E　H-59

No.

Date 54.6.30

薄板の曲げ理論における核関数法

1. 相反定理と Bergman, Schiffer の表現

撓みを w, 板面の荷重を p とすると微分方程式は

$$\Delta^2 w(x,y) = p/D, \qquad (1.1)$$

となるが以下板の剛性を1と考えて式を述べる。換言すれば撓みにDをかけたものを新しい変数と考えてもよい。

撓みが u, v なる2つの状態について次の2次形式を定義しておく

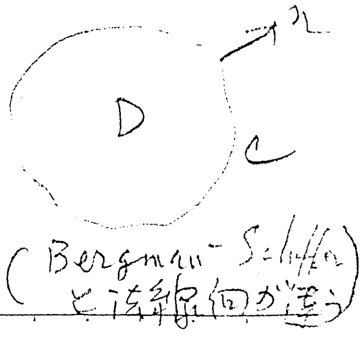
$$2E(u,v) = \iint_D \left[\Delta u \Delta v - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \times dxdy, \qquad (1.2)$$

$u=v$ の時 E は板の歪エネルギーである。

部分積分により

$$2E(u,v) = \iint_D (\Delta^2 u)\, v \, dxdy + \int_C \left(m(u)\frac{\partial v}{\partial n} - v\, q(u) \right) ds, \qquad (1.3)$$

m, q は C 上のモーメントと垂直力で附録Aに示す通りである。



(Bergman-Schiffer と法線向が違う)

相反定理は

$$E(u,v)=E(v,u) \qquad (1.4)$$

∴

$$\iint_D (v\Delta^2 u - u\Delta^2 v)\,dx\,dy$$

$$=\int_C \left[M(v)\frac{\partial u}{\partial n} - Q(v)u - M(u)\frac{\partial v}{\partial n} + Q(u)v \right] ds, \qquad (1.5)$$

今 $u=w$ とし (1.1) を満たすものとし，v として附録B に示す核関数 S を考えると，

$$w(Q)=\iint_D p(P)\,S(P,Q)\,dx\,dy$$
$$+\int_C \Big[M(w(P))\frac{\partial S(P,Q)}{\partial n_P} - Q(w(P))\,S(P,Q)$$
$$- M(S(P,Q))\frac{\partial w}{\partial n_P} + Q(S(P,Q))\,w(P) \Big] ds_P, \qquad (1.6)$$

境界値問題は次のような種類がある。

(I) 周辺固定

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}=0,$$

(II) 単純支持

$$w=0,\quad M=0,$$

であるが この場合 角があると角の部分に集中力が働くので注意

(III) 周辺自由

$$m=0,\ q=0$$

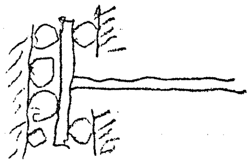
(IV) 弾性支持

周辺が梁で補強されているような場合で

$$q=\mathrm{func.}(w),\quad m=\mathrm{func}(w)$$

のように与えられ境界条件は一般に微積分方程式となる。

(V) 右図ような支持



これは(II)と対になるもので

$$\frac{\partial w}{\partial n}=0,\quad q=0.$$

平面応力問題の経験から，内部問題(有限領域のそれ)では(1.6)そのものを使うのが便利である。境界上では夫々ジャムプがあって、次のようになる。

$$\frac{1}{2}w\Big|_c = \iint_D pS\,dx\,dy + \int_C\left[m\frac{\partial S}{\partial n} - qS - M\Big|_c\frac{\partial w}{\partial n} + Q\Big|_c w\right]ds,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_c = \iint p\frac{\partial S}{\partial n'}\Big|_c dx\,dy + \int_C\left[m\frac{\partial^2 S}{\partial n\,\partial n'}\Big|_c - q\frac{\partial S}{\partial n'}\Big|_c - \frac{\partial M}{\partial n'}\Big|_c\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial Q}{\partial n'}\Big|_c w\right]ds, \tag{1.7}$$

又解は重ね合せ可能であるから荷重pによる解は別に計算して後で加え合せてよい。

しかし実際問題としては pがない時の解は上のような境界条件では $w=\frac{\partial w}{\partial n}=0$ となってしまうので意味はない。

荷重pが単位量で一点に集中している時の解は所謂影響関数又はグリーン関数である。

それを $G(P,Q)$ と書くと、

$$w(Q)=\iint_D p(P)\,G(P,Q)\,dx\,dy, \qquad \cdots(1.8)$$

$G(P,Q)$ は S と同じ特異性を持ち他は正則で与えられた境界条件を満たさねばならず、その正則部分は明らかに(1.6)右辺第2項に等しい。

2. 吹出式表現他

外部問題(無限領域の場合)では吹出し式表現が便利となって来る。

今,簡単の為に p は 0 とおくと (1・6) は 法線を前と同じにとるならば符号が変って,

$$w(Q)=\int_C\left[M(S)\frac{\partial w}{\partial n}-Q(S)w-m\frac{\partial S}{\partial n}+q\,S\right]ds, \tag{2.1}$$

となるが 内部領域での解

$$-w_i(Q)=\int_C\left[M(S)\frac{\partial w_i}{\partial n}-Q(S)w_i-m_i\frac{\partial S}{\partial n}+q_i\,S\right]ds, \tag{2.2}$$

は外部で 0 となる所から

$$\left.\begin{aligned}w(Q)&=\int_C\left[M(S)\frac{\partial w'}{\partial n}-Q(S)\,w'\right]ds,\\ w(Q)&=\int_C\left[q'S-m'\frac{\partial S}{\partial n}\right]ds,\end{aligned}\right\}\ (2.3)$$

但

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}&w'=w-w_i,\ \frac{\partial w'}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}(w-w_i)\\&\text{for }m=m_i,\ q=q_i\end{aligned}\right\}\\&\left.\begin{aligned}&m'=m-m_i,\ q'=q-q_i\\&\text{for }w=w_i,\ \frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\partial w_i}{\partial n}\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\ (2.4)$$

となる。

特に無限板の中に周辺自由の孔がある様な場合は x方向の一様な曲げによる撓みは

$$w_a(P) = \frac{x^2}{2}, \quad \text{for} \quad m_x = 1,\ m_y = \nu,\ m_{xy} = 0 \qquad (2.5)$$
$$P_x = P_y = 0$$
$$m_a = 1 - (1-\nu)\sin^2\alpha, \quad q_a = 0$$

境界条件は(2.1)において

$$m = -m_a, \quad q = -q_a, \quad \cdots \quad (2.6)$$

であるが(2.3)において(2.2)の w_i の所に $-w_a$ を入れて考えると

$$w' = w + w_a, \quad \frac{\partial w'}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(w + w_a), \quad (2.7)$$

となって w_a はわかっているから(2.5)とその法線微分の C 上の値は $(w + w_a)$ に関してフレドホルムの第2種の積分方程式となるのでこれを解けばよい事になる。

3. 板の座屈

板の座屈の方程式は

$$D\Delta^2 w = p + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.1)$$

で与えられ f は面内荷重による応力関数で撓みが小さいとすると面内荷重にのみ依存すると考えられ撓みに無関係と考えてよい。

そうするとこれは w に関して準線型方程式となるから今迄と同様に取扱う事が出来る。

さて簡単のために以下 p はないものとしておこう。

2次形式としてエネルギー積分をとろう。

$$E(u,v) = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

$$+ \frac{D}{2}\iint_D \left[\Delta u \Delta v - (1-\nu)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right\}\right] dxdy, \quad (3.2)$$

右辺第2項は (1.2) と同じものである。

また $D=1$ と考えて上式を部分積分すると

$$2E(u,v)=\iint_D v\left[\Delta^2 u-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]dxdy$$

$$+\int_C\left[m(u)\frac{\partial v}{\partial n}-v\{g(u)-h\}\right]ds, \quad \cdots (3.3)$$

$$h(u)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \cdots (\ .\ )$$

$$=p\frac{\partial u}{\partial x}+q\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \cdots (3.4)$$

$$p=\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial y},\quad q=-\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial x},$$

hは面内応力による境界線での垂直成分の補正項である。

相反定理は $E(u,v)=E(v,u)$ で与えられ

u, v が (3.1) を満たす ($p=0$) ならば

$$\int_C\left[m(u)\frac{\partial v}{\partial n}-m(v)\frac{\partial u}{\partial n}-v\{g(u)-h(u)\}+u\{g(v)-h(v)\}\right]ds$$

$$=0, \quad \cdot (3.5)$$

となる。

もし (3.1)を満たし原点では附録Bのように振舞う核関数 S が見つかれば 1節と全く同様にして (1.6) と同じ式が成立つ。

ただし (3.3)から分かるように g, Q には (3.4)の様な h 倍る量だけ補正しなければならない。

さて (1.6) のような表現が出来ると座屈とは与えられた境界条件に対して w が決まらない事であるから、境界条件の聯立積分方程式のデターミナントは 0 となる。

つまりこの方式では座屈荷重はそれによって定まり、座屈のモードはその積分方程式で 1, 2の点の値を指定してもう一度解く事によって求められる。

しかし任意の f について (3.1)を満たす核関数を求める事は問題を解くのと同じ位面倒であり、簡単に求まるのは一様圧縮応力の場合位で附録 C に示す。

そこで前節 S の核関数を使うと (3.3) から

$$w(Q) = \iint_D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right] w \, dx dy$$

$$+ \int_C \left[m\frac{\partial S}{\partial n} - (q-h)S - M\frac{\partial w}{\partial n} + (Q-H)w \right] ds, \quad (3.6)$$

となって体積積分が残る。

従ってD内にも多数点を選んで解かねば成らず

本法のメリットは失われる。

しかしこの方法は他の非線型問題にも適用出来る。

4. 板の撓み振動

運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\Delta^2 w = p(x, y, t) \quad \cdots (4.1)$$

運動は円周波数 ω で正弦的になっているものとし $w \Rightarrow w e^{i\omega t}$ の如く複素表示するものとし以下 $e^{i\omega t}$ は除いて考える事にする。

そうすると上式は

$$\Delta^2 w - k^4 w = 0, \quad \cdots (4.2)$$

$$k^4 = \frac{\rho \omega^2}{D}, \quad \rho \text{は板の単位面積の質量}$$

変分原理は運動エネルギーを T

$$T = \frac{\rho}{2}\iint_D \dot{w}^2 dx\, dy, \quad \cdots (4.3)$$

とすると $\underbrace{E}_{(1.2)\text{の}}$ で与えられる歪エネルギーとし

$$\delta \int_0^t (T - E)\, dt = 0 \quad \cdots (4.4)$$

と与えられるので (4.3) を1度部分積分して (4.1) を得る。

核関数を附録 D の如くとれば撓みの表現は (1.6) と全く等しい。

固有値は境界における積分方程式の
デターミナントが0になる条件として与えられる。
又内部問題では減衰を考えなければ
ψは同じ位相になるので核関数の虚部
は考える必要はない。
外部問題では発散波があって、Sの無限
遠方の漸近展開から容易に計算出来る。
また入射波はxの正方向から来るのは
e^{ikx}のようになる。
このような散乱等を考える時は相反
定理は大変有用になる。

5. 板の面内振動.

運動方程式は

$$\left.\begin{aligned} -\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u + \alpha\frac{\partial}{\partial x}\gamma &= -\frac{\kappa}{\mu}X \\ -\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Delta v + \alpha\frac{\partial}{\partial y}\gamma &= -\frac{\kappa}{\mu}Y \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

α; B.Sの定数

複素表示をする事にして.

$$\left.\begin{aligned} (\Delta + k^2)u + \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= -\frac{\kappa}{\mu}X \\ (\Delta + k^2)v + \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} &= -\frac{\kappa}{\mu}Y \end{aligned}\right\} \quad \text{-- -- } (5.2)$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \rho\omega^2 = k^2. \\ &今\ \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

なる回転を導入すると (5.2)の斉次方程式から (以下斉次方程式についてのみ考える)

$$\left.\begin{aligned} (1+\alpha)\left[\Delta + K^2\right]\gamma &= 0 \\ \left[\Delta + k^2\right]\omega &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{-- -- } (5.4)$$

$$K^2 = \frac{k^2}{1+\alpha},$$

γとωが与えられると(5.3)から

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y} \\ \Delta v &= \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{-- -- -- } (5.5)$$

これを(5.2)に代入して

$$\left.\begin{aligned} k^2 u &= -(1+\alpha)\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \\ k^2 v &= -(1+\alpha)\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\omega}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

附録のように核関数を定めると、例によって、

$$\left.\begin{aligned} u(Q) &= \int_C \left[p U^{(1)} + q V^{(1)} - u P^{(1)} - v Q^{(1)} \right] ds, \\ v(Q) &= \int_C \left[p U^{(2)} + q V^{(2)} - u P^{(2)} - v Q^{(2)} \right] ds. \end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

等の表示が得られる。

附録A 撓みとモーメント等

撓みをwとするとx, y方向のモーメント等は

$$m_x = D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w$$

$$m_y = D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w \qquad (A.1)$$

$$m_{xy} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(BとTと逆符号)

剪断力は

$$P_x = -D\frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \quad P_y = -D\frac{\partial \Delta w}{\partial y}, \qquad (A.2)$$

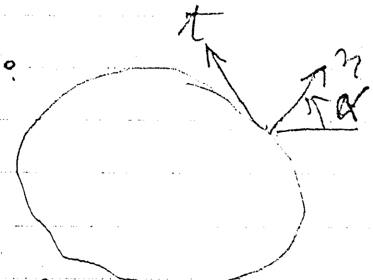
(BとTと同符号)

境界Cにおける法線方向のモーメントm_n, 垂直力qは

$$m_n(w;P) = \nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \Delta w - (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$q(w;P) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right), \qquad (A.3)$$

但しnは外向法線、tは切線とする。



この時

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \sin\alpha$$

とすると

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial n} = -\sin\alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial n} = \cos\alpha \qquad (A.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial y} \qquad (A.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial n^2} &= \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial n\partial t} &= \cos 2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sin 2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},
\end{aligned}\right\}\quad (A\cdot 6)$$

附録 B 核関数

$$S(P,Q)=\frac{R^2}{8\pi}\log R\ ,\quad R=\overline{PQ} \qquad \cdots\cdots (B.1)$$

$$P\equiv(x,y)\ ,\quad Q\equiv(x',y')$$

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\frac{\partial}{\partial x}S &= 2(x-x')\left(\log R+\frac{1}{2}\right)\\ 8\pi\frac{\partial}{\partial y}S &= 2(y-y')\left(\log R+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (B.2)$$

$$\left.\begin{aligned} 8\pi\frac{\partial^2}{\partial x^2}S &= 2\left(\log R+\frac{(x-x')^2}{R^2}\right)+1\\ 8\pi\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S &= \frac{2(x-x')(y-y')}{R^2},\\ 8\pi\frac{\partial^2}{\partial y^2}S &= 2\left(\log R+\frac{(y-y')^2}{R^2}\right)+1,\\ \Delta S &= \frac{1}{2\pi}\left[\log R+1\right],\end{aligned}\right\} \qquad (B.3)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x(S(P,Q)) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)S=\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\log R+\frac{1+\nu}{2}+\frac{(x-x')^2+\nu(y-y')^2}{R^2}\right],\\ M_y(S(P,Q)) &= \frac{1}{4\pi}\left[(1+\nu)\log R+\frac{1+\nu}{2}+\frac{(y-y')^2+\nu(x-x')^2}{R^2}\right],\\ &\left(=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)S\right)\\ M_{xy} &= \frac{1-\nu}{4\pi}\,\frac{(x-x')(y-y')}{R^2},\ =(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}S,\end{aligned}\right\} (B.4)$$

$$1-\frac{1-\nu}{2}=\frac{1+\nu}{2} \qquad 1-\frac{1-\nu}{4}=$$

$$M_n(S(P,Q))=\frac{1}{2\pi}(\log R+1)$$
$$-\frac{(1-\nu)}{4\pi}\Big[\sin^2\alpha\Big(\log R+\frac{(x-x')^2}{R^2}+\frac{1}{2}\Big)-\sin 2\alpha\Big(\frac{(x-x')(y-y')}{R^2}\Big)$$
$$+\cos^2\alpha\Big(\log R+\frac{(y-y')^2}{R^2}+\frac{1}{2}\Big)\Big],$$
$$=\frac{(1+\nu)}{4\pi}\log R+\frac{3+\nu}{4\pi}-\frac{(1-\nu)}{4\pi R^2}\Big[\sin^2\alpha(x-x')^2+\cos^2\alpha(y-y')^2$$
$$-2\sin\alpha\cos\alpha(x-x')(y-y')\Big]$$
$$=\frac{1+\nu}{4\pi}\log R+\frac{3+\nu}{4\pi}-\frac{1-\nu}{4\pi R^2}\Big[(x-x')\sin\alpha-(y-y')\cos\alpha\Big]^2$$
$$=\frac{1+\nu}{4\pi}\log R+\frac{3+\nu}{4\pi}-\frac{(1-\nu)}{4\pi}\sin^2(\Theta-\alpha),$$
$$Q(S(P,Q))=\frac{3-\nu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\log R+\frac{(1-\nu)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\Big[\sin^2(\Theta-\alpha)\Big],$$
$$=\frac{3-\nu}{4\pi}\frac{\cos(\Theta-\alpha)}{R}\;\cancel{-}\;\frac{(1-\nu)}{2\pi R}\sin^2(\Theta-\alpha)\cos(\Theta-\alpha),$$
$$=\frac{\cos(\Theta-\alpha)}{2\pi R}+\frac{(1-\nu)}{4\pi R}\cos(\Theta-\alpha)\cos 2(\Theta-\alpha),$$
(B.5)

?

$$\tan\Theta=\frac{y-y'}{x-x'},\quad \frac{\partial}{\partial n}\log R=\frac{\partial}{\partial t}\Theta,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial t}\log R,$$
$$\frac{\partial}{\partial n}\log R=\frac{(x-x')\cos\alpha+(y-y')\sin\alpha}{R^2}=\frac{\cos(\Theta-\alpha)}{R},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\log R=\frac{-(x-x')\sin\alpha+(y-y')\cos\alpha}{R^2}=\frac{\sin(\Theta-\alpha)}{R},$$
(B.6)

このM_n, Qを撓み関数と考えてそれによるモーメント等を計算すると

$$\left(\frac{Y}{R^2}\right)_x = \frac{1}{R^2} \sim \frac{}{R}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\log R = \frac{y^2-x^2}{R^4}+\nu\frac{x^2-y^2}{R^4} = \frac{(x^2-y^2)}{R^4}(\nu-1)$$

以下当分 $R^2=x^2+y^2$ としておく　　$\Delta \log R = 0$　　(B.7)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\log R = +(1-\nu)\frac{(x^2-y^2)}{R^4},\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\log R = -\frac{2xy}{R^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} = -\frac{x\cos(\theta-\alpha)}{R^3}+\frac{y\sin(\theta-\alpha)}{R^3} = -\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{R^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} = -\frac{y\cos(\theta-\alpha)}{R^3}-\frac{x\sin(\theta-\alpha)}{R^3} = -\frac{\sin(2\theta-\alpha)}{R^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} = \frac{2x\cos(2\theta-\alpha)}{R^4}-\frac{2y\sin(2\theta-\alpha)}{R^4} = \frac{2\cos(3\theta-\alpha)}{R^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\;'' = +\frac{2y\cos(2\theta-\alpha)}{R^4}-\frac{2x\sin(2\theta-\alpha)}{R^4} = \frac{-2\sin(3\theta-\alpha)}{R^3},\quad (B.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\;'' = \frac{2y\sin(2\theta-\alpha)}{R^4}-\frac{2x\cos(2\theta-\alpha)}{R^4} = \frac{-2\cos(3\theta-\alpha)}{R^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} = 2(1-\nu)\frac{\cos(3\theta-\alpha)}{R^3} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R},$$

$$(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} = -2(1-\nu)\frac{\sin(3\theta-\alpha)}{R^3},\quad \Delta\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin^2(\theta-\alpha) = -\sin 2(\theta-\alpha)\overset{\sin\theta}{\frac{y}{R^2}} = \mp\frac{+\{\cos(3\theta-2\alpha)-\cos(\theta-2\alpha)\}}{2R},$$

$2\theta-2\alpha+\theta$　　$2\alpha-2\theta-\theta$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin^2(\theta-\alpha) = \overset{\cos\theta}{\frac{x}{R^2}}\sin 2(\theta-\alpha) = \frac{1}{2R}\left[\sin(3\theta-2\alpha)+\sin(\theta-2\alpha)\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{-1}{2R^3}\left[-x\left(\cos(3\theta-2\alpha)-\cos(\theta-2\alpha)\right)+y\left\{3\sin(3\theta-2\alpha)+\sin(\theta-2\alpha)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2R^2}\left[-\cos\theta\cos(3\theta-2\alpha)+3\sin\theta\sin(3\theta-2\alpha)+\underset{?}{\cos 2\alpha}\quad ''\right].$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = +\frac{1}{2R^3}\left[-y\{\sin(3\theta-2\alpha)+\sin(\theta-2\alpha)\}+x\{3\cos(3\theta-2\alpha)+\cos(\theta-2\alpha)\}\right]$$

$$= +\frac{1}{2R^2}\left[+3\cos\theta\cos(3\theta-2\alpha)-\sin\theta\sin(3\theta-2\alpha)+\cos(2\theta-2\alpha)\right]$$

$$\Delta \sin^2(\theta-\alpha) = \frac{1}{2R^2}\left[3\cos(2\theta-2\alpha) + \overset{r,}{\cos 2\alpha}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \;\; '' \;\; = +\frac{1}{2R^3}\left[y\left(\cos\overline{3\theta-2\alpha} - \cos(\theta-2\alpha)\right) - x\left(3\sin\overline{3\theta-2\alpha} - \sin(\theta-2\alpha)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2R^2}\left[3\cos\theta\sin\overline{3\theta-2\alpha} + \sin\theta\cos\overline{3\theta-2\alpha} - \sin(2\theta-2\alpha)\right] /\!/$$

$$M_n(S(p,Q)) = \frac{1+\nu}{4\pi}\log R + \frac{3+\nu}{4\pi} - \frac{1-\nu}{4\pi}\sin^2(\theta-\alpha),$$

$$Q(S(p,Q)) = \frac{3-\nu}{4\pi}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R} + \frac{1-\nu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n}\left[\sin^2(\theta-\alpha)\right],$$

$$= \quad '' \quad - \frac{1-\nu}{2\pi R}\sin^2(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)$$

$$= \frac{\cos(\theta-\alpha)}{2\pi R} + \frac{1-\nu}{4\pi R}\cos 2(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)$$

$$Q \quad = \frac{\cos(\theta-\alpha)}{2\pi R} + \frac{(1-\nu)}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[\sin(2\theta-\alpha)\right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial n'} = \frac{-(x\cos\alpha'+y\sin\alpha')}{R} = -\cos(\theta-\alpha')$$

$$\frac{\partial}{\partial n'}\log R = \frac{\partial\Theta}{\partial t'} = -\frac{\cos(\theta-\alpha')}{R}, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial n'} = -\frac{\partial}{\partial t'}\log R = \frac{\sin(\theta-\alpha')}{R}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial n'}M = -\frac{1+\nu}{4\pi}\frac{\cos(\theta-\alpha')}{R} - \frac{(1-\nu)}{2\pi}\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)\frac{\sin(\theta-\alpha')}{R}.$$

$$\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha') = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha'-\alpha) - \cos(2\theta-\alpha-\alpha')\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial n'}M = -\frac{1}{4\pi R}\left[(1+\nu)\cos(\theta-\alpha') + (1-\nu)\cos(\alpha'-\alpha)\cos(\theta-\alpha)\right]$$

$$+\frac{(1-\nu)}{8\pi}\frac{d}{ds}\left[\sin(2\theta-\alpha-\alpha')\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n'} = +\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\alpha')}{R^2} + \frac{\cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha')}{R^2}\right]$$

$$+\frac{1-\nu}{4\pi}\frac{d}{ds}\left[\frac{\cos 2(\theta-\alpha)}{R}\cdot\sin(\theta-\alpha')\right]$$

$$= +\frac{\cos(2\theta-\alpha-\alpha')}{2\pi R^2} + \quad ''$$

附録 C　$\Delta^2 w = -4\sigma^2 w_{xx}$ の素解

$$\Delta^2 w = -4\sigma^2 w_{xx}, \quad \cdots (C.1)$$

は

$$\left(\Delta + 2i\sigma\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\Delta - 2i\sigma\frac{\partial}{\partial x}\right)w = 0, \quad \cdots (C.2)$$

となり
$$\left(\Delta \pm 2i\sigma\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi^{\pm} = 0, \quad \cdots (C.3)$$

の解は　夫々

$$\Phi^{\pm} = e^{\mp i\sigma x} \mathcal{Z}_0(\sigma r), \quad \cdots (C.4)$$

$\mathcal{Z}_0(\sigma r)$ は　$J_0(\sigma r)$ or $Y_0(\sigma r)$

それ故、適当な特異性をもつものとしては、

$$S = \cos\sigma x\, Y_0(\sigma r) \quad \cdots (C.5)$$

と選べばよかろう。

附録D 撓み振動の核関数

$$(\Delta^2 - k^4)\,w = 0, \quad \cdots\cdots \quad (D.1)$$

の解は $J_0(kr),\ Y_0(kr),\ I_0(kr),\ K_0(kr)$

であるが原点で対数的特異性を有し、

無限遠で波が外に出て行く条件を考えると

$$H_0^{(2)}(kr), \quad K_0(kr)$$

の2種類になる。

$$K_0(kr) \xrightarrow[r\to 0]{} -\left(1 + \frac{k^2r^2}{4}\right)\log\frac{\gamma kr}{2},$$

$$\frac{\pi i}{2}H_0^{(2)}(kr) \xrightarrow[r\to 0]{} -\left(1 - \frac{k^2r^2}{4}\right)\log\frac{\gamma kr}{2}$$

$$S(P,Q) = -\frac{1}{4\pi k^2}\left[K_0(kR) + \frac{\pi i}{2}H_0^{(2)}(kR)\right] \xrightarrow[R\to 0]{} \frac{R^2}{8\pi}\log R, \quad (D.2)$$

とおけば原点の特異性も附録Bのそれに等しい。

$$\Delta S(P,Q) = -\frac{1}{4\pi}\left[K_0(kR) - \frac{\pi i}{2}H_0^{(2)}(kR)\right] \xrightarrow[R\to 0]{} \frac{1}{2\pi}\log R, \quad \cdots (D.3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sin(\Theta - \alpha), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\cos(\Theta-\alpha)}{R},$$ だから

$$\frac{\partial}{\partial t}K_0(kR) = -K_1(kR)\,k\sin(\theta-\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H_0^{(2)}(kR) = -H_1^{(2)}(kR)\,k\sin(\theta-\alpha)$$

$$K_1' = -K_0 - \frac{1}{kR}K_1, \quad H_1^{(2)\prime} = H_0^{(2)} - \frac{1}{kR}H_1^{(2)},$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0(kR) = +k^2 \sin^2(\theta-\alpha)\left[K_0 + \frac{1}{kR} K_1\right]$$
$$- K_1 \frac{k}{R} \cos^2(\theta-\alpha)$$
$$= k^2 K_0 \sin^2(\theta-\alpha) - \frac{k}{R} \cos 2(\theta-\alpha) K_1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_0^{(2)} = -k^2 \sin^2(\theta-\alpha)\left[H_0^{(2)} - \frac{1}{kR} H_1^{(2)}\right]$$
$$- \frac{k}{R} \cos^2(\theta-\alpha) H_1^{(2)}$$
$$= -k^2 H_0^{(2)} \sin^2(\theta-\alpha) - \frac{k}{R} H_1^{(2)} \cos 2(\theta-\alpha),$$

$$H_0^{(2)}(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\, e^{\frac{\pi}{4}i - ikr}$$

$$S \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{8k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\, e^{-\frac{\pi}{4}i - ikr}$$

E. 面内振動の核関数

$$\left.\begin{aligned}(\Delta+K^2)\gamma&=0\\(\Delta+k^2)\omega&=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\quad(E.1)$$

から発散条件を満たす解は

$$\gamma=H_0^{(2)}(Kr),\quad \omega=H_0^{(2)}(kr)$$

となる。

一方

$$\left.\begin{aligned}p&=2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+(\alpha-1)\gamma\frac{\partial x}{\partial n}\\&=\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial v}{\partial s}+\alpha\gamma\frac{\partial x}{\partial n},\\q&=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n}+2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+(\alpha-1)\gamma\frac{\partial y}{\partial n}\\&=\frac{\partial v}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial s}+\alpha\gamma\frac{\partial y}{\partial n},\end{aligned}\right\}\quad(E.2)$$

であるから u, v に対数的特異点を有すればよい。

そこで今

$$\gamma=A\frac{\partial}{\partial x}H_0^{(2)}(Kr),\quad \omega=B\frac{\partial}{\partial y}H_0^{(2)}(kr),\quad(E.3)$$

とおくと (5.6) から

$$\left.\begin{aligned}U^{(1)}&=\frac{B}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}H_0^{(2)}(kr)-\frac{A}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H_0^{(2)}(Kr)\\V^{(1)}&=-\frac{B}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H_0^{(2)}(kr)-\frac{A}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}H_0^{(2)}(Kr)\end{aligned}\right\}\quad(E.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(kr) = -\frac{k^2}{2} H_0^{(2)} - k^2 \cos 2\theta \left(H_0^{(2)} - \frac{H_1^{(2)}}{kr} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad = -\frac{k^2}{2} H_0^{(2)} + k^2 \cos 2\theta \left(H_0^{(2)} - \frac{H_1^{(2)}}{kr} \right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_0^{(2)} = -k^2 \sin\theta \cos\theta \left[k H_0^{(2)} \overset{?}{+} \frac{2}{kR} H_1^{(2)} \right], \qquad \text{(E.5)}$$

これから (E.2) の内 その周りに積分して有限な部分は

$$-\frac{B}{2} + \frac{A}{4} = \frac{1}{2\pi}, \quad \left(A = \frac{2}{\pi},\ B = \frac{1}{\pi}\right) \qquad \text{(E.6)}$$

としておけばよい。

$P^{(1)}, Q^{(1)}$ は (E.4) を (E.2) に代入すればよい。

一方　$\gamma = C \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kr), \quad \omega = D \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kr), \qquad \text{(E.7)}$

とおくと

$$U^{(2)} = \frac{D}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_0^{(2)}(kr) - \frac{C}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_0^{(2)}(Kr)$$

$$V^{(2)} = -\frac{D}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(kr) - \frac{C}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(Kr) \qquad \text{(E.8)}$$

$$\therefore \quad D + C = \frac{1}{\pi}$$

$$\left(C = -\frac{1}{\pi},\ D = \frac{2}{\pi} \right) \qquad \text{(E.9)}$$

(どちらか一方を0にするそのは とれ立い。)