

空洞流れについて

4.7
増補

1. 速度ポテンシャルの表現 (2次元)

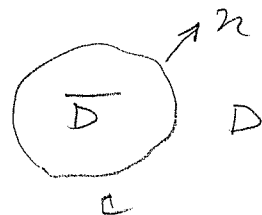
$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{R}, \quad R = \overline{PQ} \quad (1.1)$$

とおく。速度ポテンシャル φ は。 $P \equiv (x, y), Q \equiv (x', y')$

$$\varphi(P) = \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} S(P, Q) - \varphi \frac{\partial S}{\partial n} \right) ds(Q), \quad (1.2)$$

この内部で正則な関数 φ_i はすべて外では

$$\int_C \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} S - \varphi_i \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds = 0, \quad (1.3)$$



では

$$\varphi + \varphi_i = 0 \quad \text{on } C \quad (1.4)$$

とすれば (1.2) と (1.3) を加えて

$$\varphi(P) = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n} S(P, Q) ds(Q), \quad (1.5)$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}, \quad (1.6)$$

また

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0, \quad (1.7)$$

とすれば (1.6) より

$$\varphi(P) = - \int_C \mu \frac{\partial S}{\partial n} ds, \quad (1.8)$$

$$\mu = \varphi + \varphi_i, \quad (1.9)$$

を得るが 特に 一般流れの問題で

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \chi}{\partial n} \quad , \quad \dots \quad (1.10)$$

ならば (1.8) で $\varphi_i = \chi$ とおくと (1.7) を満足すから

$$\mu = \varphi + \chi \equiv \Phi \quad , \quad \dots \quad (1.11)$$

$$\varphi(p) = - \int_c \Phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} S(p, Q) ds_Q \quad , \quad (1.12)$$

となる。

$$\text{今は} \quad T(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{y-y'}{x-x'} \quad , \quad (1.13)$$

とおく

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} S(p, Q) = \frac{\partial}{\partial s_Q} T(p, Q) \quad , \quad (1.14)$$

なる関係があるから (1.12) を部分積分して

$$\varphi(p) = \int_c \frac{\partial \Phi}{\partial s_Q} T(p, Q) ds(Q) \quad , \quad (1.15)$$

(1.13) から 明らかのように これは サーキュレーション
分布による表現で しかも その強さはその点の
速度 になっている。

さて境界条件 (1.10) を表わす積分方程式
は どのように見ると次のように 幾通りもある。

先ず最もよく使われるものは(1.5)から

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{2} + \int_C \sigma(Q) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} dS(Q), \quad (1.16)$$

次に 2 重積分形式 (1.8) では 今は (1.12) 故

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n} = - \int_C \bar{\Phi}(Q) \frac{\partial^2}{\partial n_P \partial n_Q} S(P, Q) dS(Q), \quad (1.17)$$

と普通は書かれるが (1.11) によって (1.12) を書きかえと

$$\bar{\Phi}(P) + \int_C \bar{\Phi}(Q) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_Q} dS(Q) = \mathcal{L}, \quad (1.18)$$

となり, これが C 上で境界条件の積分方程式として使える。

これは (1.17) より核の特異性の方が弱いので便利である (特にこの時は (1.13) の関係を利用して積分出来るので一層便利である) と考えられる。

また (1.16) と (1.18) を較べて見ると マトリックスは互に転置行列となっている。(確か?)

実際上は (1.15) の表示とし (1.18) を一度 S で微分して

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \bar{\Phi}(p) - \int_c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}(Q) \frac{\partial}{\partial s_p} T(p, Q) ds(Q) = \frac{\partial \chi}{\partial s}, \quad (1.19)$$

なお流れ関数表示では (1.15) は

$$\psi(p) = \int_c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}(Q) S(p, Q) ds(Q), \quad (1.20)$$

と等しい境界条件は

$$-\gamma = \int_c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}(Q) S'(p, Q) ds(Q), \quad (1.21)$$

となる。

また (1.5) を流れ関数表示すれば

$$\psi(p) = \int_c \sigma(Q) T(p, Q) ds(Q) = -\gamma, \quad (1.22)$$

このように幾つもの表現が得られるが、吐出し分布のは直接の物理量は表現にない点が不便である。

他は結局最も便利で精度もよい式をとればよいが、精度は^{数値}積分精度に大きく依存するので結局は積分しやすい形が望ましい本になるう。

2. ノイマン関数と境界の変形

(1.2)の表現は S でなくとも特異性が同じならば常に成立つ故 今 D 内で正則な関数 A を導入して

$$N(p, q) = S(p, q) + A(p, q), \quad \dots (2.1)$$

として (1.2) に代へし かつ

$$\frac{\partial}{\partial n_0} N(p, q) = \frac{\partial S}{\partial n_0} + \frac{\partial A}{\partial n_0} = 0, \text{ on } C, (2.2)$$

とすれば (1.2) は

$$\varphi(p) = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n}(q) N(p, q) ds(q), \quad (2.3)$$

と表わされ 以下この N を ノイマン関数と呼ぶ。

N がわかれば かくして境界値問題は とけた事になるが

このような関数は D を 単位円の外部に

写像する関数 $f(z)$ がわかれば 容易に求められる

しかし $f(z)$ を求めるのは また 一つの境界値問題で

あって 例へば 次のようになる。

まず境界条件は

$$|f(z)| = 1 \quad \text{on } C, \quad \dots (2.3)$$

で 無限遠方では a を 実の定数として

$$re^{i\theta} = f(z) = az + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad \dots (2.4)$$

となつて いるはずであるから

(2.3) から

$$\operatorname{Re} [\log f(z)] = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{即ち} \quad \log f(z) = \log a z + P(z) + i\omega(z) \quad (2.6)$$

$$P(z) + i\omega(z) = \log \left[1 + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \right]$$

こゝに P と ω は実数値をとる関数とすると

P, ω は D で正則な関数となる。

よって (2.5) の条件は

$$P(z) = -\log a|z| \quad \text{on } C; \quad (2.7)$$

これは典型的なディリクレ問題であるから

前節に似た手法で数値的に解く事が出来る。

しかしこの方法よりは、この方法が直接的で簡単

であろう。

即ち (2.2) の条件で A を求めればよい。

まず A は D で正則だから (1.2) ^(2.2) によつて

$$A(p, q) = - \int_C \left[\frac{\partial S(p, R)}{\partial n_R} S(R, q) + A(p, R) \frac{\partial S(R, q)}{\partial n_R} \right] ds(R), \quad (2.8)$$

(1.3) において φ_i を $S(p, R)$ とすれば (PED)

$$\int_C \left[\frac{\partial S(p, R)}{\partial n_R} S(R, q) - S(p, R) \frac{\partial S(R, q)}{\partial n_R} \right] ds(R) = 0, \quad (2.9)$$

2式を加え合せれば

$$A(P, Q) = - \int N(P, R) \frac{\partial}{\partial n_R} S(R, Q) dS(R), \quad \dots (2.10)$$

これは (2.2) を (2.3) に代入しても同じになる。

それ故 (1.18) と同様に

$$N(P, Q) + \int_C N(P, R) \frac{\partial}{\partial n_R} S(R, Q) dS(R) = S'(P, Q), \quad \dots (2.11)$$

となり、これを境界条件の積分方程式として解けば

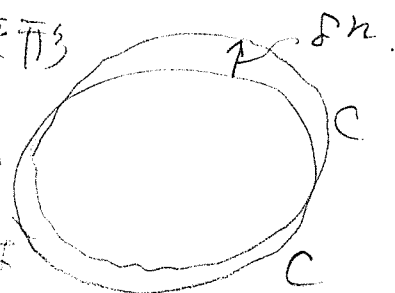
N が求まり、またそのマトリックスは (1.18) と同じである。

それ故 その逆マトリックスを計算しておけばマトリックスとベクトルの掛算で速度ポテンシヤルもノーマン割裂も容易に求められる。

さて C が法線方向に δn だけ変形

して C' になった時 Bergman-Schiffer

によれば速度ポテンシヤルの変化は



$$\delta \varphi(P) = - \int_C \text{grad } \bar{\Phi}(R) \text{grad } N(R, P) \delta n dS(R), \quad (2.12)$$

境界条件により

$$\text{grad } \bar{\Phi} \text{grad } N = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial S} \frac{\partial N}{\partial S}$$

であるから部分積分して

$$\delta\varphi(p) = \int_C N(p, R) \frac{\partial}{\partial s_R} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \delta h \right) ds_R, \quad (2.13)$$

を得る。

つまり δh の変化によって $\bar{\Phi}$ (近似値) は速度は
不変で $(-\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s})$ であるから 流量は $(-\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \delta h)$ だけ
減る事になるから それによる法線方向速度の
変化は $-\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial h} \delta h \right)$ となり それを (2.5) に代入
すれば 速度ポテンシャルの変化分は (2.13) で与え
られる。

それ故 速度の変化分は

$$\frac{\partial}{\partial s} [\delta\varphi(p)] = \int_C \frac{\partial N(p, R)}{\partial s_P} \frac{\partial}{\partial s_R} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} \delta h \right) ds_R, \quad (2.14)$$

2 の式を用いるには 逐次近似的に $\bar{\Phi}$ 上で所望の速度になるような
 δh を求める事が出来る。

すなわち C の一部 P で

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} = \text{Const.} \quad (2.15)$$

とすために、まず φ の近傍を Γ なる形を
 与え $\frac{\partial \Phi_0}{\partial s}$ と $\frac{\partial N_0}{\partial s}$ を求める。

Γ 上でどのような速度になるかはわからないので (2.14)
 (2.15) を微分して、

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad (2.16)$$

条件を (2.14) に代入して δn を求めればよい
 (積分方程式をとりて)
 この時微分したので 代わりに

$$\int_C \delta n ds = A \text{ or } 0, \quad (2.17)$$

という条件を追加すればよさそう。

また C と Γ とは自由流線理論では切れ
 も曲率も連続でなければならぬけれど
 この点は計算例からも検討しなければならぬ。

なお翼理論では同じような事が最小抵抗
 型の研究で等角写像を使って行われて
 いるからこの方法の才が数値計算的には
 すつきりしているように思われる。

3. 回転体

3次元問題でも前2節の式は殆ど変わらない。

従来は 吹き出し分布による (1.16) の積分方程式を解くのが普通であつたが そのかわりに その随伴方程式 (1.18) を解いてもよい と言う言である。

特に回転体については 軸方向流れの場合 ストークスの流れ関数を使うのが便利であつたが それでは 軸に直角方向の流れの問題は解けない。

この方法に戻れば その場合も 容易に扱える。

以下 回転体について 式を並べて見よう。

なお 吹き出し分布についても同じように 扱ける か 未知関数をポテンシヤル^{又は速度}とする方が 明らかに 便利なので その場合のみ 扱う。

さて

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi R}, \quad R = \overline{PQ}, \quad (3.1)$$

とすれば 前節までの式は 殆ど その儘 成立つ。

また (1.18) は

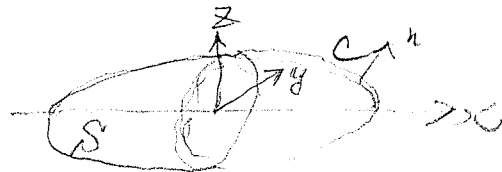
$$\Phi(P) + \iint_S \Phi(Q) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_Q} dS(Q) = \pi, \quad (3.2)$$

1問のほうに

2. 12 S は何形状の表面とし、その子午線は C としよう。

又円筒座標では

$$y = r \cos \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

1つ θ が 0 に 2π 回回るとすれば (3.2) 左辺の 2 項を θ' について積分して

$$dS = r' d\theta' ds, \quad \text{since } C \text{ is a circle.}$$

$$S^*(p, q) = \int_0^{2\pi} S(p, q) d\theta' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{R} \quad (3.3)$$

とすると (3.2) は

$$\bar{\Phi}(p) + \int_C \bar{\Phi}(q) \frac{\partial}{\partial n_q} S^* ds_q = \kappa, \quad (3.4)$$

この式では p も q も (x, y) 面にあるものとする。 y 方向からの一方向流れては

$$\bar{\Phi}(p) + \iint_S \bar{\Phi}(q) \frac{\partial}{\partial n_q} S ds_q = \gamma \quad (3.5)$$

となり

$$\bar{\Phi}(p) = \phi(x, y) \cos \theta, \quad \dots (3.6)$$

となるであろうから やはり (x, y) 面で $\pm$ と同じ

$$\phi(p) + \int_C \phi(q) \frac{\partial}{\partial n_q} S^{**} ds_q = \gamma, \quad (3.7)$$

$$S^{**} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta' d\theta'}{R}, \quad (3.8)$$

楕円関数で表わされ (附録A)

核(3.3), (3.8) は 共に 対数的特異性を有し, その法線微分は $z=47^\circ$ する点に留意しなければならない。

以下を軸対称流れについてのみ考えよう。

(3.4)において (A.6) なる座標 T を導入し (A.7) なる変換から

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'} S^* &= \left(\frac{\partial x'}{\partial n'} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial n'} \frac{\partial}{\partial y'} \right) S^* \\ &= \frac{1}{y'} \left[\frac{\partial y'}{\partial s'} \frac{\partial}{\partial y'} T + \frac{\partial x'}{\partial s'} \frac{\partial}{\partial x'} T \right] = \frac{1}{y'} \frac{\partial T}{\partial s'}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial x'}{\partial n'} = \frac{\partial y'}{\partial s'}, \quad \frac{\partial y'}{\partial n'} = -\frac{\partial x'}{\partial s'}$$

となるから (3.4) を 部分積分すると

$$\bar{\Phi}(p) - \int_C \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s_Q} T(p, Q) ds_Q = \kappa, \quad \dots (3.10)$$

この核関数は 与る種の楕円積分となつて ^{計算から} 面倒なので

これをまた S で微分したものを積分方程式とする方がよからう。

その特異性は (3.4) の時と同じである。

(3.10) は 円輪状カーネル $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}$ の分布による表現である。

(2.12) は

$$\delta \varphi(p) = - \int_C y' \frac{\partial \Phi}{\partial s_R} \frac{\partial}{\partial s_R} N^*(R, p) \delta \eta \, ds_R,$$

部分積分して

$$\delta \varphi(p) = \int_C \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} y' \delta \eta \right) N^*(R, p) \, ds_R, \quad (3.19)$$

実際には (3.9) を用いてこれらの積分は部分積分を
 実行しておけば" 2 次元の場合と全く同様になる。

4. 3次元ポテンシャルの計算に際して提案

3次元流れの計算が困難であるのは一に於いて計算容量が大きくなる事であるが細かく見ると従来の方法では次の点も問題である。

1) 要素分割の方法

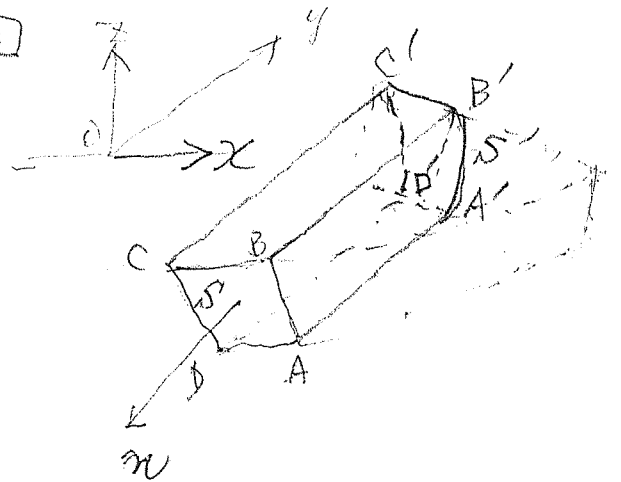
3角形要素に分割する方が合理的と考えられるがそれでは割れば x, y, z の平面で区切った時の表面に出来る四角い要素(1般には対角線で交る2平面から成立つ)の数の倍になる。

2) 法線微分

各要素について法線の方向余弦を計算し(例)面数の法線微分を計算しなければならぬ。

2次元又は3次元回転体では其断面関数を使ってその判別を省く事が出来るのであるから今の場合もそのような簡便法はないだろうか。

そこで右図のように座標面
で切取られる物体表面 S
を考えよう。



大抵の場合は左右対称
であるから S の対称面 S' を
考えておく方が便利であろう。

さて S および S' 上でポテンシャルが一様とすると

$$I(Q) = \iint_{S+S'} \frac{\partial S'(P, Q)}{\partial n} dS_P \quad (4.1)$$

を計算すればよい。

これは $\Omega = \frac{1}{R}$ とするとこれは Q 点から見た
 S と S' の立体角であるから計算式にそのワッ

ルティンがあればそれを利用すればよい。

特に Q 点が S 上にある時は Ω を三角形要素
(Q 点は対角線の上にあるとすると)、
に別けても立体角は同じく 2π となり、 Q 点から

他の要素上にある時は Ω は微小要素であるから

あまり問題ない。それ故三角形要素に別けても

あまり精度には関係ないと思われる。

所で S は調和度函数であるから S, S' および「座」の4つの
座標面で囲まれた領域を D とする。ガウスの定理が

$$I(Q) = \iiint_D \Delta S' dx dy dz - \iint_{C_1+C_2+C_3+C_4} \frac{\partial S}{\partial n} dS$$

$$= - \iint_{C_1-C_2} \frac{\partial S}{\partial z} dy dz - \iint_{C_3-C_4} \frac{\partial S}{\partial x} dx dy, \quad (4.2)$$

2.12 Δ はラプラシアンとする。

この式によれば $I(Q)$ の計算に

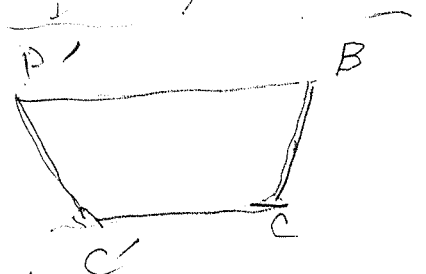
法線微分は必要としない。

また $S = 1/4\pi R$ の時には省略して

$$\int \frac{\partial S}{\partial z} dy = \frac{1}{4\pi} \int \frac{z-z'}{R^3} dy$$

$$= \frac{z-z'}{4\pi \{(x-x')^2 + (z-z')^2\}} \left(1 + \frac{y-y'}{R} \right), \quad (4.3)$$

$$\int \frac{\partial S}{\partial x} dy = \frac{x-x'}{4\pi \{(x-x')^2 + (z-z')^2\}} \left(1 + \frac{y-y'}{R} \right)$$



であるから (4.2) の内 y 方向の積分は直ちに実行
出来て この積分は S の周囲 $ABCD$ 上の
線積分で表わされる。

これは解析的に積分出来て結局 $I(Q)$ は

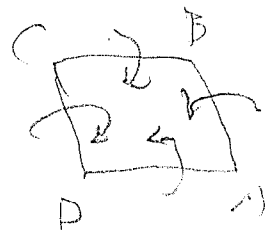
A, B, C, D の 4 点上の値で表わされる事になる。

(4.3) を 周辺の線上 (近似的に直線) で積分する時 右辺が 1 項が 表面の留数分を受け持つので注意しなければならない。

なお 2 点 ω 上に来る時は 前述のように $\frac{1}{2}$ としてよい。
(4.2) の表現は例えば その中 2 項は 下向き
の圧力分布のポテンシャルである。

従ってこれらは その周辺上の渦によるものと
考えてもよい。

これは えを正せば (4.1) そのものが S および S'
の周辺上の渦系によるものであって
それを要素に分解して書くと
(4.2) になると考えてもよい。



このようにして要素は三角形とする必要はなく 又法線
微分をする必要もなく 核関数は 2 つ ($S_z dx dy$,
 $S_x dy dz$) だけ考えればよい事になる。

なお (4.1) において S 上で 速度が一定の場合も同様
に 1 つ要素が可能であるが 面倒になるので その時は
或る S の領域を再分割し どれれの上では ϕ 一定

附錄 A

$$S^*(p, q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta}} \quad (A.1)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

$$k^2 = \frac{4yy'}{r_2^2} = 1 - k'^2, \quad k'^2 = \left(\frac{y'}{r_2}\right)^2$$

$$R = r_2 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$S^* = \frac{1}{\pi k_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - R^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\pi r_2} K(k), \quad (A.2)$$

$$S^{**} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{R} = \frac{-1}{\pi r_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi r_2} \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right] \quad (A.3)$$

$$S^* = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(t\omega) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_0(ty') dt, \quad x > x' \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial x'} = \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_0(ty') t dt = \frac{1}{2y'} \frac{\partial}{\partial y'} y' \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_1(ty') dt$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial y'} = - \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_0(ty') t dt = - \frac{1}{2y'} \frac{\partial}{\partial x'} y' \int_0^{\infty} e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_1(ty') dt \quad (A.5)$$

$$\omega^2 = y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta$$

至此

$$\begin{aligned}
 T(P, Q) &= \frac{y'}{2} \int_0^\infty e^{-t(x-x')} J_0(ty) J_1(ty') dt \\
 &= \frac{y'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{y'-y \cos \theta}{\omega^2} \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) d\theta \quad \dots (A.6)
 \end{aligned}$$

とある。

$$\frac{\partial}{\partial x} S^* = \frac{1}{y'} \frac{\partial}{\partial y'} T, \quad \frac{\partial}{\partial y'} S^* = -\frac{1}{y'} \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad (A.7)$$

また右辺の2項の符号は $x \rightarrow \pm\infty$ の値をどう決めるか? 定まるので「±」どちらにとってもよい。

$$\therefore \frac{y'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{y'-y \cos \theta}{y^2 + y'^2 - 2yy' \cos \theta} d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } y' > y \\ 0 & \text{for } y' < y \end{cases} \quad (A.8)$$

$$\therefore \frac{1}{1 - 2t \cos \theta} = \frac{1}{1 - t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n t^n \cos n\theta, \quad \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2 \text{ for } n > 0$$

なる。

$$\Delta(y'-y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y' > y \\ 0 & \text{for } y' < y \end{cases} \quad (A.9)$$

なるステップ関数に $\frac{y_0}{\pi} \lambda$ を乗せて

$$T(P, Q) = \frac{\Delta(y'-y)}{2} + T^*(P, Q), \quad \dots (A.10)$$

とすると

$$R = r_2 \sqrt{1 - k^2 \lambda^2 y}$$

$$\omega^2 = (y+y')^2 (1 - \alpha^2 \lambda^2 y), \quad \alpha^2 = \frac{4yy'}{(y+y')^2}$$

$$y' - y \cos \theta = y' + y - 2y \lambda^2 y$$

$$= (y+y')(1 - \alpha^2 \lambda^2 y) + 2y \left(\frac{y'-y}{y+y'} \right) \lambda^2 y,$$

となるので

$$\begin{aligned}
 T^* &= \frac{\chi y'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{y' - y \cos \theta}{\omega^2 R} d\theta = \frac{\chi y'}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(y+y')(1-\alpha^2 \lambda^2 \varphi) + 2y \left(\frac{y'-y}{y+y'}\right) \lambda^2 \varphi}{(y+y')^2 r_2 (1-\alpha^2 \lambda^2 \varphi) \sqrt{1-k'^2 \lambda^2 \varphi}} d\varphi \\
 &= \frac{\chi y' K(k)}{\pi r_2 (y+y')} + \frac{2\chi y y' (y'-y)}{\pi r_2 (y+y')^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda^2 \varphi d\varphi}{(1-\alpha^2 \lambda^2 \varphi) \sqrt{1-k'^2 \lambda^2 \varphi}}
 \end{aligned}$$

2の式2T^{*}は式3と重畳積分の積分で表すから

$$\alpha^2 = 1 - k'^2 \sin^2 \beta, \quad \sin^2 \beta = \frac{r_2^2}{r_1^2} \left(\frac{y-y'}{y+y'} \right)^2 \leq 1,$$

と表す。公式によつて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda^2 \varphi d\varphi}{(1-\alpha^2 \lambda^2 \varphi) \sqrt{1-k'^2 \lambda^2 \varphi}} = \frac{\frac{\pi}{2} - [KE(k', \beta) + (E-K)F(k', \beta)]}{\alpha k'^2 \sin \beta \cos \beta}$$

$$\begin{aligned}
 E(k', \beta) &= \int_0^\beta \sqrt{1-k'^2 \lambda^2 \varphi} d\varphi, \\
 F(k', \beta) &= \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \lambda^2 \varphi}}
 \end{aligned}$$

7"より

$$T^* = \frac{\chi y' K(k)}{\pi r_2 (y+y')} + \frac{\chi y y' (y'-y) \left[1 - \frac{2}{\pi} \{ KE(k', \beta) + (E-K)F(k', \beta) \} \right]}{r_2 (y+y')^2 \alpha k'^2 \sin \beta \cos \beta} \quad \dots (A.11)$$

なお y=12 y'=y' 7"より

$$T^* = \frac{\chi y^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1-\cos \theta}{\omega^2 R} d\theta = \frac{\chi}{2\pi r_2} K(k) \quad (A.12)$$

(ただし $\chi' = 0$ とする)