

昭和50年7月10日

フレンジ付平板の後の空洞流れ
に関する Riabouchinsky Model

別紙正判

内容

概要	頁
	1
1. 寫像	2
2. 境界値問題	4
3. 形状	9~11

概要

空洞流れに関する Riabouchinsky Model
 については一般にホドグラフ面を考慮して
 その速度ポテンシヤル面への寫像関数
 を Schwarz-Christoffel 法によって求める
 方法がとられる。

しかし形状が少し複雑になるとこれは
 必ずしも便利ではない。

ここでは複素速度面を環状領域
 に寫像しそこで Villat の公式によって
 $w = \log(\phi^2/\phi^2)$ 関数の境界値問題を解く
 事を試みた。

この時 Villat の公式はワイヤーストラスの
 積分関数を基にした形式書かれて
 いるので実用上の便を考慮してヤコビ
 の積分関数を用いる表現を新しく
 求めて使用する事とした。

参考文献

G. Birkhoff and E. H. Zarantonello
 "Jets, Vortices and Cavities"
 Academic Press, New York, 1957

昭和 年 月 日

1. 寫像

右図のような部分空間
を持つ流れを考えよう。

空間上で流れは等速速度
を持つものとし無限遠方
では V (< 1) とする。

又物体は上下対称とする。

速度ポテンシャル面では
同じく右図のようにする。

今ヤコビ・積分値を用いて

$$f = \operatorname{dn}(u + iK'), \quad (1)$$

f 面を z 面に寫像すると
図のような対応関係がある。

u 面を用いる。

$$u = \frac{\pi K}{\pi i} \log t, \quad (2)$$

よって t 面に寫像すると

$$\log t = -\frac{\pi K'}{K},$$

なる関係があるので、図のように
流体領域は z 面の無限遠領域の
右半分に寫像される。

(1) 式は又

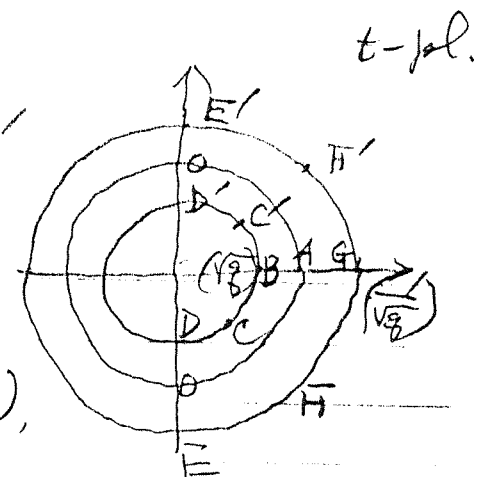
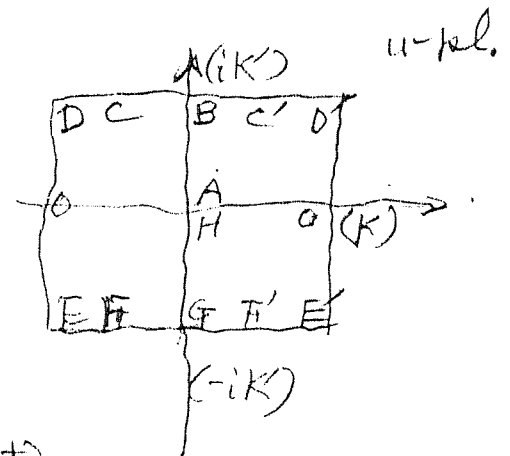
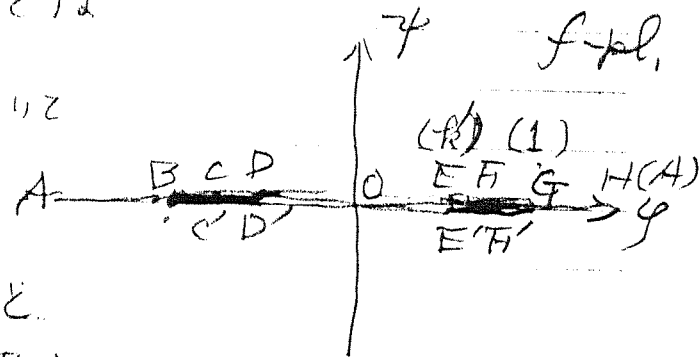
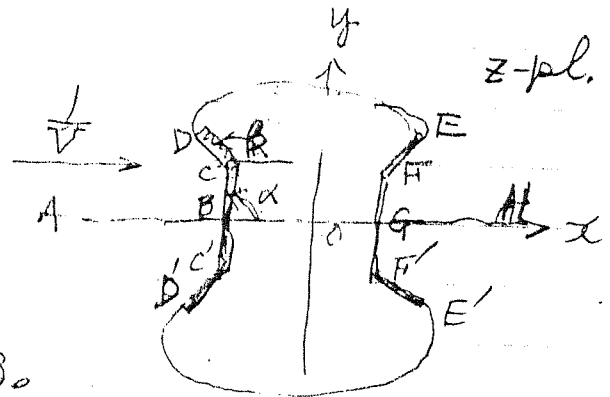
$$f = -i \operatorname{CS} u = -i \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sn} u}, \quad (1)'$$

とかけるので、次に

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}},$$

$$\operatorname{ch} u = \frac{if}{\sqrt{1-f^2}},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{K'^2 - f^2}}{\sqrt{1-f^2}} \quad (3),$$



昭和 年 月 日

$$\frac{df}{du} = i \frac{dn u}{\sin^2 u} = i \sqrt{1-f^2} \sqrt{k'^2 - f^2}, \quad (\text{on } D \cup E) \quad (4)$$

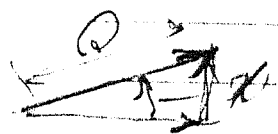
$$= \sqrt{1-f^2} \sqrt{f^2 - k'^2} \quad (\text{on } E \cup F)$$

(符号は f 面の上下で異なる点に注意)

複素平面ポテンシャルを導入し、

$$\frac{df}{dz} = Q e^{-i\chi}, \quad (5)$$

$$Q = \left| \frac{df}{dz} \right|,$$



より

$$\omega = \log \left(\frac{dz}{df} \right) = -\log Q + i\chi, \quad (6)$$

なる関数を定義し ω の境界値問題を
 上-pl. で考える。
 自由流領域では

$$Q=1, \quad \log Q = 0 = \operatorname{Re}(\omega), \quad \text{on } DE, DE'$$

無限遠点では速度は V 故.

(7)

$$\omega \Big|_{A(H)} = \log V, \quad (8)$$

すなわち $\omega(z)$ の実部は左右反対称でなければならぬ。

対称面 AB, GH 上では $\chi=0$ であるから

$$\chi = \operatorname{Im} \{ \omega \} = 0 \quad \text{on } BAG \quad (9)$$

虚部は上下反対称でなければならぬ。

2. 境界値問題.

t -pl. で (7), (9) を満たし環状領域で
正則な関数は次のようなローラン展開を持つ。

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{2n+1} t^{2n+1} + \frac{b_{2n+1}}{t^{2n+1}} \right), \quad (10)$$

$a, b; \text{real.}$

この関数の極部分が与えられた条件を満たせばよい。

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \alpha && \text{on } BC, \overline{F'G'} \\ &= -\alpha && \overline{BC}, \overline{FG} \\ \chi &= \beta && \text{on } \overline{CD}, \overline{E'F'} \\ &= -\beta && \overline{CD}, \overline{EF} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

与えられた一般化して. $t = r e^{i\theta}$ とおき

$$\left. \begin{aligned} \chi &= h(\theta) && \text{on } r = \frac{1}{\sqrt{b}} \\ &= g(\theta) && \text{on } r = \sqrt{b} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

と与えられたものとしよう。

一方 (10) から

$$\begin{aligned} \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_{2n+1}}{r^{n+\frac{1}{2}}} - b_{2n+1} r^{n+\frac{1}{2}} \right) \sin(2n+1)\theta, \\ &\quad \text{for } r = \frac{1}{\sqrt{b}}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_{2n+1} \frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}} - \frac{a_{2n+1}}{r^{n+\frac{1}{2}}} \right) \sin(2n+1)\theta, \text{ for } r = \sqrt{b} \end{aligned} \quad (13)$$

(12) と (13) を等置して a, b 係数を求めると

$\frac{h(z)}{f(z)}$

g^{2n+1}

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned} \frac{h(z)}{f^{n+\frac{1}{2}}} - b_{2n+1} g^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} h(\theta) \sin(2n+1)\theta d\theta, \\ g^{n+\frac{1}{2}} a_{2n+1} - \frac{b_{2n+1}}{f^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin(2n+1)\theta d\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

を計算する

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\frac{1}{f^{2n+1}} - g^{2n+1}} \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)\theta d\theta \left[\frac{h(\theta)}{f^{n+\frac{1}{2}}} - g^{n+\frac{1}{2}} f(\theta) \right], \\ b_{2n+1} &= \frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{1}{g^{2n+1}} - f^{2n+1}} \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)\theta d\theta \left[g^{n+\frac{1}{2}} h - \frac{f}{g^{n+\frac{1}{2}}} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

2行目の(15)に代入すると

$$S(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t^{2n+1} \frac{1}{f^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{g^{n+\frac{1}{2}}}{t^{2n+1}} \right)}{\frac{1}{f^{2n+1}} - g^{2n+1}} \sin(2n+1)\theta, \quad (16)$$

$$T(t, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{g^{n+\frac{1}{2}} t^{2n+1} + \frac{1}{f^{n+\frac{1}{2}} t^{2n+1}}}{\frac{1}{f^{2n+1}} - g^{2n+1}} \right\} \sin(2n+1)\theta,$$

よって

$$\omega(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} [h(\theta) S'(t, \theta) - f(\theta) T(t, \theta)] d\theta, \quad (17)$$

を計算する

計算

$$\frac{g^{\pm(n+\frac{1}{2})}}{f^{2n+1} - g^{2n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{f^{n+\frac{1}{2}}} + g^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{f^{n+\frac{1}{2}}} - g^{n+\frac{1}{2}}} \right)$$

昭和 年 月 日

532 (2) を使って $t = e^{\frac{\pi i}{2K} u}$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\frac{\pi}{2K}(2n+1)u\right\} \sin(2n+1)\theta}{\left(q^{-n-\frac{1}{2}} - q^{n+\frac{1}{2}}\right)} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2K}(2n+1)u\right\} \sin(2n+1)\theta}{q^{-n-\frac{1}{2}} + q^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (18)$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\frac{\pi}{2K}(2n+1)u\right\} \sin(2n+1)\theta}{q^{-n-\frac{1}{2}} - q^{n+\frac{1}{2}}} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2K}(2n+1)u\right\} \sin(2n+1)\theta}{q^{-n-\frac{1}{2}} + q^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (19)$$

を得る。

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u) &= \frac{2\pi}{-kK} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{2K}u(2n+1)\right\}}{q^{-n-\frac{1}{2}} - q^{n+\frac{1}{2}}} \\ \operatorname{cn} u &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\frac{\pi}{2K}u(2n+1)\right\}}{q^{-n-\frac{1}{2}} + q^{n+\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (20)$$

53 頁「(2)」の「ある」を「ある」で

$$\left\{ \frac{kK}{4\pi} \left[\operatorname{sn}\left(\frac{2K\theta}{\pi} + u\right) \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2K\theta}{\pi} - u\right) \pm i \left\{ \operatorname{cn}\left(\frac{2K\theta}{\pi} - u\right) - \operatorname{cn}\left(\frac{2K\theta}{\pi} + u\right) \right\} \right] \right\}, \quad (21)$$

21 (17) に代入すると。

$$\begin{aligned} \omega(t) = & \frac{R_0 K}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \{h(\theta) - g(\theta)\} \left\{ \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta + u\right) + \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta - u\right) \right\} d\theta \\ & + \frac{R_0 K}{\pi} i \int_0^{\pi/2} \{h(\theta) + g(\theta)\} \left\{ \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta - u\right) - \operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta + u\right) \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。

特に 前節の特殊な場合には $h(\theta) = -g(\theta)$ となる。

$$\omega(t) = \frac{2R_0 K}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} h(\theta) \left\{ \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta + u\right) + \operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\theta - u\right) \right\} d\theta, \quad (23)$$

よって

$$\omega(t) = \frac{R_0}{\pi} \int_0^K h\left(\frac{\pi}{2K}u'\right) \left\{ \operatorname{sn}(u+u') + \operatorname{sn}(u-u') \right\} du' \quad (23')$$

と得る。

これは Villat の式 の 変形 である*。

今の場合は h は (11) で与えられた。

$$\int \operatorname{sn} u \, du = \frac{1}{k} \log(\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u),$$

この積分を用いる。

$$\begin{aligned} \omega(t) = & \frac{\alpha}{\pi} \log \left[\frac{\operatorname{dn}(u+\delta) - k \operatorname{cn}(u+\delta)}{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u} \right] \left[\frac{\operatorname{dn}(\delta-u) - k \operatorname{cn}(\delta-u)}{\operatorname{dn}(\delta-u) - k \operatorname{cn}(-u)} \right] \\ & + \frac{\beta}{\pi} \log \left[\frac{\operatorname{dn}(u+K) - k \operatorname{cn}(u+K)}{\operatorname{dn}(u+\delta) - k \operatorname{cn}(u+\delta)} \right] \left[\frac{\operatorname{dn}(K-u) - k \operatorname{cn}(K-u)}{\operatorname{dn}(\delta-u) - k \operatorname{cn}(\delta-u)} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

但し

$$k' < \operatorname{dn} \delta < 1 \quad \text{if } \delta \text{ is } K, K', C, C' \text{ である}$$

* 右に「積分の性質」 p. 383.

昭和 年 月 日

$$dn(u+K) = -k'ndu, \quad cn(u+K) = -k'sdu$$

$$dn(u+K) - k'cn(u+K) = k'\{1 + ksn u\}/dn u$$

$$dn(K-u) - k'cn(K-u) = k'\{1 - ksn u\}/dn u$$

$$1 - k'^2 sn^2 u = dn^2 u, \quad k'^2 + k^2 cn^2 u = dn^2 u.$$

$$\begin{aligned} \therefore w(t) = & \frac{-2\alpha}{\pi} \log \{dn u - kcn u\} + \frac{2\beta}{\pi} \log k' \\ & + \frac{(\alpha-\beta)}{\pi} \log \left[\{dn(u+\delta) - kcn(u+\delta)\} \{dn(\delta-u) - kcn(\delta-u)\} \right] \end{aligned} \quad (24')$$

$$\therefore \frac{d\delta}{df} = \frac{(k')^{\frac{2\beta}{\pi}}}{(dn u - kcn u)^{\frac{2\alpha}{\pi}}} \left[\{dn(u+\delta) - kcn(u+\delta)\} \{dn(\delta-u) - kcn(\delta-u)\} \right]^{\frac{\alpha-\beta}{\pi}}, \quad (25)$$

§ 4 (8) 例,

$$V = \frac{(k')^{\frac{2\beta}{\pi}}}{(1-k)^{\frac{2\alpha}{\pi}}} \left[\{dn \delta - kcn \delta\} \right]^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\pi}} \quad (26)$$

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

§ 5 12 $\alpha = \beta$ の場合

$$\frac{d\delta}{df} = \left(\frac{k'}{dn u - kcn u} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}, \quad (27)$$

$$V = \left(\frac{k'}{1-k} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad (28)$$

3. 形状

形状は

$$z = \int \frac{dz}{df} \frac{df}{du} du, \quad (29)$$

の如く与えられるので境界上の dz/df の値を知る必要がある。

板上では、

$$\begin{aligned} \operatorname{dn}(u+iK') &= -i \operatorname{csu}, \quad \operatorname{cn}(u+iK') = -\frac{i}{k} \operatorname{dsu} \\ \operatorname{sn}(u+iK') &= \frac{1}{k} \operatorname{nsu}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{dn}(u+iK') - k \operatorname{cn}(u+iK') = -i \frac{(\operatorname{cnu} + \operatorname{dnu})}{\operatorname{sn} u}$$

$$\operatorname{dn}(u-iK') - k \operatorname{cn}(u-iK') = i \frac{(\operatorname{cnu} + \operatorname{dnu})}{\operatorname{sn} u}$$

よって (25) は

$$\left. \frac{dz}{df} \right|_{u=v+iK'} = \frac{(-k')^{\frac{2\beta}{\pi}} e^{-i\alpha}}{\left(\frac{\operatorname{cn} v + \operatorname{dnu}}{\operatorname{sn} v} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}} \left[\frac{\{(\operatorname{cn}(v+\delta) + \operatorname{dnu}(v+\delta))\} \{(\operatorname{cn}(\delta-v) + \operatorname{dnu}(\delta-v))\}}{\operatorname{sn}(v+\delta) \operatorname{sn}(\delta-v)} \right]^{\frac{\alpha-\beta}{\pi}},$$

on $\overline{BC}, 0 < v < \delta < K, (30)$

$$\frac{dz}{df} = \frac{(-k')^{\frac{2\beta}{\pi}} e^{-i\beta}}{\left(\frac{\operatorname{cn} v + \operatorname{dnu}}{\operatorname{sn} v} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}} \left[\frac{\{(\operatorname{cn}(v+\delta) + \operatorname{dnu}(v+\delta))\} \{(\operatorname{cn}(v-\delta) + \operatorname{dnu}(v-\delta))\}}{\operatorname{sn}(v+\delta) \operatorname{sn}(v-\delta)} \right]^{\frac{\alpha-\beta}{\pi}},$$

on $\overrightarrow{CD}, K > v > \delta, (30')$

又 (29) より

$$\frac{dz}{df} = (-k')^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} \left(\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} v + \operatorname{dnu}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}, \quad (31)$$

となり、確かに境界条件を満たしている。

$$\begin{aligned} \text{296f} \quad f = \operatorname{dn}(v+2iK') &= -\operatorname{dn} v \\ \frac{df}{dv} &= k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v, \end{aligned} \quad (32)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \operatorname{dn} v &= \frac{\sqrt{1-f^2}}{k} \\ \operatorname{cn} v &= \frac{\sqrt{f^2-k'^2}}{k} \end{aligned} \quad \left\{ \dots (32') \right.$$

となるので (30) (30') の右辺の 2 項も楕円関数の加減公式により f の関数として表わせる。

従つて (29) の右辺は f について実行出来る。
(数値積分には $f = -\cos \theta$ と変換しておけば便利)

自由流線の形状は 後述は OE 上では
 $u = -k - iv$ とおくと

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} u &= \operatorname{dn}(-k - iv) = k' \operatorname{nd}(-iv) \\ \operatorname{cn} u &= k' \operatorname{sd}(-iv) \\ \operatorname{sn} u &= -\operatorname{cd}(-iv) \end{aligned} \quad \left\{ \dots (33) \right.$$

となり更に ヤコビ の 虚数変換により

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(-iv, k) &= -i \operatorname{sc}(v, k') \\ \operatorname{cn}(-iv, k) &= \operatorname{nc}(v, k') \\ \operatorname{dn}(-iv, k) &= \operatorname{dc}(v, k') \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

右辺の 符号 () によって argument k' なる楕円関数と表わす事にする

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} u &= k' \operatorname{cd}'(v) \\ \operatorname{cn} u &= -i k' \operatorname{sd}'(v) \\ \operatorname{sn} u &= -\operatorname{nd}'(v) \end{aligned} \quad \left\{ \dots (34) \right.$$

を得る。

これらの式と加減公式によつて (25) または (27) と計算すれば" といふこの時 $|df/d\theta| = 1$ である事に注意すべきである。

昭和 年 月 日

2nd

$$f = \operatorname{dn}(u + iK') = \operatorname{dn}(-K + iK' - iu)$$

$$= i k' \operatorname{sc}(-iu) = k' \operatorname{sn}'(v),$$

3rd

$$\operatorname{cn}'v = \sqrt{1 - \frac{f^2}{k'^2}} = \frac{\sqrt{k'^2 - f^2}}{k'},$$

$$\operatorname{dn}'v = \sqrt{1 - f^2},$$

(35)

8.3.12 (34) に代えて

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{k'^2 - f^2}{1 - f^2}},$$

$$\operatorname{cn} u = -\frac{if}{\sqrt{1 - f^2}},$$

$$\operatorname{sn} u = -1/\sqrt{1 - f^2},$$

(36)

 f : real positive
 $0 < f < k'$