

A

M. 69-1

No

1

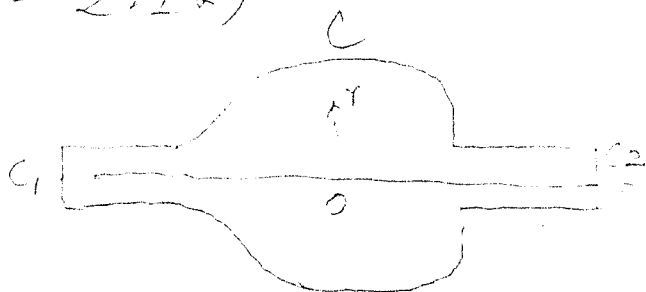
Date 5-5-44

軸対称消音器内の音場

 $(\text{Re}[\phi e^{i\omega t}])$ と表して

速度ポテンシャルはラプラスの定理より

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) ds, \quad (1)$$



$$R^2 = (x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta.$$

$$P \equiv (x, r, \theta), \quad Q \equiv (x', r', \theta').$$

ϕ が Q に関する関数であるとすると新しく

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} d\theta', \quad (2)$$

なる核関数 S を導入して、以下 $P \equiv (x, r), Q \equiv (x, r')$

と考えると (1) は次のように書ける。

$$\phi(P) = \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) - \phi \frac{\partial S}{\partial n} \right) r' ds, \quad \dots (3)$$

この ds は子午線の線素で、 C_1, C_2 については上半分だけの積分である。
検査面

境界条件は C が固体壁で動かないとすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad (4)$$

C の一部が動く時は (放射問題) をこて

速度 $\partial \phi / \partial n$ が与えられるものとしよう。

検査面 C_1, C_2 が図のように充分遠くにある時は

ϕ は平面波 $e^{\pm i k x}$ になると考えられる (波長が管径に比べて短くなると勿論伝わりながら問題にならない)。

まず C_1 から入射はか来 (散乱問題) の場合は

$$\phi \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-i k x} + A e^{i k x} \quad (15)$$

のように入射波 $e^{i k x}$ に対して反射波もある。

C_2 では x の正方向へ進む波は "かり" 。

$$\phi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-i k x} (1 + A^+) \quad (16)$$

これを透過波 $(1 + A^+)$ と呼ぼう。

さて (3) 式で ϕ の代わりに $e^{\pm i k x}$ をあててよりから

$$e^{\pm i k x} = \int_{C_1 + C_2 + C} \left(\frac{\partial e^{\pm i k x'}}{\partial n} S - e^{\pm i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right) r' ds \quad (17)$$

(5), (6) を考慮して (3) から (17) を差引くと

$$\begin{aligned} \varphi(p) = \phi(p) - e^{-i k x} &= \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} S - \varphi \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds \\ &+ A^- \int_{C_1} \left[\frac{\partial e^{i k x'}}{\partial n} S - e^{i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right] r' ds \\ &+ A^+ \int_{C_2} \left[\frac{\partial e^{-i k x'}}{\partial n} S - e^{-i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right] r' ds, \quad (18) \end{aligned}$$

を得る。

2.2 充分遠方では

$$R \xrightarrow{|x| \gg 1} \rho + x' \frac{\partial R}{\partial x'} \Big|_{x'=r'=0} + r' \frac{\partial R}{\partial r'} \Big|_{x'=r'=0}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + r^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x'} \Big|_{x'=r'=0} = \frac{-(x-x')}{R} \Big|_{x'=r'=0} = -\frac{x-x'}{\rho}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r'} = \frac{r'-r'\cos\theta}{R} \Big|_{x'=r'=0} = \frac{-r\cos\theta}{\rho}$$

$$R \xrightarrow{|x| \gg 1} \rho + \frac{r'}{\rho}(x-x') - \frac{rr'\cos\theta}{\rho}, \quad -$$

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \xrightarrow{|x| \gg 1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} + x' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{e^{-ikR}}{R} + r' \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{-ikR}}{R} \Big|_{x'=r'=0}$$

$$= \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \left[1 - ik \left\{ x' \frac{\partial R}{\partial x'} + r' \frac{\partial R}{\partial r'} \right\} \right]$$

$$= \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \left[1 + i \frac{k}{\rho} \{ x'(x-x') + rr'\cos\theta \} \right]$$

$$\therefore S(p, Q) \xrightarrow{|x| \gg 1} \frac{e^{-ik\rho}}{2\pi\rho} \left[1 + \frac{ik}{\rho} x x' \right], \quad \dots (9)$$

これを(8)式右辺の2, 3項に代入してみるとこれから2, 3項は消えてしまふ。

$$\varphi(p) = \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} S(p, Q) - \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(p, Q) \right] r' d\Omega, \quad (10)$$

と表わされる事がわかる。

入射波がない時も同様にして ϕ に対して上式が成立つ。

境界条件は散乱問題に対しては

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial}{\partial n} e^{-ikr} \quad (11)$$

である放射問題に対しては同じように $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ が与えられる。

また (9) を (10) に代入すると

$$\varphi(r) \xrightarrow{|x| \rightarrow r} \frac{1}{2\pi r} \left[\int_C r' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{ikr}{r} \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} x - \varphi \frac{\partial x}{\partial n} \right) r' ds \right], \quad (12)$$

したがって $|x| \rightarrow r$ だから

$$A^{\pm} = \frac{1}{2\pi r} \left[\int_C r' \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + ik \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} x - \varphi \frac{\partial x}{\partial n} \right) r' ds \right], \quad (13)$$

となって φ が無限遠方で 0 となるとすると $r \rightarrow \infty$ で

$A^{\pm} \rightarrow 0$ となる。(この時は当然入射波もはいてこれない)

そういうことで C_1, C_2 は有限の r だけに^{おいて} 考えねばならない。

ここで再一次 (3) 式の表現に戻ろう。

さて先ず出口 C_2 では外部に電磁エネルギーが放射されるからそのインピーダンスを Z とすると (定義?)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega \phi / Z \quad (14)$$

とがけて Z が与えられると ϕ から $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が^{計算出来} 求まる。

* この仮定が成り立たない事は 付録 1 にある通りであるから前々頁 (5) 式からの言義論は修正すべきである。

しかしこのような立上りをすて、以下の方角をとるならば

入は C_1 について反射については同じ事が考えられるがこちらは音源に直結してゐて反射は再び音源から反射されて入射波となるからこちらについては反射は無く入射波のみを考えればよいだろう。

別の考えとしては C_1 上で ϕ または $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が与えられるとしてもよい。(この方が理論上問題が少いだろう。)

いづれにしてもそうすると音は C_2 を通じて放射されるだけである。

以上のようにして C, C_1, C_2 上での $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が与えられると(3)式は境界上の点で積分方程式となりこれを解くと境界上の ϕ がわかる。

この時固有周波数は上の積分方程式の固有値として与えられるからそのマトリックスの Determinant が 0 となる ρ を探し、固有座標を求めねばならない。

そういう事で理想的消音器は C_2 から音が
出ない つまり

$$\phi \text{ or } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C_2, \quad (15)$$

であるから その内部 のは 同様に 減衰器を
おいて C_1 から はいる 音のエネルギーを 殆ど 50% だけ
よいわけである。

今は C の一部 C_3 が動いて そういう役割を
果たするとすると その 振動 振幅は (15) の関係
を満たすように 決めればよい。

あるいは (3) を 積分方程式 として 解く時に C_2 上で
(15) の条件を満たすものとして その上の 積分は 考えず
がかりに C_3 上の $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ を 未知数として 解けばよい。
この時 エネルギー の関係から

$$\int_{C_1+C_3} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} r ds = 0, \quad (16)$$

となっている筈である。

これをもう少しゆけて考えよう。

まず C_3 は動かないとして C_1 のみが動いているとして、
その時 C_2 上の ϕ はある値になるだろう。

次に C_1 は動かない (固定壁) として C_3 のみが動き、
 C_2 上の ϕ を計算するとまたある値を得る。

この両者を足したものが 0 となるように C_3 上の
振動の振幅と位相を決めればよい。

それ故 能動的に C_3 の振幅と位相を制御する。
と考えれば常に言う事は可能であろう。

またこの時 C_3 の振動で音のエネルギーは吸収
しなければならないのであるから 制御と言っても
動力は不要で C_3 の振動系の質量とバネ定数
を周波数に従って所望の値とし必要な減衰
を附せばよい。

このような目的のためにはまず与えられた形状 C_1 についてその上の各点に集積的に $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ を与えた時の問題を解りて C_2 上の ϕ を求めておき一方 C_1 のみが与えられる問題から得られる C_2 上の ϕ と較べて適当な場所と振幅位相を決めればよい。

この時最終的には C_2 からの放射抵抗はあってもなくても(いくらでも)関係ないので

極端に言えば"固体壁"と考えておいてそこからエネルギーはこゝから出て行かぬ"ならないので"

そのインピーダンスは適当な値(有限な) (いくらでもよい)に

とっておかぬ"ならない。

付録 無限に長い円筒の中の特異性

半径 1 の無限長円筒の $x=0$ の点に特異性 S がある。

$$S(x, r; 0, r') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta R}}{R} d\theta$$

$$R^2 = x^2 + \bar{\omega}^2, \quad \bar{\omega}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta,$$

(A.1)

Weyrich の積分によれば

$$\frac{e^{-i\theta R}}{R} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} H_0^{(2)}(\bar{\omega} \sqrt{p^2 - t^2}) dt, \quad \dots (A.2)$$

又

$$H_0^{(2)}(\bar{\omega} p) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n H_n^{(2)}(pr) J_n(pr') \cos n\theta, \quad (A.3)$$

for $r > r'$

であるから (A.1) は

$$S(x, r; 0, r') = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} H_0^{(2)}(rp) J_0(pr') dt, \quad \dots (A.4)$$

$$p = \sqrt{p_0^2 - t^2}, \quad r > r'$$

今

$$A = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x} F(t) J_0(pr) dt, \quad \dots (A.5)$$

のような $0 < r < 1$ で 2 個の異なる整数 l によって

$$\left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{r=1} = - \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad \dots (A.6)$$

とすることが出来る。新しく

$$N(p, a) = S + A, \quad \dots \quad (A.7)$$

のような同値は円盤上で境界条件を満足する核関数である。

$$\text{さて} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{J_0(pr)}{H_0^{(2)}(pr)} \right\} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{J_1(pr)}{H_1^{(2)}(pr)} \right\}$$

であるから (A.6) の条件から

$$F(x) = -J_0(pr') \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)}, \quad \dots \quad (A.7)$$

となる。

したがって (A.5) は

$$A(x, r; r', 0) = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i+x} J_0(pr) \bar{J}_0(pr') \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)} dt, \quad (A.8)$$

と書ける。

ここで

$$J_1(p) = \frac{p}{i} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{j_{1,n}^2} \right), \quad \dots \quad (A.9)$$

のように現わせば $j_{1,n}$ は J_1 の根である。

つまり上の被積分関数は $p = \sqrt{k^2 - x^2} = j_{1,n}$ の値

に $p=0$ を有すし、下半面で正値で小さくなって

行く ($x > 0$ として)。

$$x^2 = k^2 - j_{1,n}^2$$

右半面に

これら (A.8) の積分路は、実軸の少し上にあるものとし、
それを無限下方まで押し下げるとすれば、左半面を少し下に
引く方が利便がある。

さて、まず $p \rightarrow 0$ つまり $x \rightarrow 0$ の場合、

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(p) &\rightarrow -iY_1(p) \rightarrow \frac{2i}{\pi p} \\ J_1(p) &\rightarrow \frac{p}{2} \end{aligned}$$

これから被積分関数は

$$I = \frac{i}{4} \ell \int_0^\infty J_0(pr) J_0(pr') \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)} \xrightarrow[p \rightarrow 0]{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi} \frac{\ell}{x=1}, \quad (A.9)$$

また

$$J_1'(j_n) = -j_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{j_n^2}{j_m^2}\right)$$

だから

$$J_1(p) \xrightarrow[p \rightarrow j_n]{} \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{j_n^2} - 1 \right) J_1'(j_n),$$

$$I \xrightarrow[p \rightarrow j_n]{} \frac{i}{2} \ell \frac{J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r) J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r') H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - j_n^2})}{(-k^2 - j_n^2) J_1'(j_n)}.$$

これら

$$A = -\frac{i\ell}{k} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n^2 \ell J_0(p_n r) J_0(p_n r') H_1^{(2)}(p_n)}{\sqrt{k^2 - j_n^2} J_1'(j_n)},$$

$$p_n = \sqrt{k^2 - j_n^2}$$

$$, \text{ for } x > 0 \quad \dots (A.11)$$

$j_n > k$ のときは $\sqrt{k^2 - j_n^2} = -i\sqrt{j_n^2 - k^2}$ とする。