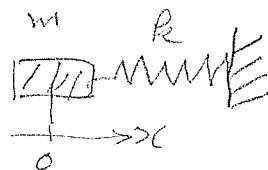


## 質量バネ系の加速度による変位

別紙

$$m\ddot{x} + kx = m\alpha(t), \quad (1)$$



$m$ : 質量,  $k$ : バネ定数

( $m$  と  $k$  は今の場合バネの質量も含めた方がよいだろう)

静的な方程式では

$$x_{st} = \frac{m}{k} \alpha_{st} = \frac{w(\alpha_{st})}{k(g)}, \quad (2) \quad (w = mg)$$

となり ( $w/g$ ) なる weight を加えたり  $x$  が所要

のストロークになればいい。

系の固有周期  $T$ , 円周数  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 振動数

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{とすると (1) 式から}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (3)$$

であるから (2) の  $x_{st}$  と  $\alpha_{st}$  がわかれば

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha_{st}}{x_{st}}} = \sqrt{\frac{\alpha_{st} \cdot g}{g \cdot x_{st}}} = 2\pi f, \quad (4)$$

とて固有周期が計算出来る。

例えば今  $\alpha_{st} = 6 \text{ m/s}^2$ ,  $\alpha_{st}/g = 8$  なら

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8 \times 9.8}{.006}} = 18.19 \text{ Hz} \quad (5)$$

( $T = .055 \text{ sec.}$ )

次に  $\alpha$  が時間の関数であるときの  $x$  を計算しよう。

1) ステップ入力の場合

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \alpha & \text{for } t > 0. \end{cases} \quad \dots (6)$$

(1) の解は

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t + \frac{m}{k} \alpha$$

よりから

$$x=0, \dot{x}=0 \quad \text{for } t=0 \text{ とすると}$$

$$\left. \begin{aligned} a + \frac{m}{k} \alpha &= 0 \\ \omega b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore x = \frac{m}{k} \alpha (1 - \cos \omega t), \quad \dots (7)$$

$$\text{となり } \text{Max.}[x] = 2 \frac{m}{k} \alpha, \quad \dots (8)$$

つまり 静的変位  $\frac{m\alpha}{k}$  の 2 倍となる。

2) 矩形パルス入力の場合.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \alpha & \text{for } 0 < t < \tau \\ 0 & \text{for } t > \tau \end{cases} \quad \dots (9)$$

初期条件は前項と同じとする ( $t > 0$ ) の場合は (7)

式である。  $t > \tau$  では

$$x = a \cos \omega(t-\tau) + b \sin \omega(t-\tau),$$

となり  $t = \tau$  では (7) より

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{m}{k} \alpha (1 - \cos \omega \tau) \\ \dot{x} &= \frac{m}{k} \alpha \omega \sin \omega \tau \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{m}{k} \alpha (1 - \cos \omega t) = a.$$

$$\frac{m}{k} \alpha \omega \sin \omega t = \omega b$$

$$\therefore x = \frac{m}{k} \alpha \left[ (1 - \cos \omega t) \cos \omega (t - \tau) + \sin \omega t \sin \omega (t - \tau) \right]$$

$$= \frac{m \alpha}{k} \left[ \cos \omega (t - \tau) - \cos \omega t \right]$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$x = \frac{2m \alpha}{k} \sin \omega (t - \frac{\tau}{2}) \sin \omega \tau, \text{ for } t > \tau, \quad (10)$$

$\tau \ll T$  (55 milisecc) ならば

$$\max [x] = \frac{2m \alpha}{k} \sin \omega \tau \approx \frac{2m \alpha \omega}{k} \tau = \frac{2 \alpha \frac{1}{\pi}}{\omega}$$

$$= \frac{I g}{\pi} \left( \frac{\alpha}{g} \cdot \tau \right), \quad (11)$$

今  $\alpha/g = 10$ ,  $\max x = 6 \text{ mm}$ ,  $T = 0.55 \text{ sec}$

よって  $\tau = \frac{0.006 \times \pi}{10 \times 9.8 \times 0.55} = 0.0035 \text{ sec}, \quad (12)$

(11) 式から考えれば、衝撃的 加速度を加える場合は (12) つまり 加速度時間曲線の面積 が同じならば変位は同じである。

この事から考えると三角波でも (11) の括弧内は面積を入れればよいだろう。

また  $\tau$  が大きい時は (11) の右辺の 最初の式 であるから  
近似は

$$\omega \tau = 2\pi \frac{T}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$\tau = \frac{T}{4} = 0.14 \text{ sec}, \quad (13)$$

の時

$$\max [x] = 2 \frac{m\alpha}{R}$$

つまり共振時の変位の 倍 となるので 前のデータを  
使えば  $\alpha = 4g$  で release する。

なお (8) は  $\omega t = \pi$  つまり  $t = \frac{T}{2}$  の時であり

今の場合は (13) のように  $\frac{T}{4}$  で  $x$  が最大になる。