

軸対称空間流の二次元解 覚書

京都大学
省庁学術院

目次

1. 序言

- 1.1 論文の考察
- 1.2 数学的モデル化

2. 線型解

- 2.1 ポテンシャルと境界値問題
- 2.2 抵抗
- 2.3 例題
- 2.4 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限

3. 線型化しない場合

- 3.1 速度ポテンシャルと流函数の表現
- 3.2 境界値問題

4. 結言

参考文献

- 付録 1. 回転粘り流体の周りの圧力とその分布
 " 2. 核函数の表現について
 " 3. 抵抗係数について (参考文献あり抜粋)

昭和 46 年 5 月

1. 序言

1.1 簡単な考察

i) 軸対称な物体が流体中で定速度で進行し、その後ルガスで満たされた後流をもつものとして扱う。



簡単な後ルガスは非圧縮性で温度の影響はないものとして仮定しよう。

ベルヌーイの定理より

$$\text{水中では} \quad p = \frac{\rho}{2}(U^2 - v^2), \quad (1)$$

(無限遠で圧力は0とする)

ガス中では

$$p = p_\infty - \frac{\rho_g}{2} v_g^2, \quad (2)$$

境界では両者の圧力は等しい。特に無限後方で考えると

$$p_\infty = \frac{\rho_g}{2} U_\infty^2, \quad (3)$$

とならねばならぬ。

運動量定理より推力 T は

$$T = p_\infty \frac{Q}{A} - \rho U^2 A, \quad (4)$$

$$Q = U_\infty A \quad (5)$$

置きかえて

$$\tau' = \tau \frac{A_0}{A} = \frac{T}{\rho U^2 A} = \frac{p_\infty}{\rho} \left(\frac{U_\infty}{U} \right)^2 - 1, \quad (4')$$

これは又抵抗係数 R に釣合ねばならぬから

$$R = T, \quad 2C_D = \tau, \quad C_D = \frac{R}{\frac{\rho}{2} A_0 U^2}, \quad (6)$$

一方連続の条件から $Q = \text{const.}$ (7)

$$(4') \text{ から } p_\infty = \frac{\rho}{2} U^2 (1 + \tau') \quad (8)$$

NO. C-1481 リンゴ用紙
*後記 (6)の条件から無限後方では運動量係数は0にならねばならぬから(4), (4')を満たすように T は(15)式で与えられるべきである。又 $\rho U A = C_D \frac{\rho}{2} A_0 U^2$ から $A = \frac{C_D}{2} A_0$ と与えられるべきである。これより(8), (9), (10)を足して略々 ii) の結果と一致する。しかし (2)に続く

さて出て行くガスの運動エネルギーは $\frac{1}{2} \rho_g U_g^2 A$ であるから
効率 η は

$$\eta = \frac{T U}{\frac{1}{2} \rho_g U_g^3 A} = \frac{2 U}{U_g} \left\{ 1 - \frac{P}{P_g} \left(\frac{U}{U_g} \right)^2 \right\} \quad (9)$$

(4') によつて U/U_g を τ' によつて表わすと

$$\eta = \sqrt{\frac{P_g}{P}} \frac{2 \tau'}{(1 + \tau')^2} \quad (10)$$

となり、右辺中 $\text{Max} \frac{2 \tau'}{(1 + \tau')^2} \Big|_{\tau'=2} = 0.76$ であるから η は $\sqrt{\frac{P_g}{P}} \pm 3\%$
を出る事はない事になる。

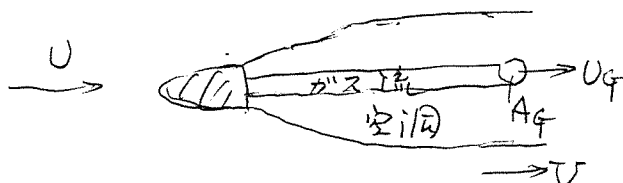
なおこの時 (4') より $\tau' = 2$ とおくと

$$U_g = \sqrt{\frac{3P}{P_g}} U \approx 50 U \quad (11)$$

となるが、これから明らかになるようにガスの速度はどうしても大きいものになる。

(必要なら) は

ii) 上記のモデルは必ずしも現実的でないように思われる
ので (2) のようなモデル (2 節モデル C) を考えよう。



つまり物体後流は空洞
(圧力一定の) となり、その中に
ガスが噴出しているとする。

2 節のモデルによれば

$$\eta = \frac{2 U / U_g}{(U / U_g)^2 + 1} \approx 2 U / U_g \quad (12)$$

となりこれは (9) に完全一致する。

なお

$$\frac{m}{2} U_g^2 = E \eta_i \quad (13)$$

$$\eta_{QA} = \eta \eta_i \quad (14)$$

E は m なる質量の燃費の化学エネルギー、 η_i は内部効率。
存在関係がある。

さて燃料後方で密度は P_g 、断面積 A_g となつたとすると
推力は

$$T = P_g A_g U_g^2 \quad (15)$$

抵抗と推力が釣り合わねばならぬから

$$\frac{\rho}{2} U^2 A_0 C_D = \rho_g A_g U_g^2$$

つまり

$$(U_g/U)^2 = \frac{A_0 \rho}{2 A_g \rho_g} C_D, \quad \dots \quad (16)$$

(12) に代入すると

$$\eta = 2 \sqrt{\frac{2 \rho_g A_g}{\rho A_0 C_D}} / \left(1 + \frac{2 A_g \rho_g}{\rho A_0 C_D} \right), \quad (17)$$

これによれば A_g/A_0 を大きく、 C_D を小さくすれば η は大きくなり、
(10) 式によるより かなり大きい効率 がえられる。

1.2 数学的 模型化

前節の議論を具体的に推し進めるときには 与えられた物体 について 境界値問題を として 解を求めなければならぬ。

前節 i) の モデルでは、

モデル A

1. ガスは可圧縮
2. 後流はガスで 満たされ 流体に接して 噴出している
3. 推力は (4) 式, つまり ガスの運動量 及び 水の運動量 の和で 与えられる

と なるが、数式化が面倒 であり又 現実性 が 疑わしい点 もある ので これ以上は 考えない 事にしよう。

次に フロペウの 運動量 理論の 中と同じように ^{上のモデルで} 後流の 速度が 一定 不變 である としよう。

モデル B

1. ガス 流断面積 一定 で 水の 流れは 半無限体
2. 抵抗は $R = \rho A_0 U^2$.
3. 推力は やはり (4) 式 で, $A = A_0$ とおいたもの.

簡単 であるが どのような形 での 抵抗は 不變 である のは 面白い。最後に 前節 ii) のように 考えて ガス流の 周りに 圧力

一定の空間を考えるとこれは普通の空間流れの理論で扱える。

モデルは：

- (i) 後流は圧力一定の空間とする。
- (ii) 加圧 p_∞ は無限遠方の水の圧力に等しいつまりキャビテーション係数 $\sigma = 0$ とする。

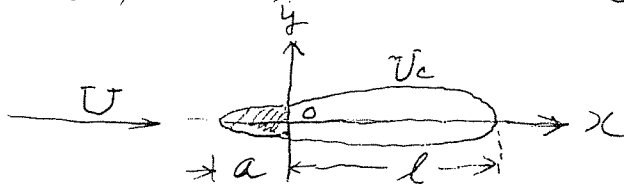
以下の議論ではこの空間流れモデルについての議論をする。なお $\sigma = 0$ では空間は無限大になつて取扱いかかえつて面倒なのだが σ は有限として問題を取扱い計算の途中で $\sigma = 0$ の値を推定する。

2. 線型解

以上の考察の下に slender body theory を使って軸対称な回転体の周りの空間流れを考えよう。

線型解では正しい解に比べて簡単で且つ問題の見当がつけやすいという利点がある。

2.1 ポテンシャルと境界値問題



ポテンシャルを

$$d\phi = \frac{u}{U} dx + \frac{v}{U} dy$$

と定義すると。

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{-a}^l \frac{m(x') dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \quad (1)$$

線型理論では

$$m(x) = \frac{1}{2\pi} A'(x), \quad (2)$$

ここで $A(x) = 2\pi r^2(x)$ (r は半径) は各断面積である。

空間常数は

$$\alpha = \frac{\frac{\rho}{2}(U_c^2 - U^2)}{\frac{\rho}{2}U^2} = \frac{2(U_c - U)}{U} = \frac{2U_c}{U}, \quad (3)$$

こうすると我々の問題は

$$\varphi_x(x, 0) = \frac{u_c}{U} = \frac{\sigma}{2} \text{ for } 0 < x < l, \quad (4)$$

のようなポテンシャルを定める率である。

今 l を焦点間距離とする回転楕円体座標を導入しよう。

$$\begin{cases} x = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \zeta \mu \\ y = \frac{l}{2} \sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{1-\mu^2} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \cosh \eta, \mu = \cos \theta \end{array} \right\}, \quad (5)$$

$0 < x < l$ の内では $\zeta \doteq 1$ とすると

$$x \doteq \frac{l}{2} (1+\mu), \quad y \doteq \frac{l}{2} \sqrt{1-\mu^2}, \quad \dots (6)$$

$|x - \frac{l}{2}| > \frac{l}{2}$ 側では $\zeta \doteq 0$ とすると

$$\begin{cases} x \doteq \frac{l}{2} (1+\zeta) \text{ for } x > \frac{l}{2} \\ x \doteq \frac{l}{2} (1-\zeta) \text{ for } x < \frac{l}{2} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{l}{2} \sqrt{1-\zeta^2} \\ y = -\frac{l}{2} \sqrt{1-\zeta^2} \end{array} \right\} \quad (7)$$

今 (7) 式を物体の外と、空洞の外に分解して

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_c, \quad \dots (8')$$

と別けておくと

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(\zeta) P_n(\zeta') P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad \dots (8)$$

for $\zeta > \zeta'$

なる座標がある。

$$m(x) = l \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu), \quad l > x > 0, \quad \dots (9)$$

と表わされるとすると

$$\varphi_c = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{m(x') dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = -l \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) Q_n(\zeta), \quad \dots (10)$$

$$\text{但し} \quad \int_1^{\zeta} P_n(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{2 \delta_{n,m}}{2n+1}$$

特に $\zeta \rightarrow 1$ では

$$Q_n(\zeta) \rightarrow \log \frac{2}{\zeta} - \sigma_n, \quad \sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad \dots (11)$$

となり 空洞上ではこのよう

$$\eta_0(x) \doteq \frac{2 \gamma(x)}{l \sqrt{1-\mu^2}}, \quad \dots (12)$$

となる。(10)式で ζ が変化すると大変面倒になるのを以下

では $\gamma_0(s_0)$ が空間上で近似的に変らぬものとし、解が得られ
左邊に適當な値を代入するものとしよう。

さて形式的に

$$K(x, y; x') = \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\mu) P_n(\mu')}{Q_n(s)} \left(\frac{2n+1}{2} \right), \quad \dots (13)$$

という函数を導入するとこれを(10)式にかけて積分して、

$$m(x) = - \int_0^{\ell} \varphi_c(x, y) K(x, y; x') dx', \quad \dots (14)$$

を得る。

ここで(14)の条件は

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \gamma + \frac{\sigma}{2} x \\ \text{or } \varphi_c &= \gamma + \frac{\sigma}{2} x - \varphi_a \end{aligned} \right\} \text{ for } 0 < x < \ell, \quad (15)$$

但し γ は任意常数とする。

これを(14)に代入すると

$$m(x) = - \int_0^{\ell} \left(\gamma + \frac{\sigma}{2} x' \right) K dx' + \int_0^{\ell} \varphi_a K dx', \quad \dots (16)$$

$$\text{但し} \quad \varphi_a(x, y) = - \frac{1}{2} \int_{-a}^0 \frac{m_0(x') dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}, \quad \dots (17)$$

で m_0 は与えられた物(本)の形から(2)式で決まっている。

$$\gamma + \frac{\sigma}{2} x' = \left(\gamma + \frac{\ell}{4} \sigma \right) P_0(\mu') + \frac{\ell}{4} \sigma P_1(\mu')$$

これから

$$\int_0^{\ell} \left(\gamma + \frac{\sigma}{2} x' \right) K dx' = \frac{\ell}{4} \gamma \frac{P_0(\mu)}{Q_0(s_0)} + \frac{\ell}{4} \sigma \frac{P_1(\mu)}{Q_1(s_0)}, \quad (18)$$

~~また~~ $\frac{\ell}{4} \gamma = \gamma + \frac{\ell}{4} \sigma$, 但し γ を新しい任意常数とみなくてはなる。

次に(17)の積分については積分順序を変えて、

$$- \int \varphi_a K dx' = \frac{1}{2} \int_{-a}^0 m_0(x'') dx'' \int_0^{\ell} \frac{K dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}$$

とおき $x' \doteq \frac{\ell}{2} (1 + s_0 \mu')$, $x'' \doteq \frac{\ell}{2} (1 - s'')$ とおくと、

$$(18) \text{式は} \quad \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \frac{2}{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n Q_n(s'') P_n(s_0) P_n(\mu'), \quad \dots (19)$$

となるから、

$$\frac{1}{2} \int_0^l \frac{K dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \frac{l}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{2} \frac{Q_n(s_0)}{Q_n(s_0)} \frac{P_n(s_0)}{P_n(\mu)}$$

となり 結局

$$+ \int_0^l \frac{1}{4} K dx' = \frac{l}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)}{2} \frac{P_n(s_0)}{Q_n(s_0)} P_n(\mu) \int_{-a}^0 m_0(x'') Q_n(s'') dx'' \quad (19)$$

となる。

$$\text{したがって} \quad m = l \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) \quad \text{と表わすならば}$$

$$\begin{aligned} -\alpha_0 &= \frac{1}{4 Q_0(s_0)} + \frac{P_0(s_0)}{4 Q_0(s_0)} \int_{-a}^0 m_0(x) Q_0(s) dx, \\ -\alpha_1 &= \frac{0}{4 Q_1(s_0)} - \frac{3}{4 Q_1(s_0)} \int_{-a}^0 m_0(x) Q_1(s) dx, \\ -\alpha_n &= (-1)^n \frac{(2n+1)}{4 Q_n(s_0)} \int_{-a}^0 m_0(x) Q_n(s) dx, \quad \text{for } n \geq 2 \\ &\quad (P_n(s_0) \doteq 1) \end{aligned} \quad (20)$$

つまり (20) では $m(0) = m_0(0)$ と表わすはならない。

これは

$$m_0(0) = l \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \quad (21)$$

と表わせる。

又 空間は $x=l$ で閉じられている。

$$\begin{aligned} \int_0^l m(x) dx &= \frac{l^2}{2} \sum_n \alpha_n \int_{-1}^1 P_n d\mu = l^2 \alpha_0 = - \int_{-a}^0 m_0(x) dx \\ &= - \frac{A_0}{2\pi} \quad (22) \end{aligned}$$

よって

$$\alpha_0 = - \frac{A_0}{2\pi l^2} \quad (22')$$

(20), (21), (22) より α 未知定数 α は定まり, l と α の関係が決められることになるが s_0 はまだ未定である。

これには単純に $\sqrt{s_0^2 - 1} \doteq r_0 = 2r_0/l$ の r_0 を $\sqrt{A_0/\pi}$ とするのと同じ方法であり, 又平均的に考えて空間の体積と等しい楕円体を考えるとその体積は $\frac{4}{3}\pi l r_0^2$ となるから

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= -\frac{3}{2\pi\ell} \int_0^\ell A(x) dx = -\frac{3}{2\pi\ell} \int_0^\ell m(x) \{P_0(\mu) + P_1(\mu)\} d\mu \\
 &= -\frac{3}{2} \ell^2 \left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{3} \right] \quad , \quad \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

のようにとるのも又一つの方法であらうが、これは少々面倒になるだろう。

2.2. 抵抗

抵抗は

$$R = 2\pi \int_{-a}^0 (P - P_c) r \frac{dr}{dx} dx = 2\pi \int_{-a}^0 (P - P_c) m_0(x) dx, \quad (1)$$

ここで計算出来るから $\frac{P}{\rho} \doteq -U^2 \varphi_x$, $P_c \doteq \frac{\rho}{2} U^2$ であるから。

$$R = 2\pi \rho U^2 \int_{-a}^0 \left[\frac{\rho}{2} - \varphi_x(x) \right] m_0(x) dx, \quad (2)$$

となる。

ここで $\varphi = \varphi_a + \varphi_c$ であり、容易に

$$\int_{-a}^0 \varphi_{ax}(x) m_0(x) dx = 0, \quad \dots \quad (3)$$

となる事がわかった (物体が尖っている場合のみ) から

$$R = 2\pi \rho U^2 \int_{-a}^0 \left[\frac{\rho}{2} - \varphi_{cx} \right] m_0(x) dx, \quad \dots \quad (2')$$

としてよい。

$$\begin{aligned}
 \text{ただし} \quad \int_{-a}^0 m_0(x) dx &= \frac{A_0}{2\pi} \quad \text{であるから} \\
 \frac{\rho}{2} U^2 A_0 &, \quad \dots \quad (4)
 \end{aligned}$$

である。

また抵抗は (10) より

$$\begin{aligned}
 \varphi_c(x) &= -\ell \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (-)^n Q_n(\zeta) \\
 \varphi_{cx}(x) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (-)^n Q_n'(\zeta) \\
 \zeta &= 1 - 2x/\ell
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi_c(x) \\ \varphi_{cx}(x) \\ \zeta \end{aligned}} \right\} \quad (15)$$

であるから

$$C_D = \frac{R}{\frac{\rho}{2} A_0 U^2} = \sigma = - \frac{4\pi}{A_0} \int_{-a}^0 \varphi_{cx} m_0(x) dx$$

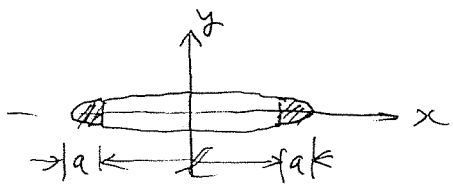
$$= \sigma = - \frac{8\pi}{A_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n \int_{-a}^0 Q_n'(s) m_0(x) dx, \quad \dots (6)$$

が得られる。

右辺の2項の積分は一般には存在しない形で"あるので"図2の例について考えねばならない。

2.3 例題

具体例を考えるには対称性の点から Riabouchinsky model で考えるのが便利であろう。



左図のような場合を考え、全厚として、

$$A(x) = (1 - \mu^2) A_0$$

$$\mu = \frac{2x}{\ell + 2a},$$

$$\text{従つて } m(x) = -(\ell + 2a) \alpha_0 P_1(\mu)$$

$$\alpha_0 = \frac{2A_0}{\pi(\ell + 2a)^2},$$

} (1).

とおいと

$$\varphi = (\ell + 2a) Q_1(s) P_1(\mu), \quad \dots (2).$$

$$\text{即ち } s^2 - 1 = \left(\frac{2x}{\ell + 2a} \right)^2 \doteq \eta^2 \doteq 2\alpha_0, \quad A_0 = \pi r_0^2,$$

よつて

$$\varphi_x \doteq 2 Q_1(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 2 \left(\lg \frac{2}{\eta} - 1 \right); \text{const.} \quad (3)$$

であるから一次近似では全厚に圧力一定である。

つまり線型近似では空洞は楕円体を作っている。

逆に今の場合 a をどのようにとつても近似的には空洞流れとなる筈であり、このとき

$$\sigma = 2 \varphi_x \doteq 4 \left(\lg \frac{2}{\eta} - 1 \right), \quad \dots (4)$$

となり今の場合 r_0 と a は与えられているからこれから σ と ℓ の関係を与える式となる。

抵抗は §2.2 (2) により

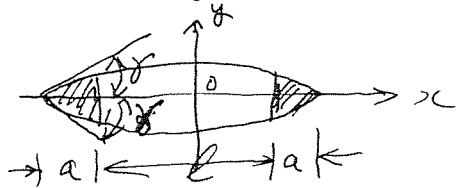
$$R=0, \quad \text{---} \quad (5)$$

となる。

これは鋭型化による矛盾であるが、鈍頭体に限らず、
このような事は二次近似理論でも解決しないと言う。⁶⁾

楕円体の場合 ~~しかし~~ 確かに抵抗は先の ~~と~~ かった
ものに対して抵抗は小さい ようである。(附録1, 3 参照)

次に先の ~~と~~ かった例として、



$$\left. \begin{aligned} m(x) &= -(l+2a)\alpha_1 \{P_1(\mu) - P_3(\mu)\} \\ P_1(\mu) - P_3(\mu) &= \frac{5}{2}\mu(1-\mu^2), \\ A(x) &= A_0(1-\mu^2)^2, \\ A_0 &= \pi r_0^2 = \frac{5}{8}\alpha_1(l+a)^2, \end{aligned} \right\} (6)$$

で表わされる両端 a の部分の物体を考慮しよう。

先端の半角 α は、

$$\tan \alpha = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{A(x)}{\pi}} \Big|_{x=\frac{l}{2}-a} = \sqrt{10\alpha_1} = 4 \frac{r_0}{l+2a}, \quad (7)$$

である。

(6)によるポテンシャルは、

$$\varphi_0 = (l+2a)\alpha_1 \{Q_1(s_0)P_1(\mu) - Q_3(s_0)P_3(\mu)\}, \quad (8)$$

2.2.2 $\sqrt{s_0^2-1} \div \eta_0 \div \left(\frac{2r_0}{l+2a}\right)^2$ と考えておく。

さて、 $l > x > -l$ の間で φ_0 に φ_c を加えて、

$$\varphi_x = \varphi_{0x} + \varphi_{cx} = \frac{\sigma}{2}, \quad \text{---} \quad (9)$$

とするためには、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c &= l\beta_1 \{Q_1(s_0^*)P_1(\mu^*) - Q_3(s_0^*)P_3(\mu^*)\} \\ \varphi_{cx} &= -2\beta_1 \{Q_1(s_0^*) - \left(\frac{5}{2}\mu^{*2} - \frac{3}{2}\right)Q_3(s_0^*)\} \\ m_c(x) &= -l\beta_1 \{P_1(\mu^*) - P_3(\mu^*)\} = -\frac{5}{2}l\beta_1 \mu^*(1-\mu^{*2}), \\ \mu^* &= 2x/l, \quad \sqrt{s_0^{*2}-1} \div \eta_0^* \div \left(\frac{2r_0}{l}\right)^2, \end{aligned} \right\} (10)$$

とかけば", つな全部の条件も又満足している。

- 式 (8) は μ^* によつて

$$\begin{aligned}\varphi_{0x} &= 2\alpha_1 \left\{ Q_1(s_0) - Q_3(s_0) \left(\frac{5}{2} \mu^3 - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= 2\alpha_1 \left[Q_1(s_0) - Q_3(s_0) \left\{ \frac{5}{2} \frac{l^2}{(l+2a)^2} \mu^{*2} - \frac{3}{2} \right\} \right] \\ &= 2\alpha_1 \left[\left\{ Q_1(s_0) + \frac{6a(l+a)}{(l+2a)^2} Q_3(s_0) \right\} P_1(\mu^*) - \left(\frac{l}{l+2a} \right)^2 Q_3(s_0) P_3(\mu^*) \right], \quad (11)\end{aligned}$$

と書く事が出来るから 上式と比較して、

$$\beta_1 = - \frac{\alpha_1 Q_3(s_0)}{Q_3(s_0^*)} \left(\frac{l}{l+2a} \right)^2, \quad (12)$$

とかけば" (9) は満足され この時

$$\begin{aligned}\varphi_x(x) &= 2\alpha_1 \left[Q_1(s_0) + \frac{6a(l+a)}{(l+2a)^2} Q_3(s_0) - \left(\frac{l}{l+2a} \right)^2 \frac{Q_3(s_0)}{Q_3(s_0^*)} Q_1(s_0^*) \right] \\ &= \frac{\sigma}{2} \xrightarrow{s, s_0^* \rightarrow 1} 2\alpha Q_1(s_0) \frac{10a(l+a)}{(l+2a)^2}, \quad \text{for } -\frac{l}{2} \leq x < \frac{l}{2} \\ &\quad \dots (13)\end{aligned}$$

となる。

左側部分の上では φ_0 は (8) で与えられるが φ_c は (10) において $\mu^* = -1$, $s^* = -\frac{2x}{l}$ とかけば" よく、

$$\begin{aligned}\varphi_c(x) &= l \left(\frac{l}{l+2a} \right)^2 \alpha_1 \frac{Q_3(s_0)}{Q_3(s_0^*)} \left\{ Q_1(s^*) - Q_3(s^*) \right\} \quad \text{for } x < -\frac{l}{2} \\ \varphi_{cx}(x) &= 2\alpha_1 \left(\frac{l}{l+2a} \right)^2 \frac{Q_3(s_0)}{Q_3(s_0^*)} \left\{ Q_1'(s^*) - Q_3'(s^*) \right\} \quad \text{for } x < -\frac{l}{2}\end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで $Q_1(s) = \frac{5}{2} l \frac{s+1}{s-1} - 1$, $Q_3(s) = \frac{1}{4} (5s^3 - 3s) l \frac{s+1}{s-1} - \frac{5}{2} s^2 + \frac{3}{2}$

故に $Q_1'(s) - Q_3'(s) = \frac{5}{4} (1-3s^2) l \frac{s+1}{s-1} - \frac{15}{2} s$,

であるから 3.2.2 (6) に代入すれば" 計算出来る。

2の場合には上式を明らかにように積分は可能である。

2.4 $\sigma \rightarrow 0$ の極限.

親型理論によつて $\sigma \rightarrow 0$ の極限の内部を調べるのは大変難しいようであるが、ここには有名な結果を紹介しておこう。

空洞の形は近似的に

$$r(x) = \frac{c\sqrt{x}}{(\log x)^{1/4}} \left[1 - \frac{1}{8} \frac{\log \log x}{\log x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right], \quad (1)$$

ここに c は定数であつて同じ c によつて抵抗は

$$R = \frac{\pi}{8} \rho c^4 U^2, \quad (2)$$

と表わされる。

又 σ が小さい時抵抗係数の間には

$$C_D(\sigma) \div C_D(0)(1+\sigma), \quad (3)$$

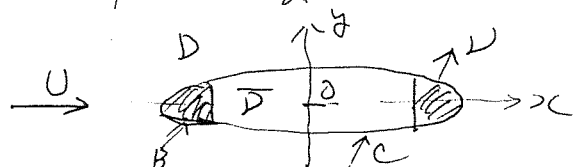
ここに $C_D(0)$ は $\sigma=0$ の時の抵抗係数である。

なす関係がある事が判つてゐるがこれは実験的に非常に有用な関係である。

3. 線型化しない場合

上述のように線型化すると其の悪い場合もあるのでここでは線型化しないで問題を考えよう。数値計算を前提として考えるとこのように考えても必ずしも問題は複雑にならない。

3.1 速度ポテンシャルと流れ函数の表現



左図のように円筒座標系 (r, θ, z) を採用して前線対称な Riebockinsky model を考える。

一般に速度ポテンシャルは source-sink もしくは doublet で表現出来るから今は doublet で次のように表わせれよう。

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R(P,Q)} dS'(Q) \quad (1)$$

ここに $P \equiv (x, y, z)$, $Q \equiv (x', y', z')$

又 $P \in D$ として $\mu(Q)$ を D に延長し $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y'} = 0$ のような函数と仮定すれば「グリーン」の定理により

$$\begin{aligned} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} dS &= \iiint_D \nabla \mu \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) d\tau = \iiint_D \frac{\partial \mu}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} d\tau \\ &= \int_{B+C} \frac{\partial \mu}{\partial x'} dx' \left[\iint \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{R} y' dy' dz' \right], \end{aligned} \quad (2)$$

と書けるから 今

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R(P, Q)} \right) y' dy' dz', \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} \mu(x) &= \gamma(x) dS(x) \\ dS &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned} \quad (4)$$

とかくと

$$\phi(P) = \int_{B+C} \gamma(x') S(P, x') dS(x') \quad (5)$$

となる。これは円柱状のサークル・シユン γ による表現である。

又 $4\pi S(P, x')$ は x' 点における横切面が P 点において張る立体角であつてこれはこの面を通過する毎 4π だけ減る。

この事から

$$\frac{\partial}{\partial s} [\phi|_D - \phi|_{\bar{D}}]_{B,C} = \gamma, \quad \dots (6)$$

なる関係がある。

次に流れ函数 ψ を次のように導入しよう³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{v}{u} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

特に $\phi = x$ であり一様流れの ψ は、

$$\psi = \frac{y^2}{2}, \quad \dots (8)$$

である。又

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= x + \phi \\ \Psi &= \frac{y^2}{2} + \psi \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

とかくとち境界条件 (表面に沿って流れると云う) は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \Psi &= 0, \quad \psi = -\frac{y^2}{2} \end{aligned} \right\} \text{ on } B \text{ and } C, \quad (10)$$

と表わされる。

(5)式は ψ については

$$\psi(p) = \int_{B+C} \gamma(x') T(p, x') dA(x'), \quad \dots (11)$$

$$T(p, x') = -y \int d\lambda \frac{\partial}{\partial y} S = \frac{y}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{y' dy' d\theta}{R}, \quad \dots (12)$$

となる。(附録 2 参照³⁾)

このような表現は極めて一般的でどんな形状でも取崩がえるが計算が少々複雑になると云う欠点がある。

実際には細長い物体を扱い、又先端もあまり鋭くないのでよく用いられるように source-sink 分布を軸上におくもので充分であろうし又この方法は計算が簡単である。

この場合は

$$\phi(p) = - \frac{1}{2} \int_{B+C} \frac{m(x')}{R} dx' \quad (13)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2$$

§2で考えたように ϕ / 近似としては

$$m(x) \approx \frac{1}{2\pi} A(x) \quad (14)$$

である。

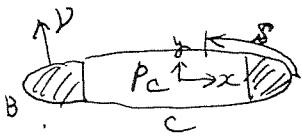
これに 대응する流れ面 ψ は

$$\psi(p) = - \frac{1}{2} \int_{B+C} m(x') \left\{ \frac{x-x'}{R} - 1 \right\} dx' \quad (15)$$

以下の定義は (13), (15) の表現を ψ において行う事としよう*。

3.2 境界値問題

我々の境界値問題は Hamilton の原理により 変分問題に置換えられる。さてこの場合の Lagrangian は



$$L = \iint_D p d\tau + \iint_D p_c d\tau \quad (1)$$

$$p = \frac{\rho U^2}{2} (1 - q^2) = \rho U^2 \left\{ \frac{1}{2} - \phi_x - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right\} \quad (2)$$

$$q^2 = (1 + \phi_x)^2 + \phi_y^2, \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$p_c = - \frac{\rho U^2}{2} \sigma \quad (3)$$

となる。よって

$$\frac{L}{\rho U^2} = \iint_S \phi \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) dS - \frac{\sigma}{2} V \quad (4)$$

ここで V は D の容積である。

今 S から与えられるとすると V は不変であるから

$$\frac{\delta L}{\rho U^2} = \iint_S \delta \phi \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) dS \quad (5)$$

となる故 $\delta L = 0$ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0 \quad (6)$$

と等価である。

* $\phi = Q_1(s) P_n(\mu)$ と表わされる時 $\psi = \frac{c}{n(n+1)} (s^2-1) Q_n'(s) (1-\mu^2) P_n'(\mu)$ と表わされる。
 c は分布定数の半長, s, μ は前節に同じ。

(6)を満足する ϕ を(2)に代入して今度は自由表面を $\delta\psi$ だけ変えると

$$\delta L = \iint_S (p_c - p) \delta\psi dS, \quad \dots \quad (7)$$

となるから

$$p = p_c; \text{const.} \quad (8)$$

となって空洞内問題の解が与えられる。

ϕ が(6)を満足する時は(4)から

$$L = \frac{\rho}{2} U^2 (T - \sigma V), \quad \dots \quad (9)$$

$$T = \iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS' = \iint_D (\nabla \phi)^2 d\tau, \quad \dots \quad (10)$$

となるが、 $\frac{\rho}{2} U^2 T$ は明らかに流体の運動エネルギーである。

流れ関数を使うと

$$\left. \begin{aligned} x_\psi &= y_s, \quad y_\psi = -x_s, \quad \text{とすると} \\ \phi_\psi &= \phi_x x_\psi + \phi_y y_\psi = \frac{1}{s} \psi_s, \quad d_s S = 2\pi y ds \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であるから

$$T = 2\pi \int \phi y y_s ds = 2\pi \int \phi \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y^2}{2} \right) ds = -2\pi \int \phi \frac{\partial y}{\partial s} ds, \quad (10')$$

$$\text{従って} \quad \frac{L}{\frac{\rho}{2} U^2} = \int \phi \left(y \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial y^2}{\partial s} \right) ds - \frac{\sigma}{2\pi} V, \quad \dots \quad (4')$$

$$\text{or} \quad = \frac{1}{2} \int \phi y y_s ds - \frac{\sigma}{2\pi} V, \quad \dots \quad (4'')$$

さて (7) を (2) (3) を用いて書き直すと。

$$\frac{\delta L}{\frac{\rho}{2} U^2} = \iint_S \{ (\eta^2 - 1) - \sigma \} \delta\psi dS, \quad \dots \quad (7')$$

$$\text{よって} \quad \delta\psi = \varepsilon \eta(x) \frac{\partial y}{\partial s} = -\varepsilon \eta(x) \frac{\partial x}{\partial s} \quad \dots \quad (12)$$

$$\text{とかくと} \quad \delta\psi dS = -2\pi \varepsilon \eta(x) y(x) dx, \quad \dots \quad (13)$$

となるから上式は

$$\frac{\delta L}{\frac{\rho}{2} U^2} = -\varepsilon \int_c \{ \eta^2 - 1 - \sigma \} \eta(x) y(x) dx, \quad \dots \quad (14)$$

特 12

$$\int_c \eta(x) \psi(x) dx = 0, \quad \dots \dots (15)$$

とかくと 容積変化はないから V には関係なく.

$$\frac{\delta L}{\frac{\rho}{2} V^2} = \delta T = - \epsilon \int_c (\eta^2 - 1) \eta(x) \psi(x) dx, \quad (16)$$

これは Riebochinski の Minimum added mass principle である。

この変分法を用いて空洞問題を解いた例はまだ見掛けないようにあるが、 η のように実行すれば可能であると考えられる。なおこの過程で η の問題の困難さは理解出来るであろう。

さて 先ず 適当な C の形を仮定してポテンシャルを求めよ。

この方法に二つあって一つの方法は $\delta \int (10)$ の積分方程式を直接解くものである。

即ち
$$\psi(x) = -\frac{y^2}{2} = -\frac{A(x)}{2\pi}, \quad \dots \dots (17)$$

もう一つの方法は (5) により変分問題にかえる方法、つまり

$$T^* = \int_{B+C} \phi \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} ds, \quad (18)$$

を最小にするような $m(x)$ を求める方法である。

この方法は右辺の積分だけ余計積分しなければならないので一般には時間がかかるけれど、一方では $m(x)$ として適当な函数を選べば方程式の元数を大幅に減らせる利点がある。

例えば 最も簡単な場合は m として ϕ の近似、つまり

$$m_0(x) = \frac{1}{2\pi} A'(x)$$

を選び
$$m(x) = \alpha m_0(x), \quad \alpha: \text{常数} \quad (19)$$

とおき、 m_0 による速度ポテンシャル、流速函数をそれぞれ ϕ_0, ψ_0 とすると

$$T^* = \alpha \int \phi_0 \frac{\partial}{\partial s} \frac{y^2}{2} ds + \frac{\alpha^2}{2} \int \phi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial s} ds, \quad (20)$$

となる故

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} T^* = \int \phi_0 y y_s ds + \alpha \int \phi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial s} ds = 0$$

から

$$\alpha = \frac{\int \phi_0 y y_s ds}{-\int \phi_0 \psi_{0s} ds} \quad (21)$$

なる近似値がえられる。

いづれにしてもこのようにして ϕ を求めた後 $g = |\phi + \alpha s|$ を C 上で計算しておく。

次に C 上で圧力一定の条件を満たすには (14) が成立つように ψ を選べばよいわけであるが、あらかじめ空洞の長さを決めて計算している筈であるから ψ の値はまた決っていない。

そこでまず (15) の条件、つまり空洞容積を一定として (16) の原理を使って ψ を求める。

つまり

$$\int_C \psi(x) y(x) dx = 0$$

の下に

$$\int_C (\psi^2 - 1) \psi(x) y(x) dx = 0 \quad (22)$$

そのような函数は無数にあるが、この上にさらに端点で ψ の条件、つまり曲率 ψ'' が連続でなければならぬから

$$\psi = \psi' = \psi'' = 0 \quad , \quad \text{端点において} \quad (23)$$

(ψ は ψ' とともに ψ'' まで連続にえらぶ)

としなるべく簡単なものを C から一つえらぶ。

それを $\psi_1(x)$ としておこう。 α は未定常数である。

次に今度は (15) の条件を除いて (23) を満足する ψ の中さらに

$$\int_C (\psi^2 - 1) - \alpha \psi \psi(x) y(x) dx = 0 \quad (24)$$

なる条件を満たすものを考え、 ψ を $\beta \psi_2(x)$ と記そう。
 β はやはり未定常数である。

そうすると 合せて

$$\psi(x) = \alpha \psi_1(x) + \beta \psi_2(x)$$

と 同 事 になるがこれを(24)に代入すると $\eta_1(x)$ は(22)を満足する
ので消えて

$$\sigma = \frac{\int (\eta^2 - 1) \eta_2(x) \eta(x) dx}{\int \eta_2(x) \eta(x) dx} \quad (25)$$

のように σ が求められる。

という訳で結局 $\eta_1(x)$ は考える必要がなくなったことになる。

このようにして σ の近似値は求まるに174 変形量 $\varepsilon \eta$ は
常数倍だけ不定である。この事は亦1 近似的には σ を
(25) のように とれば 充分小さい ε について $\varepsilon \eta$ なる変形を施した
ものはすべて解となるという事である。つまり(25)は C 上の
圧力の η による加重平均であるから ~~それ~~ 元の仮定した曲線に
関する平均的な σ となっている訳である。

そこで更に近似を進めるには もう一度 C を新しく仮定して
同じ操作を繰返し σ の値および C の形が一定のものに
収束するまで 続けなければならぬ。

そのような下変な計算をせける ~~途~~ には 次のようなのも一つの方法である。

今 $\eta \rightarrow \eta(x) + \varepsilon \eta(x)$
と変形した時 m, ψ, ϕ は 夫々 変化する訳であるから それを
2次の項までとつて

$$m(x) = m_0(x) + \varepsilon m_1(x) + \varepsilon^2 m_2(x), \quad \dots (26)$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 \\ \psi_j &= -\frac{1}{2} \int_{\text{arc}} m_j \left(\frac{x-x'}{R} - 1 \right) dx' \end{aligned} \quad \left\{ (27) \right.$$

となるでしょう。

ψ の境界条件は $-\frac{1}{2}(\eta + \varepsilon \eta)^2 = -\frac{\eta^2}{2} + \varepsilon \eta^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \eta^2$ である
から

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -\frac{\eta^2}{2} \\ \psi_1 &= -\eta(\eta + \psi_{0y}) \\ \psi_2 &= -\eta \psi_{1y} - \frac{\eta^2}{2}(1 + \psi_{0yy}) \end{aligned} \quad \left\{ \text{at } y = \eta(x), (28) \right.$$

もし仮に「前述の 2 のようなものに選ぶ」とこの解は 近似 求められる。
しかも 右を求める時の 聯立方程式 と同じマトリックス であるから
簡単である。なお $\frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}}$ としても差支えない (後述)

この解 m_i が 入ると (10) の T の計算は、

$$T = - \int_{B+C} \{ 2\pi m(x) - A'(x) \} x dx, \quad \dots (29)$$

なる公式 によって 計算するのが 便利 である。

(26) を 代入して 計算すると、

$$\begin{aligned} T &= T_0' + \varepsilon T_1' + \varepsilon^2 T_2' - (V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2), \\ \left. \begin{aligned} T_0' &= -2\pi \int m_0(x) x dx \\ T_1' &= -2\pi \int m_1(x) x dx \\ T_2' &= -2\pi \int m_2(x) x dx \end{aligned} \right\} (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi \int y^2 dx \\ V_1 &= 2\pi \int y \eta dx \\ V_2 &= \pi \int \eta^2 dx \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{aligned}} \right\} (31)$$

$$\therefore \quad \omega V = \omega V_0 + \varepsilon \omega V_1 + \varepsilon^2 V_2, \quad \dots (32)$$

従って $\delta L = 0$ から

$$\varepsilon = \frac{(1+\omega)V_1 - T_1'}{2\{T_2' - (1+\omega)V_2\}}, \quad \dots (33)$$

が 得られる。

この値 によって $\varepsilon \eta$ だけを 変形して もう一度 ϕ の 計算を 繰返して
これを 計算 しておけば さらに 良い 近似 が えられよう。

なお ϕ の値 が C の上で 恒等的に Const. となる 時は 上の
方法で m_1, m_2 が 求まれば ϕ も 容易

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2, \quad \dots (34)$$

の 形に かけから

$y = y + \varepsilon y$ における ϕ を計算して ϕ を求めて見れば "精度を確かめる事が出来るであろう。

最後に抵抗は計算の段階で ϕ を計算するルーチンがあるので公式通り

$$\frac{R}{\frac{\rho}{2} U^2} = 2\pi \int_B \{1 + \sigma - \phi^2\} y \frac{dy}{dx} dx, \quad \dots (35)$$

によつて計算すればよい。勿論 B は左のもののみをとる。

4. 結 言 (二頁)

参 照 文 献

- 1) E. ゼンゲル, 太田三郎訳 "ロケット航空工学" 柏葉書院 昭和19年
- 2) R.T. Knapp et al.; "Cavitation" McGraw-Hill, 1970
- 3) H. Lamb; "Hydrodynamics"
- 4) D. Gilberg; "Jets and Cavity" Handbuch der Physik Bd. 9
Springer, 1960
- 5) M. P. Tulin; D.T.M.B. Report 834, 1953
- 6) M. D. van Dyke, NASA T.R. R-47
- 7) E. O. Tuck, JFM 1963 or 4
- 8) M. Bessho, M. D. A. vol. 10, 1970

4. 系言

以上の考察から 次のような事がわかる。

i) 抵抗の小さい物体は推進効率が高い (§1)

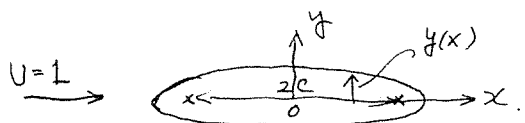
ii) 楕円体の先端を切ったような形状は抵抗が小さい (§2, 附録3)

iii) 細型理論では先端の丸いものは扱えない

iv) Ⅱでは任意の形状についての正しい計算法について述べ、~~変分法~~ 変分法を用いると近似的な空洞の取扱いが出来る事を示した。

以上

附録 / 回転楕円体の周りの圧力と速度分布



$$\left. \begin{aligned} x &= c \mu \\ y &= c \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{1 - \mu^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= c^2 (s^2 - 1)(1 - \mu^2) \\ A &= \pi c^2 (s^2 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\phi = -c \frac{Q(s_0)}{Q'(s_0)} P_1(\mu), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= x + \phi = c P_1(\mu) \left[P_1(s_0) - \frac{Q_1(s_0)}{Q'(s_0)} \right] = \alpha c P_1(\mu) \\ \alpha &= \frac{1}{(1 - s^2) Q'(s)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$g^2 = \Phi^2 \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 = \frac{\alpha^2 c^2 (1 - \mu^2)}{c^2 (s^2 - \mu^2)} = \frac{\alpha^2 (1 - \mu^2)}{s^2 - \mu^2}$$

$$\therefore \frac{p}{P} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 (1 - \mu^2)}{s^2 - \mu^2} \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{P} R(\mu) = \iint_{-1}^{\mu} p y_s ds = 2\pi \int_{-1}^{\mu} p y y_s ds = 2\pi \int_{-1}^{\mu} p y \frac{dy}{d\mu} d\mu$$

$$\therefore R(\mu) = \pi P \int_{-1}^{\mu} (1 - g^2) y \frac{dy}{d\mu} d\mu, \quad (6)$$

$$= -\pi P c^2 \int_{-1}^{\mu} \left\{ 1 - \frac{\alpha^2 (1 - \mu^2)}{s^2 - \mu^2} \right\} (s^2 - 1) \mu d\mu$$

$$R(\mu) = \frac{P}{2} A \left[(1 - \alpha^2)(1 - \mu^2) + \alpha^2 \sqrt{\frac{s_0^2 - 1}{s_0^2 - \mu^2}} \right], \quad (7)$$

$$\text{今 } C_D(\mu) = \frac{R(\mu)}{\frac{P}{2} A (1 - \mu^2)} \quad (8)$$

とすると ($A(1 - \mu^2)$ は μ 点における流面積) (7) から

$$C_D(\mu) = 1 - \alpha^2 + \frac{s_0^2 - 1}{1 - \mu^2} \sqrt{\frac{s_0^2 - 1}{s_0^2 - \mu^2}}, \quad (9)$$

かえられる。ところで $s_0^2 - 1 = k_0^2 \rightarrow 0$ とおくと $\mu \rightarrow 1$ では、

$$C_D(\mu) \doteq \frac{k_0^2}{k_0^2 + 1 - \mu^2} - 2k_0^2 \sqrt{\frac{1}{k_0^2}} \quad (10)$$

附録 2. 核函数の表現について 3) 4)

$$4\pi S(x, y; x', y') = \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{(x-x')}{R^3} y' dy' d\theta = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy'}{R} d\theta, \quad (1)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta,$$

$$4\pi T(x, y; x', y') = y \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy'}{R} d\theta, \quad (2)$$

$$\text{さて} \quad \frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_0(t\omega) dt, \quad \omega = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta. \\ \text{for } x > x'$$

これから

$$\int_0^{y'} \int_0^{2\pi} \frac{y' dy'}{R} d\theta = 2\pi y' \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_0(ty') \frac{dt}{t}, \quad \text{for } (x > x', y > y')$$

よって

$$S = \frac{y'}{2} \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_1(ty') dt, \quad (3)$$

$$T = -\frac{yy'}{2} \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_1(ty) J_1(ty') dt, \quad (4)$$

この T は

$$J_1(ty) J_1(ty') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_0(t\omega) \cos \theta d\theta \quad \text{これから}$$

$$T = -\frac{yy'}{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta d\theta \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_0(t\omega) dt = -\frac{yy'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{R}, \quad (5)$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{③} \quad r_1^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2, \quad r_2^2 = (x-x')^2 + (y+y')^2 \\ \text{とおくと} \quad R^2 &= r_1^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + r_2^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ 4yy' &= r_1^2 + r_2^2 - 2R^2 \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

等となるから。これを (5) に代入して 5) 2

$$R^2 = r_2^2 (1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}), \quad k^2 = 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

とおくと、(5) の右辺は完全楕円の積分となる。

$$T = \frac{r_2}{2\pi} E(k) - \frac{r_1^2 + r_2^2}{4\pi r_2} K(k), \quad (6)$$

さらに $k'^2 = 1 - k^2$, $k' = \frac{r_1}{r_2}$ であるから

$$\frac{1-k'}{1+k'} = \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1} = \lambda \quad \text{と置いて Landen 変換すれば}$$

$$T = \frac{r_1+r_2}{2\pi} [E(\lambda) - K(\lambda)] \quad (7)$$

となる。

$\lambda \rightarrow 0$ ($r_2 \rightarrow r_1$) の時は

$$\begin{aligned} K(\lambda) &\rightarrow \frac{\pi}{2} (1 + \frac{\lambda^2}{4} + \dots) \\ E(\lambda) &\rightarrow \frac{\pi}{2} (1 - \frac{\lambda^2}{4} + \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

で問題ないが

$$\lambda \rightarrow 1 \quad (r_1 \rightarrow 0) \quad \text{の時は} \quad \lambda'^2 = 1 - \lambda^2 = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2} \doteq 4\rho \quad (\rho = \frac{r_1}{r_2})$$

とおくと

$$\begin{aligned} K(\lambda) &\rightarrow \frac{1}{2} \log\left(\frac{2}{\rho}\right) + O(\rho^2 \log \frac{2}{\rho}) \\ E(\lambda) &\rightarrow 1 + O(\rho \log \frac{2}{\rho}) \end{aligned} \quad (9)$$

となって対数的特異点となるので積分の時はそれを考えておかなければならない。

S については簡単な解析的表示はないようであるがその微係数については §3.1(7) により

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10)$$

なる関係があるから楕円積分で表わされるかなり複雑な表示になるので、むしろ (1) 式により数値積分するのが早々ように思われる。

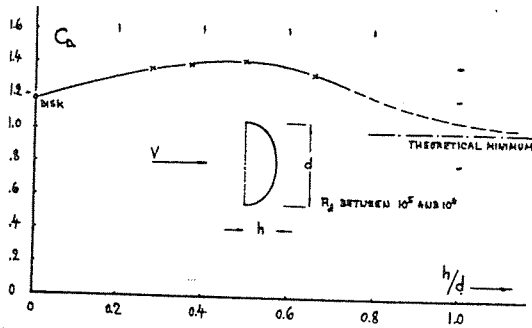


Fig. 31. Drag coefficient of sheet-metal "caps" (40,a) as a function of their height ratio.

Caps and Cups. As large as the drag coefficients of plates may be, there are other shapes exhibiting still higher values. Figure 31 shows the drag coefficient of cup- or cap-like bodies (similar to parachute canopies). The maximum drag coefficient (on projected area) is obtained for h/d in the order of 0.5, a shape which is $\approx$ hemispherical. Upon further increasing the height ratio, the rear side more and more changes into a wake "fairing". The drag coefficient is, therefore, expected to approach the theoretical minimum which corresponds to full stagnation pressure across the opening.

Figure 32 (near). Drag coefficients of various 3-dimensional bodies (40) at R 'numbers between 10^4 and 10^6 . Note: (•) tested on wind-tunnel floor.

7. DRAG OF WEDGES AND CONES

Figures 32 and 33 present shape and drag coefficient of a number of three- and two-dimensional bodies. All of these shapes have a more or less separated flow pattern; most of them have negative pressure on their rear side; and their drag coefficients are comparatively high.

Angle of Flow. To establish some order in the drag coefficients of various shapes, the geometrical angle is very useful, at which the flow is guided by the body's surface upon separating from its rear side. The flat plate, for example, has such an angle " ϵ " = 90° . A "fold" with a vertex angle of two times 45° , has a separation angle of 90° plus or minus 45° , depending upon the direction of the oncoming flow. Figure 34 demonstrates how the drag coefficient increases as a function of the shape angle. Two branches are found, of course; one for two-dimensional bodies (between walls) and another one for three-dimensional conditions. At " ϵ " = 0 , parallel-sided round-nosed shapes have been used in the graph; a hallow, scoop-like body is plotted at 180° .

Figure 33 (right). Drag coefficients (41) of 2-dimensional shapes (between walls) at R between 10^4 and 10^6 . Note: (+) in subcritical flow.

SHAPE	REF.	C_d	SHAPE	REF.	C_d
	—	0.47 _y		—	1.17 _y
	(c)	0.38		(a)	1.20
	(c)	0.42		(g)	1.16
	(e)	0.59 _y		(d)	1.60 _y
	(f)	0.80 _y		(e)	1.55
	(d)	0.50		(a)	1.55
	—	1.17		—	1.98
	(c)	1.17		(a)	2.00
	(b)	1.42		(a)	2.30
	(a)	1.38		(b)	2.20
	(f)	1.05 _y		(a)	2.05 _y

a) On disks and small-aspect-ratio plates see: NACA (36, a); Ergebnisse IV; reference (40,f).

b) On plates between walls see: (12), (35,a) and (40,f).

¶ (40) Experimental results on three-dimensional bodies:

a) Doetsch, Parachute Models, Lufo 1938 p.577.

b) NACA, Cup Anemometer, Tech Rpt 513 (1935).

c) AVA, Hemispherical Bodies, Ergebnisse IV (1932).

d) Eiffel, Recherches a Tour Eiffel, Paris 1907.

e) Hemispherical Cup at $R_d = 2 \cdot 10^5$, ARC RM 712 (1919).

f) Irrminger and Nokkentved, Elementary Bodies and Buildings, Copenhagen 1930 and 1936; Transl'n by Jarvis.

¶ (41) Sections (tested between plates or walls):

a) Lindsey, Simple Shapes, NACA T. Rpt 619 (1940).

b) Junkers Wind-Tunnel, Report Ströte V.9609 (1940).

c) Interference Between Struts, NACA T. Rpt 468 (1933).

d) Delany-Sorensen, Various Shapes, NACA T. Note 3038.

e) AVA Göttingen, Ergebnisse II (1923) and III (1926).

f) Junkers Wind-Tunnel Result on Angle Profile.

g) Reported by Barth, Zt. Flugwissen 1954 p.309.

¶ (42) Free-streamline (cavitation) theory:

a) Kirchhoff, Free Jet Theory, Crelle 1869 (see Lamb).

b) Bobyleff, Russian Phys.-Chem. Society 1881 (see Lamb).

c) Riabouchinsky-Plessset-Schafer, Journal Appl. Physics 1948

934, and Review Modern Physics 1948 p.228.

d) Reichardt, Laws of Cavities, German ZWB UM 6628.

(43) Neef, Dive Brakes, Fieseler Tunnel Rpt 22 (1941).

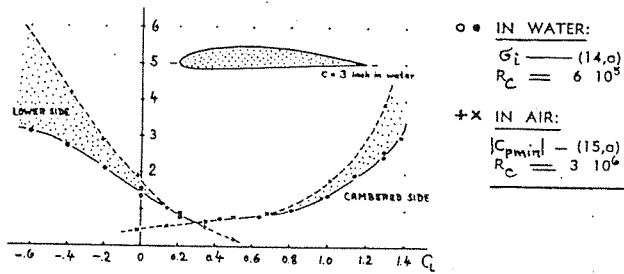


FIGURE 12. Comparison of G_i and C_{pmin} for 4412 section, tested in water- and wind tunnel, respectively.

because of air-bubble content, before the onset of cavitation becomes visible. Whatever the explanation may be, there is a delay in the onset of cavitation (as plotted in figure 13) in the order of

$$\Delta G_i = 0.08 C_{pmin}^2 \quad (8)$$

Similar (and even larger) differentials are found when comparing the cavitation tests in (14,c) with the pressure distribution for the 64-006 section used, as reported in (15,b). It can be argued, however, that in the latter investigation the Reynolds number is almost 10 times that in the towing tank. In conclusion, critical cavitation numbers are not always $\approx$ equal to the C_{pmin} values; they may be higher (in separated flow patterns) or somewhat lower (in small body sizes or narrow minimum-pressure peaks).

- (11) Characteristics of three-dimensional head shapes:
 - a) Rouse & McNown, Cavitation and Pressure Distribution, Iowa State Univ. Engg Bull. 32 (1948).
 - b) Knapp, Ogives and Spherogives, CALTECH Hydrodynamics Laboratory Rpt 1945.
- (12) Pressure distribution of symmetrical sections:
 - a) Forces and Pressures on Airfoil Sections, German Doct ZWB (DVL) FB 1621 (1943).
 - b) 15% Foil Section, Ybk. D. Lufo 1941 p.I,101.
 - c) Series of Joukovsky Sections, ARC RM 1241.
 - d) Schubauer, Elliptic Cylinder, NACA TR 652 (1939).
- (13) Cavitating strut sections, see in Chapter X X.

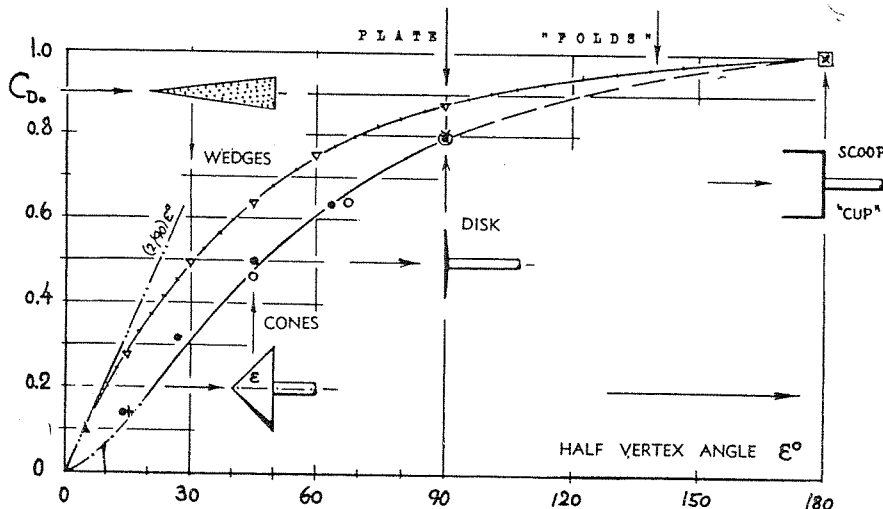


Figure 14. Drag coefficients of wedges and cones at zero cavitation number, according to theory and as evaluated from experiments (17).

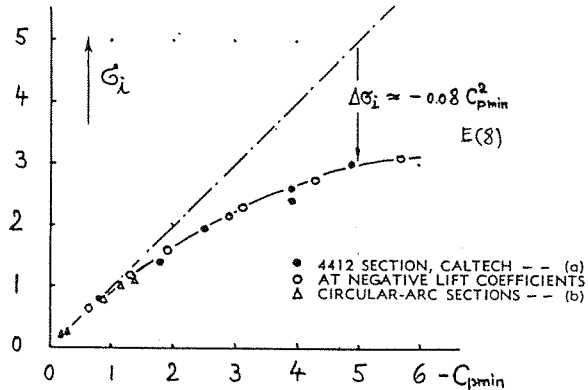
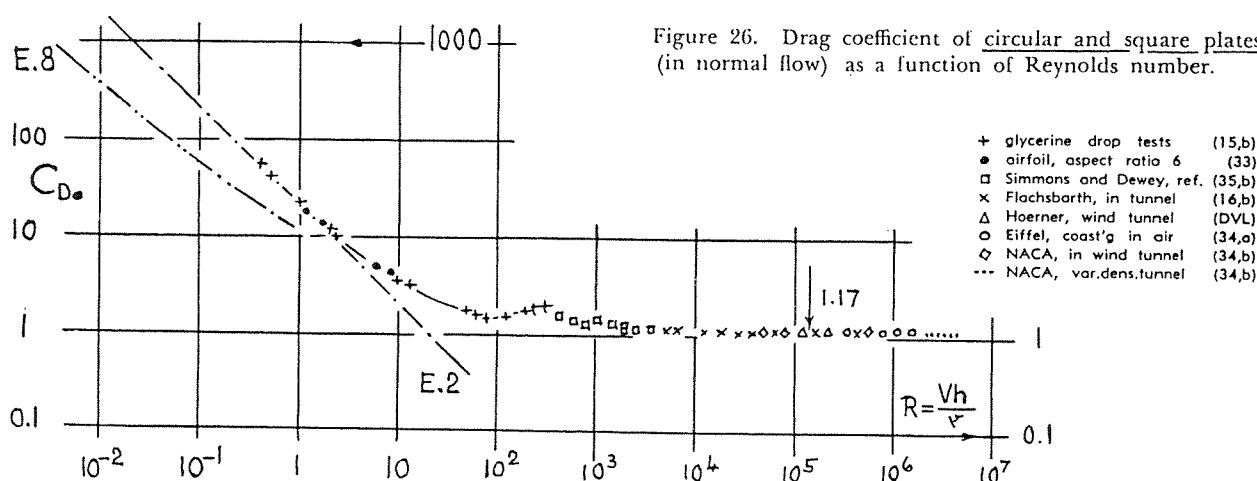


FIGURE 13. Statistical analysis of the "delay" of cavitation in peaked pressure distributions (14).

3. Drag Coefficients In Cavitating Flow

Sharp-Edged Bodies. In fully cavitating condition, the drag of an obstacle evidently corresponds to an average positive pressure component on its face and to the uniform negative pressure within the cavity (at the rear side). For $G = 0$ (that is, for cavity pressure equal to ambient pressure, distribution and value of the face pressure have been calculated for wedges (17,a) and they have experimentally been determined for cones (17,b), as a function of the half apex angle " ϵ ". These functions are plotted in figure 14. Since the flow pattern is essentially determined by the shape of the face in these bodies, the drag is (within reason) independent of the form of the afterbody. Upon increasing G from zero to finite values, the flow pattern past the forebody changes as explained in (17,b). The drag coefficient of the type

- WEDGES:**
- two-dimensional theory -- (17,a)
 - linearized $C_{D0} = 4\epsilon/\pi$ -- (17,d)
 - ▽ British Armament RD Estab (17,i)
 - △ CALTECH - water tunnel -- (17,h)
 - St. Anthony - Minneapolis (17,f)
- CONES:**
- British theory - see Chapter X X
 - Reichardt - Göttingen -- (17,b)
 - Iowa (evaluated from) -- (11,a)
 - × CALTECH - reported in -- (17,c)
 - + CALTECH, water tunnel -- (17,e)



the disk is sometimes employed in the calibration of air streams. Drag coefficients reported from numerous wind tunnels do not really show one and the same drag coefficient, however. One explanation for the discrepancies is the blocking effect in closed-type tunnel installations. Figure 27 shows another influence affecting the magnitude of the drag. The coefficient slowly increases with the degree of turbulence in the wind stream (36,b). The total increase as tested is in the order of 5%.

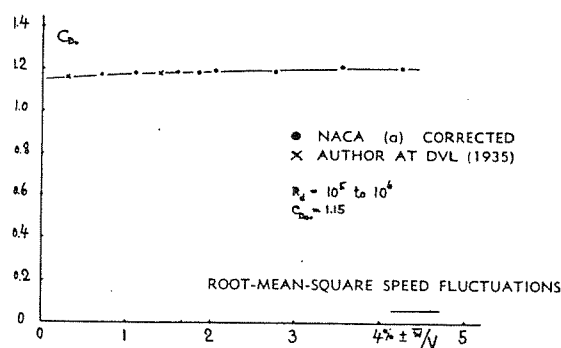


Figure 27. Influence of turbulence on disk drag (36).

"Aspect Ratio". Figure 28 shows how the drag of rectangular plates (and that of cylinders with limited length) varies with their height-to-span ratio h/b . It is surprising how far the effect of the side edges (ends or tips) extends toward the center portion of these bodies. Up to $b/h = 10$, the drag coefficient does not increase appreciably, and at $b/h = 30$, the coefficient is still considerably lower than that of the two-dimensional plate (between end plates). Considering the ends of a rectangular plate as three-dimensional, their dead-space pressure is evidently less negative than that of the "two-dimensional" center. Consequently, a flow of air is induced from the ends along the rear side of the plate and the average pressure is considerably increased. Another way of looking at this phenomenon is to assume that the motion of the vortex street is affected by the "ventilation" from the ends of the plate. The total variation of the drag coefficient is between $h/b = 0$ and $= 0.1$. Interpolation is suggested by

$$C_{D.} = C_{D.0.} [1 - k(h/b)] \quad (29)$$

- ¶ (31) Schmitt, Wind-Tunnel Investigation of Air Loads on Human Beings, TMB Rpt 892 (1954).
- ¶ (32) Other investigations of the human body:
- Tani and Mituisi, Aerodynamics of Ski Jumping, Japanese "Kagaku" Vol 21 (1951) p.117.
 - Straumann, Aerodynamic Tests on Ski Jumpers, Helvetica Physica Acta Vol 14 (1941) p.311.
 - Terminal velocities of parachutists near sea level, quoted in Journal Aeron'l Sciences 1942 p.293.
 - "How Fast a Man Falls", Aeroplane 57 (1939) p.445.
 - Webster, Free Falls and Parachute Descents in the Standard Atmosphere, NACA Tech Note 1315 (1947).
- ¶ (33) Tom and Swart, Airfoil at Extremely Low Speeds, Proceedings Royal Society A, Volume 141 p.761 (1934).
- ¶ (34) Resistance of Plates and Disks:
- "Recherches Expérimentales Tour Eiffel", Paris 1907.
 - Drag of Disks, NACA T.Notes 252 and 253.
 - AVA Göttingen, Ergebnisse Volume IV (1932).
 - Ring Plates, AVA Göttingen, Ergebnisse Volume II.
 - Wick, Inclined Plate, NACA T.Note 3221 (1954).
 - Smith and Whipple (MIT), Bodies Moving Through Still Air, Journal Aeron'l Sci. 1936 p.21.
- ¶ (35) Flow pattern past plates and disks:
- Fage and Johansen, Behind Plates, ARC RM 1104 (1927); and Proc. Royal Society London Vol 116 (1927).
 - Simmons and Dewey, Disks, ARC RM 1334 (1931).
- ¶ (36) Influence of turbulence on drag of plates:
- Schubauer and Dryden, NACA Tech Rpt 546 (1935).
 - This effect has been discussed by Prandtl (ZFM 1910 p.73) and by Joukowski (Aérodynamique, Paris 1916).

cylinder at which the flow attaches to the rear side) decreases as the angle of yaw " λ " is increased; for example from $R_d = 3.6 \cdot 10^5$ for normal flow to $2.0 \cdot 10^5$ (still based on total speed " V ") at $\lambda = 60^\circ$. In conclusion, the cross-flow principle cannot be applied to elements with attached flow pattern (as far as incompressible drag is concerned).

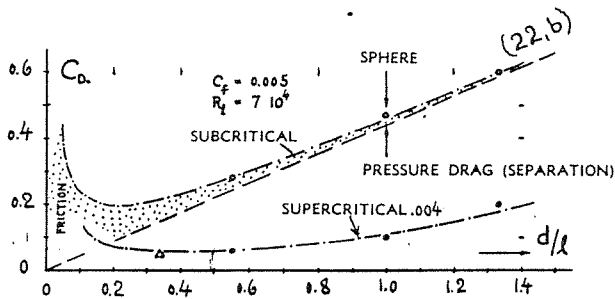


Figure 19. Drag coefficients of ellipsoidal bodies (22); (a) at a subcritical Reynolds number $R_d = 7 \cdot 10^4$; and (b) above transition, at R -numbers approaching 10^6 .

Simple Ellipsoidal Bodies are represented in figure 19. The pressure drag caused by laminar separation (at subcritical Reynolds number) can be approximated by a component proportional to the thickness ratio (d/l). Applying the functions as given in the "streamline" chapter, the total drag coefficient in this condition can be approximated by

$$C_{D_s} = 0.44 (d/l) + 4 C_f(l/d) + 4 C_f(d/l)^{1/2} \quad (25)$$

Figure 19 also presents the minimum drag coefficients obtained shortly above the critical transition (see for illustration figures 10 and 11). It appears that equation 31 of the "streamline" chapter can be applied to give an approximate interpolation, using a friction-drag coefficient $C_f = 0.004$.

Half Bodies. A theoretical "half body" extends to infinity in one direction. Theory (23) predicts that such bodies, with a properly streamlined shape facing the fluid flow, do not have any drag. Positive as well as negative pressure differentials press upon the frontal area so that the resultant force is zero. To understand this result, the reader is invited to investigate the pressure distribution of the sphere — which gives a related result. Integrating the theoretical pressure distribution in figure 9 across the frontal area, it is found that the suction forces predominate so that the forebody drag coefficient is negative ($C_{D_s} = -0.125$). The phenomenon of zero or negative forebody drag is also found to some extent in real and viscous fluid flow. Figure 20 gives pressure drag coefficients evaluated from tests (25) on a series of rotationally symmetric body "noses". The first three shapes have a forebody drag

FLUID-DYNAMIC DRAG

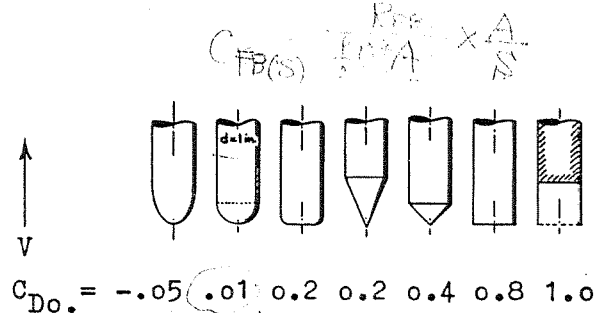


Figure 20. Coefficients indicating the forebody-pressure drag of a series of cylindrical bodies, evaluated from pressure distribution (25,e).

coefficient close to zero. As flow separation starts and grows in the less streamlined and bluffer shapes, the drag coefficient grows rapidly, however.

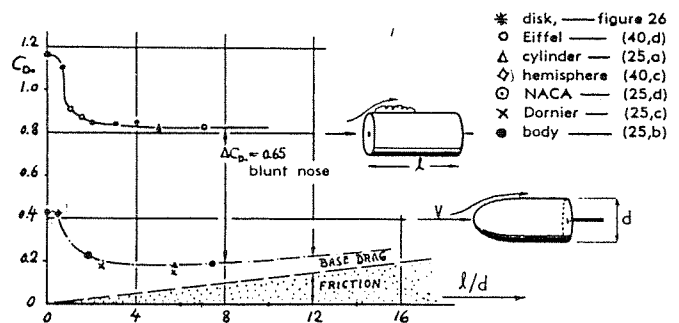


Figure 21. Drag coefficients of cylindrical bodies in axial flow, with blunt shape (in the upper part) and with rounded or streamlined head forms (lower part) — as a function of the fineness ratio l/d .

Parallel-Sided Shapes. Plotted in figure 21 are the drag coefficients of a number of cylindrical bodies in axial flow. Figure 22 shows corresponding results in two-dimensional flow. The drag of these shapes essentially consists of that of the forebody and the base drag originating at the blunt rear end. At zero length ratio, the coefficients of disk and plate are plotted, respectively. Two branches are seen in each graph, one for blunt head form or leading edge, respectively; and the other one representing the experimental results of rounded or streamline shapes.

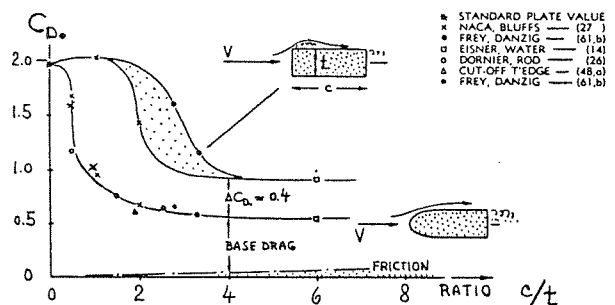


Figure 22. Drag coefficient of "rectangular" sections (tested between walls) with blunt leading edge (upper part) and with rounded shape (lower part), against length ratio.