a} = +i\rho\omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} \cos n\theta$$

$$\frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} = \frac{J_n - iY_n}{J_n'(ka) - iY_n'(ka)} = \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + i(J_n Y_n' - J_n' Y_n)}{J_n'^2 + Y_n'^2}$$

$$\begin{aligned} J_n Y_n' - J_n' Y_n &= J_n (-Y_{n+1}' + \frac{n}{ka} Y_n') - Y_n (-J_{n+1}' + \frac{n}{ka} J_n') \\ &= Y_n J_{n+1}' - J_n Y_{n+1}' = \frac{2}{\pi ka} \end{aligned}$$

$$= \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + \frac{2i}{\pi ka}}{J_n'^2 + Y_n'^2}$$

$$\frac{ka}{2\pi} = \frac{Y_n}{J_n} = \frac{1}{\frac{J_n}{Y_n}}$$

$$p = i\rho\omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{J_n J_n' + Y_n Y_n' + \frac{2i}{\pi ka}}{J_n'^2 + Y_n'^2} \right] \cos n\theta$$

$$p = p_0 + \sum a_n (+\omega^3 M_{An} + i\omega R_n) \cos n\theta$$

$$M_{An} = \left(+ \right) \frac{\rho}{R} \times \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n'}{J_n'^2 + Y_n'^2} \xrightarrow{ka \rightarrow \infty} - \frac{\rho}{R} \frac{\frac{\pi(ka)^2}{2}}{\pi ka} = - \frac{\rho}{2ka^2}$$

$$R_n = \rho c \times \frac{2}{\pi ka} \times \left(\frac{1}{J_n'^2 + Y_n'^2} \right) \xrightarrow{ka \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi ka}$$

2) 運動方程式

$$\sum q_n (-\omega^2 \rho_s t + K_n) \cos n\theta - \frac{p}{a} = 0$$

$$0 = \sum_n q_n \cos n\theta \stackrel{f(\theta)}{=} \frac{q_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n\theta$$

work kmz

$$\epsilon_0 = 1, \epsilon_n = 2$$

$$K_n = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{a^2} \left[\left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{t} \right)^2 n^4 \right\} + \frac{n^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{t} \right)^2 n^2 \right\}^2}{\frac{a^2 \omega^2 \rho_s (1-\nu^2)}{E} - n^2 \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{a}{t} \right)^2 \right\}} \right]$$

$$\therefore \sum q_n [-\omega^2 \rho_s t + K_n - \omega^2 M_{An} - i\omega R_n] \cos n\theta = \frac{q_0}{\pi} \sum \epsilon_n \cos n\theta$$

$$q_n = \frac{\frac{\epsilon_n q_0}{\pi}}{K_n - \omega^2 (\rho_s t + M_{An}) - i\omega R_n} = \frac{\frac{\epsilon_n q_0}{\pi}}{-i\omega Z_n}$$

$$Z_n = R_n + i\omega (\rho_s t + M_{An}) - \frac{K_n}{i\omega} //$$

$$\rho_s t + M_{An} = \rho_s t (1 + \mu_n) = M_0 (1 + \mu_n), \quad M_0 = \rho_s t$$

$$\left[\frac{\mu_n \sigma}{\left(\frac{a}{t} \right)} \right] = \mu_n^* \quad \mu_n = \frac{\left(\frac{a}{t} \right)}{\sigma \sqrt{1-\nu^2}} \times \frac{J_n J_n' + Y_n Y_n'}{J_n'^2 + Y_n'^2}, \quad \sigma = \rho_s / \rho_s \rightarrow \text{比重}$$

$$\frac{K_n}{\rho_s t} = \omega_{n0}^2 //$$

24+2

100% 放射効率

$$\text{放射効率} = \frac{R_n}{P_C} = \eta_{rn} // \text{放射効率} = \frac{\frac{2}{\pi} \frac{R_n}{a}}{J_n'^2 + Y_n'^2} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 1$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \eta_{rn} = \frac{\pi R_n}{12 a}$$

$$\omega_{n0}^{*2} = \frac{K_n(\omega_n)}{M_0}$$

$$a_n = \frac{\frac{E_0}{\pi} \delta_0}{\underbrace{[\omega_{n0}^{*2} + \omega^2(1+\mu_n)]}_{K_{n(n)}} M_0 - i\omega R_n}$$

水中固の運動
の定数とす。

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_{n0}^{*2}}{1+\mu_n} \quad \text{or} \quad \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n0}^*}\right)^2 = \frac{1}{1+\mu_n}$$

減衰係数?

$$R_n = 2 \zeta_n \sqrt{1+\mu_n} \omega_{n0}^* M_0^{\frac{1}{2}} = 2 \zeta_n \frac{\omega_{n0}^{*2} M_0}{\omega_n}$$

$$G_n = \frac{\delta_0 E_n}{\pi} \frac{1}{[\omega_{n0}^{*2} + \omega^2(1+\mu_n)] M_0 - 2i\zeta \frac{\omega \omega_{n0}^{*2}}{\omega_n} M_0}$$

同様の ω_m

$$\frac{\delta_0 E_n i}{2\pi M_0 \omega_{n0}^{*2}} \left(\frac{1}{\zeta_n} \right) = \frac{i \delta_0 E_n}{2\pi (K_n \zeta_n)} \quad \text{wave number}$$

$$\zeta_n = \frac{\omega_n R_n}{2 \omega_{n0}^{*2} M_0} \quad \eta_r = \frac{c \omega_n}{20 \pi \omega_{n0}^{*2}} \quad \eta_r = \frac{1}{20 \pi \zeta_n} \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n0}^*} \right)^2$$

$$= \frac{\eta_r}{20 \pi \zeta_n (1+\mu_n)}$$

$$, \zeta_n = \frac{\omega_n}{c}$$

μ_n : 浮力定数係数

$$\frac{1}{\zeta_n} = 20 \pi \zeta_n (1+\mu_n)$$

$\lambda \rightarrow 1$

$\zeta_n \rightarrow 大$

ζ_n : 減衰係数

2=2系で1は

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$\zeta > 1$ over-damped

$\zeta = 1$ critical

$\zeta < 1$ under damped (oscillation)

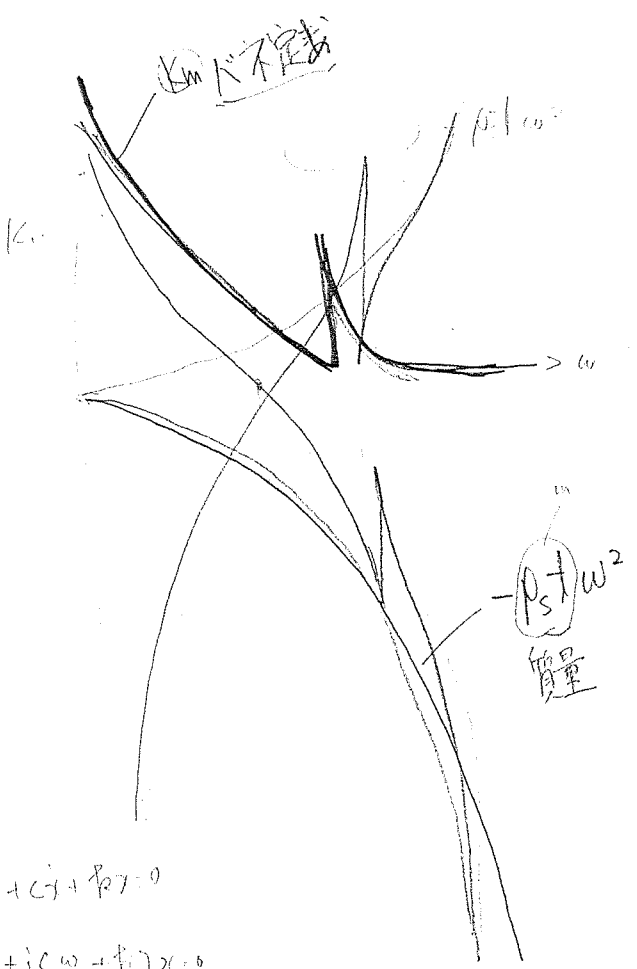
$$w = \sum a_n \cos n\theta$$

$$p = \sum a_n (\omega^2 M_n + i\omega R_n) \cos n\theta. \quad \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{\omega a}{2} R_n \int_0^{2\pi} p \bar{w} d\theta = \frac{\omega^2 a}{2} \sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n R_n}{\epsilon_n} [\rho_0^2]$$

$$\eta_r = \frac{P}{\omega^2 \rho c a \int_0^{2\pi} w \bar{w} d\theta} = \frac{\frac{\omega^2 a}{2} \sum_0^{\infty} \frac{R_n a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}}{\omega^2 \rho c a \pi \sum_0^{\infty} \frac{a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}} = \frac{\sum \frac{a_n \bar{a}_n R_n}{\epsilon_n}}{\sum \frac{a_n \bar{a}_n}{\epsilon_n}}$$

↑ 全体の平均損失係数



$$M^* x + c \dot{x} + k x = 0$$

$$(-\omega^2 M + j c \omega + k) x = 0$$

$$\text{運動エネルギー} - E = \frac{M_0}{2} \int \omega^2 P^2 ds, \quad M_0 = \rho_s t$$

$$\text{一周期の間に失われる音のエネルギー} \quad \Delta E = \frac{2\pi}{\omega} P$$

$$\Delta E = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \eta_r \frac{\rho c}{2} \int \omega^2 P^2 ds$$

$$\text{減衰率} \quad \eta = \frac{\Delta E}{E} = 2\pi \eta_r \frac{\rho c}{\rho_s \omega t} = \eta_r \left(\frac{2}{\omega t} \right)$$

$$R = \frac{c\omega}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\left(\frac{1}{\eta} \text{ 周期で自由振動はとまる} \right)$

$$P = \frac{1}{2} \rho \omega^2 = \frac{R}{2} \omega^2 = \eta_r \frac{\rho c}{2} \int \omega^2 ds$$

$\frac{\omega}{2c}$

ω

A

M-127-1
127-2

No.

Date

61.6.12

別紙

1. ガリニニ関数

1

2. 無限大板の(縛起振力による振動)
(一定)

4

Reference

13-11) 112頁

1. グリーン関数

物体の表面の法線方向変位を $w(s)$ とすると速度

ポテンシャルは (狭義の) グリーン関数 N (1次元関数と等しい)
 により γ_n 体の γ は γ_n 。

Helmholtz の方程式
の解

$$\phi(Q) = \int_{C_S} \frac{\partial \phi}{\partial n} N(Q, s_n) ds_n \quad (1.1)$$

の様に書く事が出来る。核関数 (狭義の) (p_{nm} と同じ)

$$\frac{\partial \phi(s)}{\partial n} = i\omega w(s) \quad (1.2)$$

それ故 圧力は

s_n の点に作用する電流 i s の点に誘起する
↓ 電圧

$$p(s) = -i\rho\omega\phi \Big|_{C_S} = \int_{C_S} i\omega w(s_n) Z_w(s, s_n) ds_n, \quad (1.3)$$

電圧
電流

$$Z_w = -i\rho\omega N, \quad (1.4)$$

のようにかけ、力を電圧、速度を電流と対応させると

Z_w は 伝達 インピーダンス である。

無限遠方では

$$\phi \rightarrow \frac{i}{2\sqrt{\lambda\rho}} e^{-i(kr + \frac{\pi}{4})} \quad (1.5)$$

となり、 θ 方向からの入射波による C_S 上の圧力を

$P_d(s, \theta)$ とする $[\frac{m^2}{s}]$

$[\frac{m^4}{s}]$

1000000 (?)

$$F(\theta, \theta) = \frac{1}{\rho c} \int_{C_S} P_d(s, \theta) w(s) ds, \quad (1.6)$$

放射 パワ - は

θ方向から来た X 波に C_S 上の
誘起圧力

$$P = \frac{\rho\omega}{16\pi} \int_0^\pi |F(\theta, \theta)|^2 d\theta, \quad (1.7)$$

次に 振動方程式は 切線方向変位を u とすると
一般に 2 点の ように 書かれる。 積分演算子 (前記 (1.3) 式)

$$\left. \begin{aligned} L_{11} w + L_{12} u + M w &= g_w \\ L_{21} w + L_{22} u &= g_u \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

(1.8) 式 (1.3) 式

$L_{11}, L_{12} = L_{21}, L_{22}$ は 微分演算子, M は
積分演算子 (1.3) より

$$M = -i\omega \int Z_w(s, s_n) ds_n \quad (1.9)$$

g_w は 法線方向の強制力 とする。
(天) (切線)

つまり, 微積分方程式 (Integro-differential eq.)
となる。

(1.8) の (狭義の) グリーニ関数 あるいは 影響関数
(in narrower sense)
(influence function) あるいは また 積分方程式と
み立てるならば 解核 (Resolvent) と呼んでもよいから
それを 使うと 次の ように 書ける。

$$\left. \begin{aligned} w(s) &= \int_0^1 [g_w(s_n) G_{11}(s, s_n) + g_u G_{12}] ds_n \\ u(s) &= \int_0^1 [g_w G_{21} + g_u G_{22}] ds_n \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

等しい

以下 簡便のために $f_n = 0$ とし, W のみ 考慮するに
する

$$Z(s) = \int_C g(s_n) G(s, s_n) ds_n, \quad (1.10')$$

となるが, 電気回路のアナロジーで

$$i\omega Z(s) = \int_C g(s_n) Y(s, s_n) ds_n, \quad (1.11)$$

$$Y = i\omega G \quad (1.12)$$

となつて, Y は 伝達アドミタンスである。

電気回路のアナロジーを使えば, この理論に
おける可逆定理によつて, 電気系, 機械系, 音響系
を含めて一般的に可逆性が証明されている^{*}ので
あらためてハスオートの定理などを持ち出す必要はない。
けれども, 音響系を考慮する時 遠場の音圧を
フツツ/割数によつて表わす方が便利である。

* 早坂他 「音響工学概論」 日刊工業新聞社
昭和47年 (1972)

2. 無限大板の一定線起振力による振動

前節の例題として Sedwizyl^(*)の教科書にある板の振動問題を採りあげてみよう。

板は x 軸に沿って無限大まで

のびており、水は x の下に振動しているとする。

この場合ノイマン関数は簡単に

$$G(R, 0) = \frac{i}{2} H_0^{(2)}(kR), \quad R = |x|, \quad (2.1)$$

と与えられる。(1.3)によって力 $p(x)$ は

$$p(x) = -\frac{A\omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \lambda H_0^{(2)}(k|x-\lambda|) d\lambda, \quad (2.2)$$

と与えられる。

次に板の振動方程式は

$$-\omega^2 m w(x) + \frac{EI}{1-\nu^2} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{i\omega^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w H_0^{(2)}(k|x-\lambda|) d\lambda = q \delta(x-x_0), \quad (2.3)$$

$$\text{今 } W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{ipx} dx$$

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(p) e^{-ipx} dp, \quad (2.4)$$

のように $w(x)$ の $\rightarrow$ フーリエ変換 $W(p)$ を求め、(2.3)の

^(*) Sedwizyl E., "Simple and complex vibratory systems" Penn. State Univ. Press, 1968, p. 379~384

表現を (2.3) に代入して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) e^{ipx} dx = e^{ipx_0} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} H_0^{(1)}(k|x-z|) dz &= e^{-ipx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipz} H_0^{(1)}(k|z|) dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{k^2 - p^2}} e^{-ipx} \quad \text{for } k > |p| \\ &\quad \frac{2i}{\sqrt{p^2 - k^2}} e^{-ipx} \quad \text{for } k < |p| \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.4) のフーリエ変換

なる関係があること

$$W(p) \left[-\omega^2 M + \frac{EI p^4}{1-\nu^2} - \frac{\omega^2}{2i} \left(\frac{2}{\sqrt{k^2 - p^2}} - \frac{2i}{\sqrt{p^2 - k^2}} \right) \right] = q e^{ipx_0} \quad (2.7)$$

今は $x_0 = 0$ とおき

$$W(p) = \frac{EI}{(1-\nu^2)M} \quad , \quad x_0 = \frac{\sqrt{\omega^2}}{2} \quad (2.4) \text{ と } (2.7) \text{ を代入}$$

とすると

$$i\omega W(x) = \frac{i\omega(q/M)}{2\pi} \int_{-k}^k \frac{e^{-ipx}}{q^4 p^4 - \omega^2 \left(1 - \frac{i}{\sqrt{k^2 - p^2}}\right)} dp$$

2つの極点がある

$$+ \left(\int_{-k}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-k} \right) \frac{dp e^{-ipx}}{q^4 p^4 - \omega^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p^2 - k^2}}\right)} \quad (2.8)$$

即ち伝達アドミタンスは

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi m\omega} \left[\int_{-k}^k \frac{dp e^{-ipx}}{\left(\frac{p}{k_0}\right)^4 - 1 + \frac{1}{\sqrt{B^2 - p^2}}} + \text{Real} \right] \quad (2.9)$$

よって駆動点コネクタンス $G(0)$ は

$$G(0) = \text{Re}\{Y(0)\} = \frac{1}{2\pi m\omega} \int_{-k}^k \frac{\frac{dp}{\sqrt{B^2 - p^2}}}{\left(\frac{p}{k_0}\right)^4 - 1 + \frac{1}{B^2 - p^2}} \quad (2.10)$$

放射パワーは次式で与えられる。

$$P = \frac{1}{2} G(0) \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \Delta^2 \quad (2.11)$$

よく知られているように $k > k_0$ かつ θ が曲げ振動の位相が
零の位相より小さい時は音は放射されない。

上式は外力のなす仕事としての定義で"あるから構造減衰
のある時は使えず", その時は (1.7) による位相"なうない。

コサ2 座標は (1.6) に (2.8), (2.9) を代入して

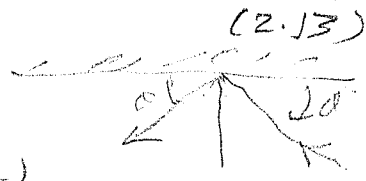
$$H(k, \theta) = \frac{g}{i p \omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_d(x, \theta) Y(x) dx \quad , \quad \dots (2.12)$$

となる。

所以 今の場合 散乱波は完全に反射される

半無限直線

$$\bar{\Phi}(x, y; \theta) = -c \left[e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + e^{ik(x \cos \theta - y \sin \theta)} \right] \quad (2.13)$$



$$\bar{\Phi}_d(x; \theta) = -2ip\omega c e^{ikx \cos \theta} \quad (2.14)$$

平面波の透過係数

よって

$$\bar{H}(k, \theta) = -2C \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx \cos \theta} Y(x) dx$$

と仮定 (2.9) は $\mathcal{F}^{-1}$ である

$p = k \cos \theta$ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx \cos \theta - px} dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(k \cos \theta - p)X}{(k \cos \theta - p)}$$

を代入すると ($p = k \cos \theta$ と θ)

2.17 計算

$$\bar{H}(k, \theta) = \frac{2Cq}{i m \omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k \cos \theta}{k_0}\right)^2 - 1 + \frac{i}{k a \theta}} \quad (2.15)$$

また (1.7) は (1)

(2.10) 式に $p = k \cos \theta$ とおくと
(2.16) 式と一致する!!

$$P = \frac{P_{\omega}}{4\pi} \cdot \frac{C^2 q^2}{m^2 \omega^2} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left| \left(\frac{k \cos \theta}{k_0}\right)^2 - 1 + \frac{i}{k a \theta} \right|^2} \quad (2.16)$$

[少くも数値計算による検証]

2.17, (2.10), (2.11) に一致する。
計算結果/数値計算を考慮して。

一般に Plancherel の定理は
フーリエ変換

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(p)}_{\substack{\uparrow \\ F(p)}} e^{-ipx} dp, \quad g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(p) e^{-ipx} dp, \quad (2.17)$$

なる1対1対応がある

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) \overline{G(q)} dp dq \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(q-p)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) \overline{G(p)} dp, \quad (2.18) \end{aligned}$$

これより $w(x)$ のエネルギーでは

$$\begin{aligned} P \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \overline{w(x)} dx &= \frac{P \omega^2 q^2}{2\pi m^2 \delta^8} \left[\int_{-b}^b \frac{dp}{\left\{ \left(\frac{p}{k_0} \right)^4 - 1 \right\}^2 + \frac{\epsilon}{k^2 p^2}} \right]^2 \\ &+ \left[\int_{-\infty}^{-b} + \int_b^{\infty} \right] \frac{dp}{\left\{ \left(\frac{p}{k_0} \right)^4 - 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} \right\}^2}, \quad (2.19) \end{aligned}$$

放射率は P を上式で割れば求められる。