

弾性波の散乱におけるハスキントの関係 (2次元問題)

別添付

1. 微分方程式, 変位の表現
2. 縦, 横波の表現
3. 相反定理.
4. 円境界による平面波の反射散乱
5. 直線分 " " "
6. 時間領域の挙動.

附録 A 自由表面のある場合 (I)

B 変位の表現.

C 自由表面を進行する波.

D 二次元表面波.

E 自由表面のある場合
の下に又境界面

F ハスキントの関係の拡張

G 円筒の運動

H 円筒の静的変位.

I 地震動の水中への伝播

J. ハスキントの関係の表

1. 微分方程式, 変位の表現

変位 u, v に関する微分方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta v + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad ? \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \quad (1.1)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.2)$$

時間因子を $e^{i\omega t}$ とし省略し, 変数を複素表示すると (1.1) は

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0 \\ (\Delta + k^2)v + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (\Delta + k^2)u + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0 \\ (\Delta + k^2)v + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= 0 \end{aligned}} \right\} \quad (1.1')$$

$$\frac{\rho}{G} \omega^2 = k^2$$

2. 2" 回転 ω を

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

のように導入すると (1.1') から次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (1+\alpha)(\Delta + k^2)\gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2)\omega &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (1+\alpha)(\Delta + k^2)\gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2)\omega &= 0 \end{aligned}} \right\} \quad (1.4)$$

$$k^2 = k^2 / (1+\alpha) = \left(\frac{1-\nu}{2} \right) k^2$$

(1.4) はよく知られた Helmholtz の方程式で与えられる

今それがわかったとすると, (1.2), (1.3) から

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \Delta v &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ \Delta v &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned}} \right\} \quad (1.5)$$

これを (1.1') に代入すると

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ v &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

よって $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right), \quad \sigma_y = 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right), \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.7) \quad \text{(平面応力状態)}$$

境界力 p, q は

$$p = \sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} = G \left[\left(2\varepsilon_x + \frac{2\nu}{1-\nu} \gamma \right) \frac{dy}{ds} - \gamma_{xy} \frac{dx}{ds} \right]$$

$$q = \tau_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds} = G \left[\gamma_{xy} \frac{dy}{ds} - 2 \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \frac{dx}{ds} \right]$$

これから

$$p/G = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \gamma \frac{\partial x}{\partial n},$$

$$q/G = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \gamma \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (1.8)$$

これを γ と ω で表わせば

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \frac{\partial x}{\partial n} - \omega \frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{\partial y}{\partial n} - \omega \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{p}{G} = \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial y} - \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n \partial x} + \omega \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{2\nu}{1-\nu} \gamma \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{q}{G} = -\frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial x} - \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n \partial y} + \omega \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2\nu}{1-\nu} \gamma \frac{\partial y}{\partial n} \quad (1.9)$$

とわかる。

以上のように、変位等は 縦振動 γ と 横振動 ω

によつて (1.6) のように表わされるので γ と ω を求

めればよいから 現在は (1.4) の解としてよく知られて

いるものであるから これを最初にあてはめる方がよいから

その境界条件は 変位の値もしくは法線微分と

にて与えられてゐる方が便利であるから

今 変位^{外力}の法線方向成分を u_n, p_n , 切線方向

成分を u_s, p_s とすると

$$u_n = u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \quad (1.10)$$

$$u_s = u \frac{\partial x}{\partial s} + v \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

$$\frac{p_n}{G} = \frac{1}{G} \left(p \frac{\partial x}{\partial n} + q \frac{\partial y}{\partial n} \right) = \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n \partial s} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} + \frac{2\nu}{1-\nu} \gamma$$

$$\frac{p_s}{G} = \frac{1}{G} \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} \right) = -\frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n \partial s} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \omega$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_n}{G} &= -2 \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{2}{1-\nu} \gamma \\ \frac{p_s}{G} &= 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} + \omega \end{aligned} \right\} \dots (1.11)$$

$$\left(\frac{1-\nu}{2} = \frac{k^2}{k^2} \right)$$

これと (1.10) から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial n} &= -k^2 u_n + \frac{k^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p_s}{G} - 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} \right), \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= -k^2 u_s - \frac{k^2}{2k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p_n}{G} + 2 \frac{\partial u_s}{\partial s} \right), \end{aligned} \right\} (1.12)$$

これらの式から γ と ω の境界値問題は次のようになる。例として u, v によって u_n, u_s が与えられる場合を考えよう。未知関数は p_n, p_s である。一方 γ と ω も境界上でその値もしくはその法線微分がわかれば他方は定まるから上の2式は p_n, p_s についての^①積分方程式となり、それを解けば解は

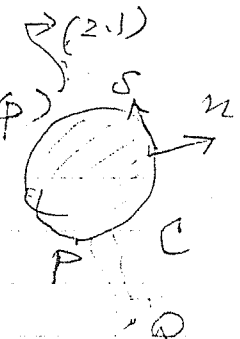
求まる。

2. 縦横波の表現

γ と ω は式(1.4)の解で"あるから無限遠方へ発散する波を持つ"という条件を課すると次の表現が出来る。

$$\gamma(\mathbf{Q}) = \frac{1}{4i} \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n_p} H_0^{(2)}(kR) - \gamma(p) \frac{\partial}{\partial n_p} H_0^{(2)}(kR) \right) ds(p)$$

$R = |\mathbf{PQ}|$



ω についても全く同形式で k を ω とおけばよい。

無限遠方では

$$H_0^{(1)}(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(k\rho) H_n^{(1)}(kr) \cos n(\varphi - \varphi')$$

$$R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \varphi'), \quad r \gg \rho,$$

で " $r \gg 1$ なら" $H_n^{(2)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})}$

$$H_n^{(2)}(kr) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})}$$

故に

$$H_0^{(1)}(kR) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(k\rho) \cos n(\varphi - \varphi')$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{\pi}{4}) + i k \rho \cos(\varphi - \varphi')} \quad (2.2)$$

$$\text{すなわち} \quad \rho \cos(\varphi - \varphi') = x \cos \varphi' + y \sin \varphi' \equiv \tilde{\omega}(\varphi')$$

であるから 今

$$P(K, \varphi') = \int_C \left[\frac{\partial \gamma}{\partial n} e^{iK\tilde{\omega}(\varphi')} - \gamma \frac{\partial}{\partial n} e^{iK\tilde{\omega}(\varphi')} \right] ds, \quad (2.3)$$

$$\Omega(R, \varphi') = \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} e^{iR\tilde{\omega}} - \omega \frac{\partial}{\partial n} e^{iR\tilde{\omega}} \right) ds,$$

なる関数を定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} \gamma(Q) &\longrightarrow \frac{e^{-iK\tilde{r}}}{2\sqrt{2\pi i K \tilde{r}}} P(K, \varphi') \\ \omega(Q) &\longrightarrow \frac{e^{-iR\tilde{r}'}}{2\sqrt{2\pi i R \tilde{r}'}} \Omega(R, \varphi') \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$Q \equiv (x', y'), \quad x' = \tilde{r} \cos \varphi', \quad y' = \tilde{r} \sin \varphi'$$

(1.11), (1.12) を代入すると

$$P = \int_C \left[\left\{ K^2 u_n + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p_s}{G} - 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) \right\} e^{iK\tilde{\omega}} - \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1-\nu}{2G} p_n \right\} \frac{\partial}{\partial n} e^{iK\tilde{\omega}} \right] ds.$$

$$= \int_C \left[\left\{ K^2 u_n + (1-\nu) \frac{\partial^2 u_n}{\partial s^2} \right\} e^{iK\tilde{\omega}} - (1-\nu) \frac{\partial u_s}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} e^{iK\tilde{\omega}} \right] ds$$

$$- \frac{1-\nu}{2G} \int_C \left(p_s \frac{\partial}{\partial s} e^{iK\tilde{\omega}} + p_n \frac{\partial}{\partial n} e^{iK\tilde{\omega}} \right) ds, \quad (2.5)$$

$$\Omega = - \int_C \left[\left(K^2 u_s + 2 \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} \right) e^{iR\tilde{\omega}} - 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} \frac{\partial}{\partial n} e^{iR\tilde{\omega}} \right] ds,$$

$$- \frac{1}{G} \int_C \left(\frac{\partial p_n}{\partial s} e^{iR\tilde{\omega}} + p_s \frac{\partial}{\partial n} e^{iR\tilde{\omega}} \right) ds, \quad (2.6)$$

充分遠方で (γ, φ) 方向の音位 および力は (1.10)

とこの下の式から、

$$u_r = \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \rightarrow + \frac{i e^{-i k r}}{2 k \sqrt{2 \pi i k r}} \Gamma(k, \varphi),$$

$$u_\varphi \Rightarrow - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \rightarrow \frac{i e^{-i k r}}{2 k \sqrt{2 \pi i k r}} \Omega(k, \varphi), \quad \left. \begin{array}{l} (2.7) \end{array} \right\}$$

$$\frac{p_r}{G} \rightarrow \frac{2}{1-\nu} \gamma \rightarrow \frac{e^{-i k r}}{(1-\nu) \sqrt{2 \pi i k r}} \Gamma(k, \varphi) \quad \left. \begin{array}{l} (2.8) \end{array} \right\}$$

$$\frac{p_\varphi}{G} \rightarrow \omega \rightarrow \frac{e^{-i k r}}{2 \sqrt{2 \pi i k r}} \Omega(k, \varphi)$$

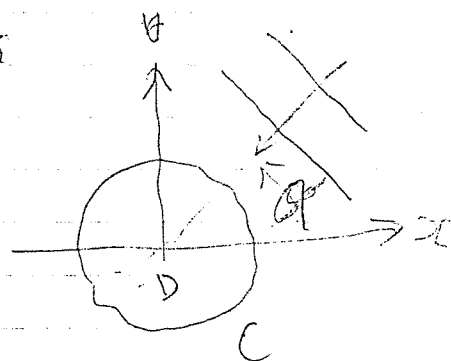
さて 図のように右方から φ の角度

で入射する 平面波は、

その音位振幅が 1 とすると、

$$\gamma_0(p; \alpha) = i k e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)}$$

$$\omega_0(p; \alpha) = i k r e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)} \quad \left. \begin{array}{l} (2.9) \end{array} \right\}$$



となり、 γ_0 は進行方向にのみ、 ω_0 はそれに直角な

方向にのみ変位成分をもつ。

このような入射波を物体Dから反射散乱する
のが以後の主題であるがそれによる諸量に

下流字dをつけて示す事にすると 変位境界条件は
(入射波は下流字0)

1) 剛性本壁

$$u_d = -u_0, \quad v_d = -v_0, \quad \dots (2.10)$$

2) 空孔

$$p_d = -p_0, \quad q_d = -q_0, \quad \dots (2.11)$$

3) 内部に弾性値の異なる物質が混ざってゐる。

i) Cに沿ってずれなれで隙間もあかなければ

$$u_d + u_0 = u_i, \quad v_d + v_0 = v_i, \quad \dots (2.12)$$

u_i, v_i は中側の変位とする

ii) Cに沿ってずれてもよければ

$$p_d + p_0 = -p_i, \quad q_d + q_0 = -q_i, \quad \dots (2.13)$$

となって(2.12)(2.13)は内側の^{境界面}の問題と併立させら
れる。

3. 相反定理.

高次の場合と同様に Maxwell-Betti の相反定理が成立つ。

$$\int_C (u_1 p_2 + v_1 q_2) ds = \int_C (u_2 p_1 + v_2 q_1) ds, \quad (3.1)$$

$(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ が共に外に出て行く (閉路を拂) ているならば上式は無限領域においても成立つ。

一方同様にして、有限領域では次式が成立つ。

$$\int_C (\overline{u_1} p_2 + \overline{v_1} q_2) ds = \int_C (\overline{u_2} p_1 + \overline{v_2} q_1) ds, \quad (3.2)$$

2.12 上式は複素共役値をとる事を示す。

それ故 (u_2, v_2) が外に流がでて行く解とすると

$(\overline{u_2}, \overline{v_2})$ は流が内側に集って来る解になる。

無限領域では無限遠方の境界上で2の積分は0にならない。

なお (3.1), (3.2) は容易にわかるように陰線成分と切線成分によつて次のようにかける。

$$\int_C (u_{n1} p_{n2} + u_{s1} p_{s2}) ds = \int_C (u_{n2} p_{n1} + u_{s2} p_{s1}) ds, \quad (3.1')$$

$$\int_C (\overline{u_{n1}} \overline{p_{n2}} + \overline{u_{s1}} \overline{p_{s2}}) ds = \int_C (\overline{u_{n2}} \overline{p_{n1}} + \overline{u_{s2}} \overline{p_{s1}}) ds, \quad (3.2')$$

2の(3.2')と(2.7), (2.8)を使い

$$\begin{aligned}
 & \int_C (u_1 \bar{p}_2 + v_1 \bar{q}_2 - \bar{u}_2 p_1 - \bar{v}_2 q_1) ds \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (\bar{u}_2 p_1 + \bar{v}_2 q_1 - u_1 \bar{p}_2 - v_1 \bar{q}_2) r d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{-i}{2(1-\nu)k^2} \left\{ \begin{array}{c} \overline{P_1(k, \varphi)} \overline{P_2(k, \varphi)} \\ + \overline{P_1} \overline{P_2} \end{array} \right\} - \frac{i}{4kr^2} \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega_1(k, \varphi)} \overline{\Omega_2(k, \varphi)} \\ + \overline{\Omega_1} \overline{\Omega_2} \end{array} \right\} \right] \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

となり、これは、 C 上でなす仕事からすべて $i\hbar$ のエネルギーとして 放射して行く事を示している。

さて(3.1)において一方が散乱波である場合は

$$\int_C (u_1 p_d + v_1 q_d) ds = \int_C (u_d p + v_d q) ds, \quad \dots (3.4)$$

今 C が剛体壁であるとし、波が C に及ぼす

力 (X, Y) を考えよう。入射波の力も考えて

$$\begin{aligned}
 X &= \int_C (p_0 + p_d) ds, \\
 Y &= \int_C (q_0 + q_d) ds,
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

一方 C 上の変位が u, v 方向に $1, 2$ あり、
つまり x, y 方向に 単位振幅 で C が振動する
時の解を 表 2 のように

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1, \quad v_1 = 0 & \text{on } C \\ u_2 &= 0, \quad v_2 = 1 & \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

等 1 (3.5) の右辺第 2 項に (3.4) を適用し
(2.10) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} X &= \int_C [p_0 u_1 + q_0 v_1 - p_1 u_0 + v_0 q_1] ds \\ Y &= \int_C [p_0 u_2 + q_0 v_2 - p_2 u_0 - q_2 v_0] ds. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

ここで (1.10), (1.11) によれば

$$p_{0n} u_n + p_{0s} u_s - p_n u_{0n} - p_s u_{0s}$$

$$= \frac{2}{1-\nu} (\gamma_0 u_n - \gamma u_{0n}) + (\omega_0 u_s - \omega u_{0s})$$

$$= \frac{1}{R^2} \left(\omega \frac{\partial \omega_0}{\partial n} - \omega_0 \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) - \frac{k^2}{K^4} \left(\gamma_0 \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial \gamma_0}{\partial n} \right) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial}{\partial s} (\gamma_0 \omega - \gamma \omega_0),$$

となるから 上式に代入すると (2.3) の定義式より
(2.9)

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{ik^3} \Omega_1(k, \alpha) \text{ or } \frac{k^2}{iK^5} P_1(K, \alpha) \\ Y &= \frac{1}{ik^3} \Omega_2(k, \alpha) \text{ or } \frac{k^2}{iK^5} P_2(K, \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

入射波が横波なら $k=1$ として 計算すればよい

これは水の波の理論における Hasimoto の
関係であって、 $\bar{u}$ による力は (3.6) のような
強制振動力による発散波の振幅で
表わされる。

したがって例えば X 方向の $\bar{u}$ 強制力をなく
するためには、 C 上で $(u=1, v=0)$ なる強制振動
をさせた時 α ($\alpha+\pi$?) 方向に出て行く $\bar{u}$ の
振幅が 0 になればよい。

一般には境界は (2.12), (2.13) のような条件
を満たすわけであるけれど 例えは (2.12) をとると
解は加算的であるから 剛体壁と見た時の力
と壁が (u_i, v_i) だけ変位した時の解を加え
合わせればよい事になる。

ハスケットは上の関係をもう少し一般的形式で述べている。以下それを考えて見よう。

物体が2個ある場合を考えると (3.1) は

$$\int_S (u_1 p_2 + v_1 q_2 - u_2 p_1 - v_2 q_1) ds$$

$$= \int_C (u_2 p_1 + v_2 q_1 - u_1 p_2 - v_1 q_2) ds, \quad (3.9)$$

となる。

今は S が振動して C に力く力を考え、それを一般化に

$$X = \int_C (p_1 q + q_1 h) ds, \quad (3.10)$$

こゝに q, h は C 上のある与えられる関数で

例えば $q=1, h=0$ なら X は x 方向の力。

$q=0, h=1$ " " y "

$q = \delta(s-s_0)$ " s_0 点に力く力 (x方向の)

となる。

さて 今 u, v は S の振動による変位とし、境界条件を

$$u_1 = v_1 = 0 \quad \text{on } C \quad (3.11)$$

とし, (3.9)において更に

$$u_2 = g, \quad v_2 = h \quad \text{on } C. \quad (3.12)$$

これを (3.9) に代入すると (3.10) は

$$X = \int_S (u_1 p_2 + v_1 q_2 - u_2 p_1 - v_2 q_1) dS, \quad (3.13)$$

を得るが、 S 上の 変位 はまた指定してないので

仮定は

$$\left. \begin{array}{l} u_1, v_1 : \text{given on } S \\ u_2 = v_2 = 0 \quad \text{on } S \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

のようになると

$$X = \int_S (u_1 p_2 + v_1 q_2) dS, \quad (3.15)$$

となり 相反性が成立つ。

しかし, この形では (3.11), (3.12), (3.14) の境界条件を満たす境界値問題が解かれないと

あまり有用ではない。

そこで今 S は充分小さくて C の微分係数を互に
又は散乱などしないとする。 u_2, v_2 は S に垂直
 $C_{p_2}^A$

(今は点)

ただし (3.12) で決まり、 S 上では P に一定値となる。

従って 今

$$\int_S u_1 ds = U, \quad \int_S u_1 ds = \int_S P ds = \int_S q_1 ds = 0, \quad (3.16)$$

とすれば (3.13) より

とすれば

$$X = P(S)U \quad (3.17)$$

又

$$\int_S P ds = P, \quad \int_S u_1 ds = \int_S u_1 ds = \int_S q_1 ds = 0, \quad (3.18)$$

とすれば

$$X = -u_2(S)P, \quad \dots \quad (3.19)$$

のようになるので変位場になり解釋も容易である。

即ち (3.17) では (3.16) のような性質を持つ特定点が

S にある時 それによる C 上の力 X は C が (3.12)

のように振動した時 S 上の P に等しい (この時は

は方向性をもつので定義に気をつけなければならない)。

(3.19) では同様にして S 点の ^{力は}変位で表わされる。

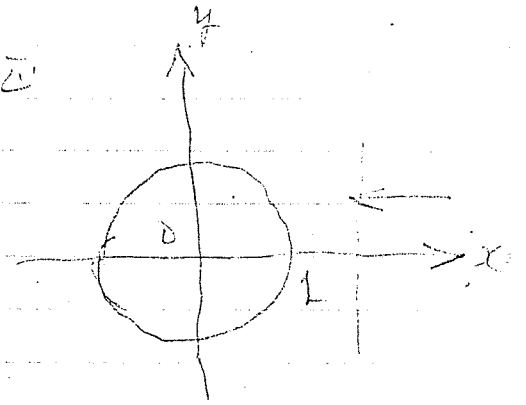
以上の関係は自由表面がある場合も、変位と力 ^{物性の異なる層があつた} の連続ならば全く同様に成立つ。

4. 円境界による平面波の散乱

入射波は一般性を失うことなく x の正

方向から来るものとし (2.9) により

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= iK e^{ikx} \\ \omega_0 &= iK e^{ikx} \end{aligned} \right\} (4.1)$$



である。

反射散乱波は明らかに

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= iK \sum_n H_n^{(2)}(Kr) \{ A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \} \\ \omega &= iK \sum_n H_n^{(2)}(kr) \{ C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \} \end{aligned} \right\} (4.2)$$

と展開出来、又入射波も同様のようになる。

$$\gamma_0 = iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta, \quad (\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1)$$

$$\omega_0 = iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos n\theta$$

まず剛体壁とすると境界条件は (2.10) である。

よって (1.10) より

(棒波の散乱についてのみ以下記す)

$$\begin{aligned}
& -i \sum_n H_n^{(2)'}(K) \{A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\} + \frac{i}{K} \sum_n n H_n^{(2)'}(K) \{-C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta\} \\
& = -i \sum_n i^n \varepsilon_n J_n'(K) \cos n\theta - \frac{i}{K} \sum_n n i^n \varepsilon_n J_n(K) \sin n\theta, \\
& -\frac{i}{K} \sum_n n H_n^{(2)'}(K) \{-A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta\} - i \sum_n H_n^{(2)'}(K) \{C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta\} \\
& = \frac{i}{K} \sum_n n i^n \varepsilon_n J_n(K) \sin n\theta - i \sum_n i^n \varepsilon_n J_n'(K) \cos n\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_n H_n^{(2)'}(K) + \frac{n}{K} H_n^{(2)'}(K) D_n = -i^n \varepsilon_n J_n'(K), \quad \left. \begin{aligned} & \cos n\theta \\ & \sin n\theta \end{aligned} \right\} \\
& -B_n H_n^{(2)'}(K) - \frac{n}{K} H_n^{(2)'}(K) C_n = -\frac{n}{K} i^n \varepsilon_n J_n(K), \quad \left. \begin{aligned} & \cos n\theta \\ & \sin n\theta \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{n}{K} A_n H_n^{(2)'}(K) - D_n H_n^{(2)'}(K) = \frac{n}{K} i^n \varepsilon_n J_n(K) \quad \left. \begin{aligned} & \cos n\theta \\ & \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (4.4) \\
& -\frac{n}{K} B_n H_n^{(2)'}(K) - C_n H_n^{(2)'}(K) = -i^n \varepsilon_n J_n'(K) \quad \left. \begin{aligned} & \cos n\theta \\ & \sin n\theta \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{よって} \quad \left. \begin{aligned} A_n + i B_n &= P_n \\ C_n + i D_n &= Q_n \end{aligned} \right\} \quad (4.5)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& -H_n^{(2)'}(K) - \frac{i n}{K} H_n^{(2)'}(K) Q_n = -i^n \varepsilon_n \left\{ J_n'(K) + \frac{i n}{K} J_n(K) \right\} \\
& + P_n \cdot \frac{n}{K} H_n^{(2)'}(K) + i H_n^{(2)'}(K) Q_n = i^n \varepsilon_n \left\{ \frac{n}{K} J_n(K) + i J_n'(K) \right\} \\
& \therefore P_n = \frac{i^n \varepsilon_n}{\Delta} \left[\left\{ J_n(K) + \frac{i n}{K} J_n'(K) \right\} H_n^{(2)'}(K) - \frac{n}{K} H_n^{(2)'}(K) \left\{ \frac{n}{K} J_n(K) + i J_n'(K) \right\} \right] \\
& Q_n = \frac{i^{n-1} \varepsilon_n}{\Delta} \left[\left\{ \frac{n}{K} J_n(K) + i J_n'(K) \right\} H_n^{(2)'}(K) - \frac{n}{K} H_n^{(2)'}(K) \left\{ J_n'(K) + \frac{i n}{K} J_n(K) \right\} \right] \\
& \Delta = H_n^{(2)'}(K) H_n^{(2)'}(K) - \frac{n^2}{K^2} H_n^{(2)'}(K) H_n^{(2)'}(K), \quad (4.6)
\end{aligned}$$

$$(1-i)\bar{T}_n'$$

$$i-1$$

No. 18

Date

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_{n-1}^{(2)} + \bar{J}_{n+1}^{(2)} &= \frac{2n}{\pi} \bar{J}_n^{(2)} \\ \bar{J}_{n-1} - \bar{J}_{n+1} &= 2 \bar{J}_n' \end{aligned} \right\}$$

互に座) 係 り ぬ る か ら

$$4\Delta = (H_{n-1}^{(2)} - H_{n+1}^{(2)})(H_{n-1}^{(2)} - H_{n+1}^{(2)}) - (H_{n-1}^{(2)} + H_{n+1}^{(2)})(H_{n-1}^{(2)} + H_{n+1}^{(2)})$$

$$= -2 [H_{n-1}^{(2)} H_{n+1}^{(2)} + H_{n-1}^{(2)} H_{n+1}^{(2)}],$$

$$P_n = \frac{i^n \varepsilon_n}{2\Delta} \left[H_{n+1}^{(2)} \left\{ (1-i) \bar{J}_n' + (i-1) \frac{\varepsilon_n}{\bar{k}_2} \bar{J}_n \right\} - H_{n+1}^{(2)} \left\{ (1+i) \bar{J}_n' + \frac{1}{\bar{k}_2} \bar{J}_n \right\} \right]$$

$$= \frac{-i^n \varepsilon_n}{2\Delta} \left[(1-i) H_{n+1}^{(2)} \bar{J}_{n+1} + (1+i) H_{n+1}^{(2)} \bar{J}_{n-1} \right]$$

$$Q_n = \frac{i^{n+1} \varepsilon_n}{2\Delta} \left[\{ (1+i) \bar{J}_{n-1} + (1-i) \bar{J}_{n+1} \} \{ H_{n-1} - H_{n+1} \} - \{ H_{n-1} + H_{n+1} \} \{ (1+i) \bar{J}_{n-1} - (1-i) \bar{J}_{n+1} \} \right]$$

$$= \frac{i^{n+1} \varepsilon_n}{2\Delta} \left[-(1+i) \bar{J}_{n-1} H_{n+1}^{(2)} + (1-i) \bar{J}_{n+1} H_{n-1}^{(2)} \right],$$

$$\Gamma(K, \varphi) = \frac{2\pi i K^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{H_n^{(2)}}{K} i^n \bar{J}_n(K) - i^n H_n^{(2)} \bar{J}_n'(K) \right\} \{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \}$$

$$= 2K \sum_{n=0}^{\infty} i^n \{ A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi \}$$

(K.7)

$$\Omega(K, \varphi) = 2K \sum_n i^n \{ C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \}$$

一方内部は均質な弾性体とすると

$$\begin{aligned} \gamma &= i k' \sum_n J_n(kr) \{ E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta \} \\ \omega &= i k' \sum_n J_n(kr) \{ G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

と展開出来るから

$$\begin{aligned} u_n &= i \sum_n \left[J_n'(kr) (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{k} J_n(kr) (-G_n \sin n\theta + H_n \cos n\theta) \right] \\ u_s &= i \sum_n \left[-\frac{n}{k} J_n(kr) (-E_n \sin n\theta + F_n \cos n\theta) \right. \\ &\quad \left. + J_n'(kr) (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta) \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{G} &= -2i \sum_n \left[+\frac{n^2}{k} J_n(kr) (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) \right. \\ &\quad \left. + n J_n'(kr) (-G_n \sin n\theta + H_n \cos n\theta) \right] \\ &\quad + \frac{2}{1-\nu} i k \sum_n J_n(kr) (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{\theta\theta}}{G} &= 2i \sum_n \left[n J_n'(kr) (-E_n \sin n\theta + F_n \cos n\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^2}{k} J_n(kr) (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta) \right] \\ &\quad + i k' \sum_n J_n(kr) (G_n \cos n\theta + H_n \sin n\theta), \end{aligned} \quad (4.10)$$

この変位 (4.9) によつて 外部領域に波を散らし、その反力
が C の外側では P_{cn}, P_{cs} となるとすると C 上でこれらは
釣り合ねばならないから

$$\left. \begin{aligned} P_{on} + P_{dn} + P_{cn} &= P_n \\ P_{os} + P_{ds} + P_{cs} &= P_s \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

さて (4.9) なる変位 による 外部の運動がやはり (4.2)
のように 展開出来る となると (4.4) と同様な式で $A_n \sim D_n$
が $E_n \sim H_n$ で表わされ それから P_n, P_s を計算して上式に
代入すると $E_n \sim H_n$ を決める方程式が得られる。

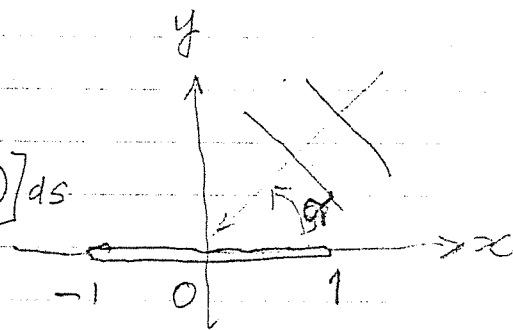
(11) 剛体としての
こゝでは一応 散乱 を考えたけれど これは最初から
考えなくとも 同じであるが その時は変位の 連続性
も条件になる。

5. 直線分境界

(2.1) により

$$\gamma(Q) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 \left[\sigma(p) H_0^{(2)}(KR) - \mu(p) \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] ds$$

(5.1)



$$\omega(Q) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 \left[\tau(p) H_0^{(2)}(KR) - \nu(p) \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] ds, \quad (5.2)$$

のように書ける。

しかし線分の上下で変位 u, v は対称性があるわけ
 少しいま単になつてはいない

u が上下で同じ

$$u_+ = u_- \quad \text{on } C$$

ならば

$$\gamma(Q) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 \sigma H_0^{(2)}(KR) ds,$$

(5.3)

$$\omega(Q) = \frac{i}{2} \int_{-1}^1 \nu \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) ds$$

また

$$v_+ = v_- \quad \text{on } C$$

$$\gamma(Q) = \frac{i}{2} \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) ds,$$

(5.4)

$$\omega(Q) = \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 \tau H_0^{(2)}(KR) ds,$$

と175110.

この後の場合について考えると (1.6) により

$$u_+ = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \tau = -u_-$$

$$v = -\frac{i}{2k^2} \int_{-1}^1 u \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} H_0^{(2)}(k|x-x'|) dx,$$

$$+ \frac{k}{2k^2 - i0} \int_{-1}^1 \tau H_0^{(2)}(k|x-x'|) dx,$$

(5.5)

のような ^{微分} 積分方程式を得、これをとけばよい。

これはマシウ関数に展開すれば容易にとける。

しかしこの散乱ではやはり (5.1), (5.2) の表現を扱かわねばならない。

波の強制力のみを問題にするならば 相対速度

により (5.3) または (5.4) によって 発散波の振幅を

計算すればよい。

(2.3) により 発散波の振幅は (5.3) の場合は

$$P(k, \varphi) = 2 \int_{-1}^1 e^{ikx \cos \varphi} dx,$$

$$P(k, \varphi) = 2ik \sin \varphi \int_{-1}^1 x e^{ikx \cos \varphi} dx,$$

(5.6)

以下に一般に

$$I = \int_{-1}^1 f(x) e^{ipx} dx \quad (5.7)$$

なる場合において

$$f(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + p^2 \right) h(x), \quad \dots (5.8)$$

とくと、部分積分によって

$$h(\pm 1) = \frac{d}{dx} h(\pm 1) = 0 \quad (5.9)$$

ならば

$$I = 0 \quad (5.10)$$

となることは容易にわかる。

それ故 (5.6) においても σ および λ が

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \cos^2 \varphi \right) A(x) \\ \lambda &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \sin^2 \varphi \right) B(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

のように表わされ、(5.9) の条件を満たす関数

A, B によって表わされるならば P と Q は 0 と

なり、 λ の強制力はない。

(5.11) は 零振動の非斉次方程式であるから
与えられた σ, λ に対して 唯一の解を有するから
(5.9) の 4 つの境界条件を満たす事は出来る。

又 (5.11) を (5.3) に代入して 部分積分すると

$$\begin{aligned} \gamma(Q) &= \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 A(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \cos^2 \varphi \right] H_0^{(2)}(kR) dx, \\ \omega(Q) &= \frac{i}{2} \int_{-1}^1 B(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \cos^2 \varphi \right] \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) dx, \end{aligned} \quad (5.12)$$

とあるが この 核関数は 丁度 φ の方向の波が
なくなる (Wave-free Kernel) ので この形
に書けば A, B に 対し (5.9) の条件は もはや不要
である。

さて 今

$$\begin{aligned} \gamma_0(Q) &= \frac{1}{2i} \int_{-1}^1 A(x) H_0^{(2)}(kR) dx, \\ \omega_0(Q) &= \frac{i}{2} \int_{-1}^1 B(x) \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) dx, \end{aligned} \quad (5.13)$$

よって

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ v_0 &= f(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{for } |x| \leq 1 \quad (5.14)$$

であることが 1 よう。

(5.12) から

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

また

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

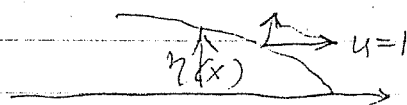
と置くので (5.14) より

$$\left. \begin{aligned} u &= -K^2 \cos^2 \varphi \\ v &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + K^2 \cos^2 \varphi \right) f(x), \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

となる。

ここで (5.14) の境界条件は 近似的に

オフセットが $\eta(x)$ なる物体本から



x 方向に 重力 場合 本当は $v=0$ であるから

$$v = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (5.18)$$

と考
えれば

$$f(x) = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

となり, 従って (5.17) の条件になる物体形状は

$$\eta(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + K^2 \cos^2 \varphi \right) \eta_0(x), \quad (5.19)$$

逆に

$$\eta_0(x) = (1-x^2), \quad (5.20)$$

ならば

$$\eta(x) = K^2 \cos^2 \varphi (1-x^2) - 2,$$

となる。

6. 時向領域の挙動

以上の所論はすべて周は数領域で考えているので
以下時向領域での挙動との変換について考えて
おこう

さて時向領域での変数を今 $f(x, y, t)$
とするとフーリエ変換して周は数領域では

$$\bar{F}(x, y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (6.1)$$

となつてゐるとすると逆に時向領域では

$$f(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.2)$$

これを代入せば (2.1) のような表現はすべて

$$g(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.3)$$

$$g(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.4)$$

のように表わされるから f, g を使つて

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega(t-t')} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t') g(x, y, t-t') dt', \quad (6.5) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{特に } H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c}R\right) = \frac{2i}{\pi} \int_{\frac{R}{c}}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dt, \quad (6.6)$$

これから

$$G(R, \omega) = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{c}R\right), \quad (6.7)$$

とかくと

$$\begin{aligned} G(R, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{R}{c}}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{t^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dt, \\ g(R, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{t^2 - R^2/c^2}}, & \text{for } t > \frac{R}{c} \\ 0 & \text{for } t < \frac{R}{c} \end{cases} \quad (6.8) \end{aligned}$$

したがって (6.5) は

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{f(x, y, t') dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - R^2/c^2}}, \quad (6.9)$$

例として (2.1) は

$$\gamma(Q, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(Q, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.10)$$

とすると

$$\gamma(Q, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt' \int_C \left\{ \frac{\partial \gamma(P, t')}{\partial n} \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2 - R^2/c^2}} - \gamma(P, t') \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{1}{\sqrt{(t-t')^2 - R^2/c^2}} \right\} ds, \quad (6.11)$$

すなわち $k = \omega/c$,

但し C は今時刻に位置後なく不動とする。

一方 γ を (A.3) のように表現出来るとする。

$$\gamma(x, y, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(p) e^{i(p x + q y)} dp, \quad q = \sqrt{k^2 - p^2} \quad (6.12)$$

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, y, \omega) e^{-i(p x + q y)} dx, \quad$$

(2.1) と (A.5) より

$$G(p) = \frac{1}{2i\sqrt{k^2 - p^2}} \int_C \left[\frac{\partial}{\partial n} \gamma(P, \omega) e^{-i(p x + q y)} - \gamma(P, \omega) \frac{\partial}{\partial n} e^{-i(p x + q y)} \right] ds$$

$$= \frac{1}{2i\sqrt{k^2 - p^2}} P(\omega, p), \quad (6.13)$$

$$P(\omega, p) = \int_C \left(\frac{\partial \gamma(P, \omega)}{\partial n} e^{-i(p x + \sqrt{k^2 - p^2} y)} - \gamma(P, \omega) \frac{\partial}{\partial n} e^{-i(p x + \sqrt{k^2 - p^2} y)} \right) ds, \quad (6.14)$$

つまり

$$\gamma(x, y, \omega) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, p) e^{\frac{i(p x + \beta y)}{\sqrt{k^2 - p^2}}} dp \quad (6.15)$$

$$\gamma(x, y, t) = \frac{1}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, p) e^{\frac{i(p x + \beta y + \omega t)}{\sqrt{k^2 - p^2}}} dp \quad (6.16)$$

Cから留められた γ ではこれから定常点法により漸近値を求める事が出来る。

あるいは又 (2.4) から直接

$$\gamma(x, y, t) = \frac{1}{4\pi \sqrt{2\pi i} r'} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega r'}{c} + i\omega t} P\left(\frac{\omega}{c}, \varphi'\right) \frac{d\omega}{\sqrt{\omega/c}}, \quad (6.17)$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t - \frac{r'}{c})} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega/c}} = \frac{2\sqrt{\pi i c}}{\sqrt{t - \frac{r'}{c}}} & \text{for } t > \frac{r'}{c} \\ 0 & \text{for } t < \frac{r'}{c} \end{cases} \quad (6.18)$$

であるから (6.17) は (6.11) に近似的に等しい。

さて $P(\frac{\omega}{c}, \varphi')$ が ω についてゆるやかな変化をするならば $\gamma(t)$ は振動しながら平均的に変化する。

あるいは $\gamma(t)$ が振動するのは C 上で $\gamma(t)$ が振動し始めて Γ が ω 軸上に pole を有する場合である。

逆に $\gamma(x, y, z)$ をフーリエ変換すれば (2.4) により
 $P(\frac{\omega}{c}, \varphi')$ がわかるがそれ以上の事はわからない。
 しかし ω が充分大をければ

$$P(\frac{\omega}{c}, \varphi') \rightarrow \int_C \frac{\partial \gamma(\omega)}{\partial n} ds + i \frac{\omega}{c} \int_C \left[\frac{\partial \gamma(\omega)}{\partial n} (x \cos \varphi' + y \sin \varphi') - \gamma(\omega) \frac{\partial}{\partial n} (x \cos \varphi' + y \sin \varphi') \right] ds$$

4

(6.19)

のように近似出来る。

附録 A 自由表面のある場合 (A)

1) のように $y=0$ が自由面としよう。

この条件は、(1.9) より

$$\omega + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{2\omega}{1-\nu} \gamma - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 0$$

(A.1)

領域内の特異点は

$$\begin{aligned} \gamma_s &= -H_0^{(2)}(kR) \\ \omega_s &= -H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \left\{ R^2 = x^2 + (y-a)^2, \quad (A.2) \right.$$

を"だけ"としよう。

上半面で"正"側面

これに γ_a, ω_a を加えて (A.1) を満たす工夫を

すればよい。

さて γ, ω は (1.4) を満たす故、

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(p) e^{i(p x + \sqrt{k^2 - p^2} y)} dp$$

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} G(p) e^{i(p x + \sqrt{k^2 - p^2} y)} dp$$

(A.3)

のように表現出来る。

あるいは逆変換して

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{k^2-p^2}y} \overline{F}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y) e^{-ipx} dx \\ e^{i\sqrt{k^2-p^2}y} \overline{G}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(x, y) e^{-ipx} dx \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{--- (A.4)} \\ \text{--- (A.5)} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{2.12} \quad \sqrt{k^2-p^2} &= i\sqrt{p^2-k^2} \quad \text{for } |p| > k \\ \sqrt{k^2-p^2} &= i\sqrt{p^2-k^2} \quad \text{for } |p| > k \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } y > 0 \\ \text{for } y < 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(-kR) e^{-ipx} dx &= \begin{cases} \frac{2e^{-i\sqrt{k^2-p^2}(y-a)}}{\sqrt{k^2-p^2}} & \text{for } k > |p| \\ \frac{2ie^{-\sqrt{p^2-k^2}(y-a)}}{\sqrt{p^2-k^2}} & \text{for } k < |p| \end{cases} \quad \text{(A.5)} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \overline{F}_s(p) &= \frac{-2}{\sqrt{k^2-p^2}} e^{+ia\sqrt{k^2-p^2}} \\ \overline{G}_s(p) &= \frac{-2}{\sqrt{k^2-p^2}} e^{+ia\sqrt{k^2-p^2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{--- (A.6)} \end{array} \right\}$$

本論文の中には上に定めたようにとるものとする。

(A.1) をフーリエ変換すれば

$$\begin{aligned} \left\{ 1 - \frac{2}{k^2}(k^2-p^2) \right\} \overline{F}_s + \frac{2}{k^2} \overline{G}_s \sqrt{k^2-p^2} \\ = - \left\{ 1 - \frac{2}{k^2}(k^2-p^2) \right\} \overline{F}_s + \frac{2}{k^2} \overline{G}_s \sqrt{k^2-p^2} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{2D}{1-D} + \frac{2}{K^2} (K^2 - p^2) \right\} G_a + \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} F_a \\ & = - \left\{ \frac{h^2}{K^2} - \frac{2p^2}{K^2} \right\} G_s + \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} F_s \equiv B \end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

$$\left. \begin{aligned} G_a &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} A - \left(\frac{2p^2}{h^2} - 1 \right) B \right\}, \\ F_a &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{2p^2 - h^2}{K^2} A + \frac{2}{K^2} p \sqrt{K^2 - p^2} B \right\}, \\ \Delta &= \frac{4p^2}{h^2 K^2} \sqrt{K^2 - p^2} \sqrt{h^2 - p^2} + \frac{1}{h^2 K^2} (2p^2 - h^2)^2, \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta G_a &= \left\{ \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} \left\{ + \frac{(h^2 - 2p^2)}{h^2} F_s + \frac{2}{K^2} p \sqrt{K^2 - p^2} G_s \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h^2} (2p^2 - h^2) \left\{ \frac{(2p^2 - h^2)}{K^2} G_s + \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} F_s \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h^2 K^2} \left\{ 4p^2 \sqrt{h^2 - p^2} \sqrt{K^2 - p^2} - (2p^2 - h^2)^2 \right\} G_s \\ &\quad + \frac{4}{h^2 K^2} p \sqrt{h^2 - p^2} (h^2 - 2p^2) F_s, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_a &= \frac{2p^2 - h^2}{K^2} \left\{ \frac{(h^2 - 2p^2)}{h^2} F_s + \frac{2}{K^2} p \sqrt{K^2 - p^2} G_s \right\} \\ &\quad + \frac{2}{K^2} p \sqrt{K^2 - p^2} \left\{ \frac{(2p^2 - h^2)}{K^2} G_s + \frac{2}{h^2} p \sqrt{h^2 - p^2} F_s \right\} \\ &= \frac{1}{h^2 K^2} \left\{ 4p^2 \sqrt{h^2 - p^2} \sqrt{K^2 - p^2} - (2p^2 - h^2)^2 \right\} F_s \\ &\quad + \frac{4p}{K^2} \sqrt{K^2 - p^2} (2p^2 - h^2) G_s, \end{aligned} \right\} \quad (A.9)$$

附録 C に示すように Δ は $(h^2 =)$ 変数としてこの
唯一の実根を有する。 (3次方程式となり)

このようにして 縦波 (横波) は 自由表面で反射して 横波 (縦波) を 発生させる。

そこで あらためて 最初 (A.2) のどちらか 1つ あいまいな場合 を考え.

$$\left. \begin{aligned} S_y &= H_0^{(2)}(kR) + I_1 + I_2, \\ S_\infty &= H_0^{(2)}(kR) + J_1 + J_2, \end{aligned} \right\} \dots (A.10)$$

$$I_1 = \frac{+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta R^2 k^2} \left\{ (2p^2 - R^2)^2 - 4p^2 \sqrt{R^2 - p^2} \sqrt{K^2 - p^2} \right\} \frac{dp}{\sqrt{K^2 - p^2}} \times e^{ipx + i\sqrt{K^2 - p^2}(y+a)}$$

$$I_2 = -\frac{4}{\pi k^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(2p^2 - R^2)}{\Delta} e^{ipx + i\sqrt{R^2 - p^2}y + i\sqrt{K^2 - p^2}a} dp, \quad (A.11)$$

$$J_1 = \frac{1}{\pi R^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \left\{ (2p^2 - R^2)^2 - 4p^2 \sqrt{R^2 - p^2} \sqrt{K^2 - p^2} \right\} \frac{e^{ipx + i\sqrt{R^2 - p^2}y + i\sqrt{K^2 - p^2}a}}{\sqrt{R^2 - p^2}} dp,$$

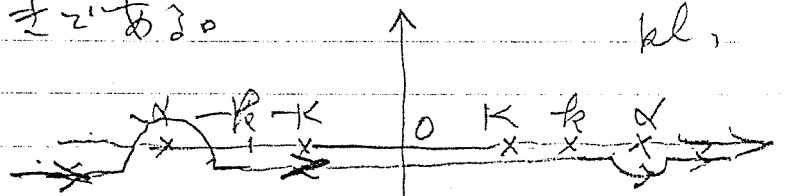
$$J_2 = -\frac{4}{\pi R^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(2p^2 - R^2)}{\Delta} e^{ipx + i(\sqrt{K^2 - p^2}y + \sqrt{R^2 - p^2}a)} dp. \quad (A.12)$$

これらの積分は 附録 C に より $p = \pm \alpha$ に pole を有し, I_1, I_2 ではさらに $p = \pm K, \pm k$ は分岐点を有する。

今は $p > k$ の時 $\sqrt{k^2 - p^2} = i\sqrt{p^2 - k^2}$ と決めていたので

は $\frac{x > 0$ の x の正の方向に進むものとする p -plane の積分

路は 1 図のように決めるべきである。



そこでこれらの積分は次のように書く事も出来る。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{k^2}{\pi K^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(2K^2 \sin^2 \theta - 1 \right)^2 - 4 \frac{K^2}{k^2} \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{k^2}{K^2} - \sin^2 \theta} \right\} d\theta \times \\
 &\quad \times e^{iKx \sin \theta + iK(y+a) \cos \theta} \\
 &+ \frac{2k^2}{\pi K^2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(\frac{2K^2}{k^2} \operatorname{ch}^2 u - 1 \right)^2 + 4 \frac{K^2}{k^2} \operatorname{ch}^2 u \operatorname{sh} u \sqrt{\frac{k^2}{K^2} - \operatorname{ch}^2 u} \right\} du \times \\
 &\quad \times e^{-K(y+a) \operatorname{sh} u} \cos(K) \operatorname{ch} u, \quad (A.13)
 \end{aligned}$$

$x, y \gg 1$ の時の漸近値を求めるために定常点法を
使おう。

I_1, J_1 は泡の形である。 $(I_2, J_2$ も $y=0$ とすれば同じ)

$$I = \int \bar{H}(p) e^{if(p)} dp, \quad (A.14)$$

$$f(p) = px + \int_0^y y, \quad g = \sqrt{k^2 p^2}$$

定常点法

$$f'(p) = x + \frac{p}{g} y = 0$$

$$\therefore p_0 = \frac{Kx}{r}, \quad g_0 = \frac{Ky}{r} \leq K$$

$$f(p_0) = Kr$$

$$f''(p) = -\frac{y}{g} - \frac{p^2}{g^3} y = -\frac{K^2 y}{g^3} \bigg|_{g=g_0} = -\frac{r^3}{Ky^2} \equiv -\alpha$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \bar{H}(p_0) e^{iKr} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i\alpha}{2} u^2} du = \sqrt{\frac{2\pi}{i\alpha}} \bar{H}(p_0) e^{iKr} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi K}{r^3}} y \bar{H}(p_0) e^{iKr - \frac{\pi}{4} i} \quad (A.15) \end{aligned}$$

$$\text{また } \Delta \bigg|_{p=\frac{Kx}{r}} = \frac{K^2}{K^2} \left\{ (1-\nu) \frac{x^2}{r^2} - 1 \right\}^2 + \frac{4K}{K^2} \frac{x^2}{r^2} \frac{y}{r} \sqrt{K^2 - \frac{K^2 x^2}{r^2}}$$

$$= \frac{K^2}{K^2} \left(\frac{2x^2 + y^2}{r^2} \right)^2 + \frac{4K}{K^2} \frac{x^2 y}{r^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2r^2} (1-\nu)},$$

$$\Delta \bigg|_{p=\frac{Kx}{r}} = \frac{K^2}{K^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right)^2 + \frac{K^2 4i}{K^2} \frac{x^2 y}{r^3} \sqrt{\frac{x^2}{r^2} - \frac{1-\nu}{2}}$$

$x \gg 1$, $a \neq 0$ の時は以上の値の他に α の $\pm$ の留数分を
考えればよいから.

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi K r}} e^{i(Kr - \frac{\pi}{4})} \frac{\left(\frac{\nu x^2 + a^2}{r^2}\right)^2 + 4\left(\frac{K}{r}\right)^3 \frac{x^2 a}{r^3} \sqrt{1 - \frac{(1-\nu)}{2} x^2}}{\left(\frac{\nu x^2 + a^2}{r^2}\right)^2 + 4\left(\frac{K}{r}\right)^3 \frac{x^2 a}{r^3} \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2} x^2}} + \frac{A_1(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - K^2}} e^{i\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - K^2} a}, \quad r = \sqrt{x^2 + a^2} \quad (A.16)$$

$$A_1(\alpha) = \lim_{p \rightarrow \alpha} \frac{(p - \alpha)}{\Delta} \frac{1}{R^2 = K} \left[(2p^2 - R^2)^2 + 4p^2 \sqrt{p^2 - R^2} \sqrt{p^2 - K^2} \right]$$

$$I_2 = - \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi K}{r^3}} \frac{a K r \frac{x}{r} \left(\frac{2K^2 x^2}{r^2} - R^2 \right) \cdot e^{i(Kr - \frac{\pi}{4})}}{K^3 \left[\frac{R^2}{K^2} \left(\frac{\nu x^2 + a^2}{r^2} \right)^2 + \frac{4K}{r^2} \frac{x^2 a}{r^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2r^2} (1-\nu)} \right]} - \frac{4i}{K^4} A_2 e^{i\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - K^2} a}. \quad (A.17)$$

$$A_2(\alpha) = \lim_{p \rightarrow \alpha} \frac{(p - \alpha)}{\Delta} p (2p^2 - R^2)$$

附録 B 変位の表現 (Cruse & Rizzo)

(2.1) と ω に対する同様の表現から 変位の表現を導こう。

さて (2.1) において, (1.6) ~ (1.9) の関係式を代入すれば

$$\gamma \frac{\partial H}{\partial n} = \gamma \frac{\partial X}{\partial n} H_x + \gamma \frac{\partial Y}{\partial n} H_y$$

($H \equiv \frac{H_0^{(2)}}{4L}(KR)$), suffix は 微分を意味するとする。

$$\gamma \frac{\partial X}{\partial n} = \frac{1-\nu}{2} \left[p + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + \omega \frac{\partial Y}{\partial s} \right]$$

$$\gamma \frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{1-\nu}{2} \left[q - 2 \frac{\partial u}{\partial s} - \omega \frac{\partial X}{\partial s} \right]$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - K^2 (u \frac{\partial X}{\partial n} + v \frac{\partial Y}{\partial n})$$

$$\gamma \frac{\partial H}{\partial n} = \frac{1-\nu}{2} \left[p H_x + q H_y + 2(v_s H_x - u_s H_y) - \omega H_s \right]$$

$$\gamma = - \frac{1-\nu}{2} \int_C [p H_x + q H_y] ds$$

$$+ \int_C \left[-K^2 (u \frac{\partial X}{\partial n} + v \frac{\partial Y}{\partial n}) H + (1-\nu) (v H_{xs} - u H_{ys}) \right] ds$$

$$H_{ys} = x_s H_{yx} + y_s H_{yy}, H_{xs} = H_{xx} x_s + H_{xy} y_s$$

$$\gamma = - \frac{1-\nu}{2} \int_C [p H_x + q H_y] ds$$

$$+ \int_C \left[-u \left\{ K^2 \frac{\partial X}{\partial n} H - (1-\nu) H_{ys} \right\} + v \left\{ -K^2 \frac{\partial Y}{\partial n} H + (1-\nu) H_{xs} \right\} \right] ds$$

... (B.1)

1. 同様に $n=1$ の場合

$$\omega \frac{\partial}{\partial n} H' = \omega x_n H'_x + \omega y_n H'_y$$

$$\omega x_n = g - 2 u_s - \frac{2}{1-\nu} \gamma y_n$$

$$\omega y_n = -p - 2 v_s + \frac{2}{1-\nu} \gamma x_n$$

$$\omega \frac{\partial}{\partial n} H' = g H'_x - p H'_y - 2(u_s H'_x + v_s H'_y) + \frac{2}{1-\nu} \gamma H'_s$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = -k^2(u x_s + v y_s) - \frac{2}{1-\nu} \gamma_s$$

$$\therefore \omega = + \int_C (p H'_y - g H'_x) ds$$

$$- \int_C [u \{k^2 x_s H' + 2 H'_{xs}\} + v \{k^2 y_s H' + 2 H'_{ys}\}] ds, \quad (B.2)$$

次に

$$u = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x'} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y'}$$

$$= \int_C [p U^{(1)} + g V^{(1)} - u P^{(1)} - v Q^{(1)}] ds, \quad (B.3)$$

$$v = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y'} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x'}$$

$$= \int_C [p U^{(2)} + g V^{(2)} - u P^{(2)} - v Q^{(2)}] ds, \quad (B.4)$$

と書けば

$$U^{(1)} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} H_0^{(12)}(KR) \right]$$

$$= \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(12)}(KR) \right],$$

$$V^{(1)} = \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[H_0^{(12)}(KR) - H_0^{(21)}(KR) \right] \right],$$

$$P^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x'} H_0^{(12)}(KR) \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x' \partial y \partial s} H_0^{(12)}(KR)$$

$$- \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y'} H_0^{(12)}(KR) + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial y' \partial x \partial s} H_0^{(12)}(KR)$$

$$= - \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) - \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR)$$

$$+ \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \left\{ H_0^{(12)}(KR) + H_0^{(21)}(KR) \right\},$$

$$Q^{(1)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x'} H_0^{(12)}(KR) - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial x'} H_0^{(12)}(KR)$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y'} H_0^{(12)}(KR) - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y \partial y'} H_0^{(12)}(KR)$$

$$= + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR)$$

$$+ \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[- \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(12)}(KR) \right],$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x'} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(KR) \right],$$

$$P^{(2)} = -\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} H_0^{(2)}(KR) + \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y \partial y'} H_0^{(2)}(KR)$$

$$- \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x'} H_0^{(2)}(KR) - \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial x'} H_0^{(2)}(KR)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR)$$

$$- \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(KR) \right],$$

$$Q^{(2)} = \left(-\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y'} \right) H_0^{(2)}(KR)$$

$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y \partial x'} \right) H_0^{(2)}(KR)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR)$$

$$- \frac{2}{\hbar^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR) \right],$$

C. 自由表面を進行する波

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A e^{i(kx + \omega y)} & \omega &= \sqrt{k^2 - p^2} \\ \omega &= B e^{i(p x + \omega' y)} & \omega' &= \sqrt{k^2 - p^2} \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

自由表面の条件を満たすには

$$\Delta = \frac{1}{k^2 k^2} \left[(2p^2 - k^2)^2 + 4p^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{k^2 - p^2} \right] = 0 \quad (C.2)$$

なければならぬ。

今 $\left(\frac{p}{k}\right)^2 = x$ とおくと上式は

$$(2x - 1)^2 = 16x^2 \left(\frac{1}{2} - x\right)(1 - x),$$

これを整理すると

$$x^3 - x^2 \left(1 + \frac{1}{1+\nu}\right) + \frac{x}{1+\nu} - \frac{1}{8(1+\nu)} = 0, \quad (C.3)$$

平面応力問題とすると ポアソン比 $\nu = \frac{1}{2}$ とする

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma}$$

と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} \text{ として } \nu = \frac{1}{2}, \frac{k^2}{k^2} = \frac{1}{4} \\ \sigma &= \frac{1}{4} \text{ として } \nu = \frac{1}{3}, \frac{k^2}{k^2} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (C.4)$$

である。

これは

ν	σ	x_1	x_2	x_3	$\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$	$\arg(x_2)$	$A(x_1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1.150	1.258 + 0.075i	1.258 + 0.075i	1.519	16.1°	25.95
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	1.1830	1.3170	1.2500	—	—	26.08

$\nu = 1/4$ のとき実根が3つあるから x_2, x_3 を (C.2) に代入するとわかるようにこれは $\Delta \neq 0$ となりこれは $\Delta = 0$ の根ではない。

$\nu = 1/3$ のとき x_2, x_3 は $\Delta = 0$ の根ではない。

これは

$$(2p^2 - k^2)^2 - 4p^2 \sqrt{k^2 - p^2} \sqrt{k^2 - p^2} = 0 \quad (\text{C.5})$$

となる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{1-\nu} \left[(2x-1)^2 + 4x\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x} \sqrt{1-x} \right] \\ &= \frac{2}{1-\nu} (x-x_1) A(x_1), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} A(x_1) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(2x-1)^2 + 4x\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x} \sqrt{1-x} \right] \\ &= 2(2x-1) + 4\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x} \sqrt{1-x} \\ &\quad - \frac{2x\sqrt{1-x}}{\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x}} - \frac{2x\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x}}{\sqrt{1-x}} \\ &= 8x-4 + \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x}} \left[2\left(\frac{1-\nu}{2}-x\right)(1-x) - x(1-x) - x\left(\frac{1-\nu}{2}-x\right) \right] \\ &= 8x-4 + \frac{2}{\sqrt{1-x}\sqrt{\frac{1-\nu}{2}-x}} \left[1-\nu - 3\left(1+\frac{1-\nu}{2}\right)x \right] \\ &= 4(2x-1) - \frac{8x}{(2x-1)^2} \left[1-\nu - 3\left(1+\frac{1-\nu}{2}\right)x \right], \end{aligned} \quad (\text{C.6'})$$

D. 3次元表面波

複素表示による変位ベクトルは

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \text{curl } \mathbf{A} \quad (\text{D.1})$$

$$\Theta = \text{div. } \mathbf{u} = \Delta \phi \quad (\text{D.2})$$

$$\Omega = \text{curl } \mathbf{u} = \text{curl curl } \mathbf{A} \quad (\text{D.3})$$

$$(\Delta + k^2)\phi = 0, \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}} \quad (\text{D.4}) \quad \left| \frac{k^2}{\rho} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right.$$

$$(\Delta + k^2)\mathbf{A} = 0, \quad k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \quad (\text{D.5}) \quad \left| = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \right.$$

$$\mathbf{A} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$$

自由表面を $z=0$ とし, 物質は $z > 0$ にあるとする。

その条件は

$$2 \sum_{j=1}^3 e_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \Theta \frac{\partial x_i}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (\text{D.6}) \quad i=1, 2, 3$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} 2e_{13} &= 0, \quad 2e_{23} = 0 \\ 2e_{33} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \Theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.6'})$$

$$\begin{aligned} 2e_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_2 \\ 2e_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_1 - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \\ 2e_{33} &= 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \end{aligned}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}$$

(D.1')

(D.6') は

$$-\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} \psi_1 - \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} \psi_2 + \frac{\partial^3}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi_3 = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2 \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) \psi_1$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] \psi_2 = 0$$

(D.7)

$$-\frac{K^2}{1-2\nu} \phi + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\omega_3 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x}$$

$$\omega_1 = \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad \text{curl } A = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

(D.8)

と $\partial_1 < \partial_2$ (D.7) は

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \omega_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \omega_2 = -\frac{\partial}{\partial z} \Omega_3 = 0$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \omega_3 = 0$$

$$-\frac{\nu K^2}{1-2\nu} \phi + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \omega_3 = 0$$

(D.9)

ω_i, Ω_i は (1.5) を満足する。

Ω_3 に関する条件は鏡像を"とれ"と示す。

そこで基本特異性は

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \text{ for } \Omega \text{ or } \frac{e^{-ikR}}{R} \text{ for } \phi \quad (D.10)$$

つまり Sommerfeld の積分は

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikR}}{R} &= \int_0^\infty J_0(\tau r) e^{\frac{-|\tau| \sqrt{\tau^2 - k^2}}{\sqrt{\tau^2 - k^2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(px+qy+rz)}}{\sqrt{p^2+q^2-k^2}} dp dq, \quad r = \sqrt{k^2 - p^2 - q^2}, \quad (D.11) \end{aligned}$$

$$(D.12) \quad \sqrt{p^2+q^2-k^2} = +i \sqrt{k^2 - p^2 - q^2} \text{ ととる } \pm \text{ のとする。}$$

つまりから

$$\left. \begin{aligned} \phi &= A e^{-i(px+qy+r'z)}, \quad r' = \sqrt{k^2 - p^2 - q^2} \\ \omega_3 &= B e^{-i(px+qy+r'z)}, \quad r = \sqrt{k^2 - p^2 - q^2} \end{aligned} \right\} (D.12)$$

12つあり、考えておけばよい。

これを (D.9) の 3 式の 2 式 に代入すると

$$\left. \begin{aligned} & 2i(p^2 + q^2)r' A + (p^2 + q^2 - r^2)B = 0 \\ & \left\{ -\frac{2}{1-2\nu} K^2 - 2r'^2 \right\} A' - 2i r B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (D.13)$$

今 $p^2 + q^2 = \tau^2$ とおけば、特別な方程式は

$$\Delta = \left\{ -\frac{2}{1-2\nu} K^2 + 2(K^2 - \tau^2) \right\} \{ 2\tau^2 - R^2 \} - 4\tau^2 r r' = 0, \quad (D.14)$$

$$r = \sqrt{R^2 - \tau^2}, \quad r' = \sqrt{K^2 - \tau^2}.$$

$$(2\tau^2 - R^2)^2 = 4\tau^2 \sqrt{\tau^2 - R^2} \sqrt{K^2 - \tau^2}, \quad \dots (D.15)$$

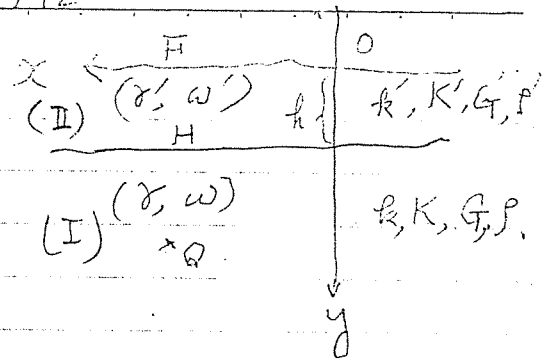
となるので、二次元的な場合と同じになる。

E. 自由表面の下に境界層のある場合

$$H_0^{(2)}(kR) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-x')} \frac{dp}{g}, \quad \dots (E.1)$$

$$g = \sqrt{p^2 - k^2}, \quad g' = \sqrt{p^2 - k'^2}.$$

ただし (2.1) のように



$$\chi(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx' \pm ig'y'} G_{\pm}^{\pm}(p) \frac{dp}{g}, \quad \left. \begin{array}{l} + \text{sgn for } y \geq y' \\ - \text{sgn for } y < y' \end{array} \right\} (E.2)$$

$$G_{\pm}^{\pm}(p) = \int_C \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} e^{ipx \mp ig'y} - \gamma \frac{\partial}{\partial n} e^{ipx \mp ig'y} \right) ds, \quad (E.3)$$

$$\omega(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx' \pm ig'y'} H_{\pm}^{\pm}(p) \frac{dp}{g}, \quad (E.4)$$

$$H_{\pm}^{\pm}(p) = \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} e^{ipx \mp ig'y} - \omega \frac{\partial}{\partial n} e^{ipx \mp ig'y} \right) ds, \quad (E.5)$$

層(I) では

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_a, \quad \omega = \omega_s + \omega_a \quad (E.6)$$

と γ_s, ω_s は 点 Q に特異性を有し, γ_a, ω_a

は (I) 全体で正則とする。

($y = h$ 以上) では,

$$\gamma_s(p) = \frac{i}{4\pi} \int \left\{ \frac{G_s}{g} e^{-\frac{\gamma y'}{g}} - \frac{H_s}{g} e^{-\frac{\gamma y'}{g}} \right\} e^{-ipx} dp, \quad y' \geq h \quad (E.7)$$

$$\left. \begin{matrix} \gamma_a(p) \\ \omega_a(p) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} G_a \frac{e^{+iy}}{\delta} \\ H_a \frac{e^{iy}}{\delta} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp, \quad (E.8)$$

($-l \leq y' < y$)

$2 \leq y \leq l$ のときは

$$\gamma' = \gamma_s' + \gamma_a', \quad \omega' = \omega_s' + \omega_a', \quad (E.8)$$

$$\left. \begin{matrix} \gamma_s' \\ \omega_s' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_s' \frac{e^{-\gamma y}}{\delta} \\ H_s' \frac{e^{-\gamma y}}{\delta} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp, \quad y < -l, \quad (E.9)$$

$$\left. \begin{matrix} \gamma_a' \\ \omega_a' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_a' \frac{e^{+iy}}{\delta} \\ H_a' \frac{e^{iy}}{\delta} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp, \quad y > 0, \quad (E.10)$$

$l = -l$ のときは

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{1}{k'^2} \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{1}{k'^2} \frac{\partial \gamma'}{\partial x} \\ v &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} = -\frac{1}{k'^2} \frac{\partial \omega'}{\partial x} - \frac{1}{k'^2} \frac{\partial \gamma'}{\partial y} \end{aligned} \quad (E.11)$$

$$p = G \left(\omega + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right) = G' \left(\omega' + \frac{1}{k'^2} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y^2} - \frac{2}{k'^2} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial x \partial y} \right) \quad (E.12)$$

$$q = G \left(\frac{2\gamma}{1-\nu} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) = G' \left(\frac{2\gamma'}{1-\nu'} - \frac{2}{k'^2} \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial y^2} - \frac{2}{k'^2} \frac{\partial^2 \omega'}{\partial x \partial y} \right)$$

又 $q=0$ の時 (E.12) の左辺が 0 となる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R^2} \left(-F_s e^{-\frac{q}{2}h} + F_a e^{\frac{q}{2}h} \right) + \frac{ip}{K^2 R} \left(G_s e^{-\frac{q}{2}h} + G_a e^{\frac{q}{2}h} \right) \\
 &= \frac{1}{R^2} \left(-F'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + F'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) + \frac{ip}{K'^2 R'} \left(G'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + G'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) \\
 &+ \frac{ip}{R^2 q} \left(F_s e^{-\frac{q}{2}h} + F_a e^{\frac{q}{2}h} \right) + \frac{1}{K^2} \left(G_s e^{-\frac{q}{2}h} - G_a e^{\frac{q}{2}h} \right) \quad (E.13) \\
 &= \frac{ip}{q R^2} \left(F'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + F'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) + \frac{1}{K'^2} \left(G'_s e^{-\frac{q'}{2}h} - G'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & G \left[\frac{1}{q} \left(1 + \frac{2q^2}{R^2} \right) \left(F_s e^{-\frac{q}{2}h} + F_a e^{\frac{q}{2}h} \right) + \frac{2ip}{K^2} \left(-G_s e^{-\frac{q}{2}h} + G_a e^{\frac{q}{2}h} \right) \right] \\
 &= G' \left[\frac{1}{q'} \left(1 + \frac{2q'^2}{R'^2} \right) \left(F'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + F'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) + \frac{2ip}{K'^2} \left(-G'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + G'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) \right] \quad (E.14) \\
 & G \left[\frac{1}{r} \left(\frac{2r}{1-r} - \frac{2r^2}{K^2} \right) \left(F_s e^{-\frac{q}{2}h} + G_a e^{\frac{q}{2}h} \right) + \frac{2ip}{R^2} \left(-F_s e^{-\frac{q}{2}h} + F_a e^{\frac{q}{2}h} \right) \right] \\
 &= G' \left[\frac{1}{r'} \left(\frac{2r'}{1-r'} - \frac{2r'^2}{K'^2} \right) \left(G'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + G'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) + \frac{2ip}{R'^2} \left(-F'_s e^{-\frac{q'}{2}h} + F'_a e^{\frac{q'}{2}h} \right) \right] \\
 & \quad q^2 = p^2 - R^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{q'} \left(1 + \frac{2q'^2}{R'^2} \right) (F'_s + F'_a) + \frac{2ip}{K'^2} (-G'_s + G'_a) = 0 \quad (E.15)$$

$$\frac{1}{r'} \left(\frac{2r'}{1-r'} - \frac{2r'^2}{K'^2} \right) (G'_s + G'_a) + \frac{2ip}{R'^2} (-F'_s + F'_a) = 0$$

これらの式を解いて F'_s, G'_s 等をおく事は出来るが

大変複雑で数値計算的に処理が利か

有利であろう。

2. では、1. 簡略化した場合を考えよう。

層(II)は(I)に比べてうんと軟かて、界面Iは

(II)から見れば、剛体的であり変位は下層のそれに等しい。

即ち、(E.13)により

$$\left. \begin{aligned} a'(-f_s' + f_a') + b'(g_s' + g_a') &= u \\ c'(f_s' + f_a') + d'(g_s' - g_a') &= v \end{aligned} \right\} (E.16)$$

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{1}{R'^2}, \quad b' = \frac{i p}{K'^2 r'}, \quad c' = \frac{i p}{R'^2 q'}, \quad d' = \frac{1}{K'^2} \\ f_s' &= F_s' e^{-q' h}, \quad g_s' = G_s' e^{-r' h} \\ f_a' &= F_a' e^{q' h}, \quad g_a' = G_a' e^{r' h} \end{aligned} \right\} (E.17)$$

$$\therefore f_a' = \frac{1}{\delta'} [(a'd + b'c)f_s' - 2b'd'g_s'] + \frac{ud + v'c'}{\delta'}, \quad (E.18)$$

$$g_a' = \frac{1}{\delta'} [2a'c'f_s' + (d'd - b'c')g_s'] + \frac{uc' - va'}{\delta'},$$

$$\delta' = ad + bc = \frac{1}{R'K'} \left(1 - \frac{p^2}{q'r'} \right),$$

一方 (E.15) を

$$\left. \begin{aligned} A'(F_s' + F_a') + B'(-G_s' + G_a') &= 0 \\ C'(-F_s' + F_a') + D'(G_s' + G_a') &= 0 \end{aligned} \right\} (E.19)$$

$$\left. \begin{aligned} F_a' &= \frac{1}{\Delta'} [-(A'D' + B'C')F_s' + 2B'D'G_s'] \\ G_a' &= \frac{1}{\Delta'} [2A'C'F_s' - (A'D' + B'C')G_s'] \\ \Delta' &= A'D' - B'C' = \frac{4p^2}{(B'K')^2} - \frac{2\left(\frac{2p^2}{R'^2} - 1\right)^2}{q'r'(1-)} \end{aligned} \right\} (E.20)$$

これを整理して、

$$f_a' = \frac{1}{\Delta'} [-(A'D' + B'C') f_s' e^{\frac{2\pi h'}{\lambda}} + 2B'D' g_s' e^{\frac{(B'+D')h'}{\lambda}}]$$

$$g_a' = \frac{1}{\Delta'} [2A'C' f_s' e^{\frac{2\pi h'}{\lambda}} - (A'D' + B'C') g_s' e^{\frac{(B'+D')h'}{\lambda}}] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (E.20)$$

と (E.18) と等置すれば、

$$\left[\frac{-(A'D' + B'C')}{\Delta'} e^{\frac{2\pi h'}{\lambda}} - \frac{A'D' - B'C'}{\delta'} \right] f_s' + \left[\frac{2B'D'}{\Delta'} e^{\frac{(B'+D')h'}{\lambda}} + \frac{2B'D'}{\delta'} \right] g_s' = \frac{1}{\delta'} (u d' + v b')$$

$$\left[\frac{2A'C'}{\Delta'} e^{\frac{2\pi h'}{\lambda}} - \frac{2A'C'}{\delta'} \right] f_s' + \left[-\frac{(A'D' + B'C')}{\Delta'} e^{\frac{(B'+D')h'}{\lambda}} - \frac{(A'D' - B'C')}{\delta'} \right] g_s' = \frac{1}{\delta'} (u c' - v a'), \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (E.21)$$

これから解けば、 f_s' , g_s' が求まる。

原 (I) について H は自由面であるから

$$A(f_s + f_a) + B(-g_s + g_a) = 0.$$

$$C(-f_s + f_a) + D(g_s + g_a) = 0$$

$$A = \frac{1}{8} \left(\frac{2\rho^2}{k^2} - 1 \right), \quad B = \frac{2i\rho}{k^2}, \quad C = \frac{2i\rho}{k^2}, \quad D = \frac{2}{r(H)} \left(1 - \frac{2\rho^2}{k^2} \right),$$

$$f_a = \frac{1}{\Delta} [-(AD + BC) f_s + 2BD g_s]$$

$$g_a = \frac{1}{\Delta} [2AC f_s - (AD + BC) g_s]$$

$$\therefore \text{したがって} \quad u = A(-f_s + f_a) + B(g_s + g_a)$$

$$v = C(f_s + f_a) + D(-g_s + g_a)$$

によって速度を計算する。

特異点加層(II)に於ては

$$f_s = g_s = 0, \quad (E-25)$$

より (E-9), (E-10) のかわりに

$$\left. \begin{matrix} f_s' \\ g_s' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_s' \frac{e^{-r'y}}{r'} \\ F_s' \frac{e^{-\delta'y}}{\delta'} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp \quad \text{for } y' > y > 0, \quad (E-26)$$

$$\left. \begin{matrix} f_a' \\ g_a' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_a' \frac{e^{ry}}{r'} \\ F_a' \frac{e^{\delta'y}}{\delta'} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp \quad \text{for } y > 0, \quad (E-10)$$

$$\left. \begin{matrix} f_s' \\ g_s' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_s'' \frac{e^{-r'y}}{r'} \\ F_s'' \frac{e^{-\delta'y}}{\delta'} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp \\ + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \begin{matrix} G_0' \frac{e^{y'y}}{r'} \\ F_0' \frac{e^{\delta'y}}{\delta'} \end{matrix} \right\} e^{-ipx} dp \quad \text{for } h > y > y', \quad (E-27)$$

より故に

$$\left. \begin{aligned} f_s' &= F_s'' e^{-\delta'h} + F_0' e^{\delta'h} \\ g_s' &= G_s'' e^{-\delta'h} + G_0' e^{r'h} \\ F_s'' &= F_s'' + F_0' \\ G_s' &= G_s'' + G_0' \end{aligned} \right\} \quad (E-28)$$

この場合は (E.20) で F_a, G_a を求め、一方 (E.16) の変位式を用いて F_s, G_s が決まる。

よりすると下層には力 (p, q) が入力として f_a, g_a が定まることになる。

このようにしても尚且つ複雑でやはり数値的に処理するのが得策であろう。

一方 前述のようにそのような界面があっても相互定理は成立つので、検同数には互換性がある。(変位を交換しても値はかわらない)。

つまり、^{例として} P 点に力を加えたときに ^{出る} Q 点の変位は Q 点に力を加えた時 P 点に生ずる変位に等しく

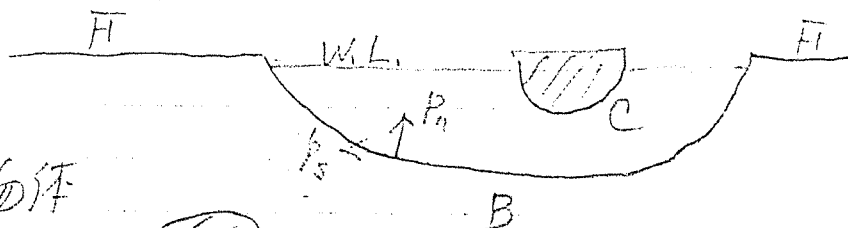
この事は、 P, Q が同じ層内にあっても違う層内にあっても成立ち、また層が幾つあっても成立つ。

F. ハスキントの周縁の振動

氷面がある場合

で、氷面に「等ぶ」物体

に働く力について考える。



今 G が振動して、地盤の中に変位し、
境界に P, q なる力が働くとしよう。

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} P = q = 0, & \quad \text{on } F \\ P_n = 0, & \quad \text{on } B \end{aligned} \right\} \quad \dots (F.1)$$

一方、水の方では、速度ポテンシャルが存在して、
圧力は

$$\frac{p}{\rho} = -i\omega\phi, \quad \dots (F.2)$$

B および C 上の法線速度が与えられると ϕ は
定まる。

なお、自由水面では

$$\phi + \frac{\omega^2}{g} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad (F.3)$$

となっている。

$$\text{さて} \quad u_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{on } B, \quad (F.4)$$

$$\text{で、} \quad p_n = +i\omega\rho\phi$$

物体 C に働く力は一般に

$$X = \rho i \omega \int_C \phi \frac{\partial w}{\partial n} ds, \quad (F.5)$$

の形に書けるが、今 C の中で ϕ_w を定義し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial n} \quad \text{on } C \\ \frac{\partial \phi_w}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } B \end{aligned} \right\} \quad (F.6)$$

とあるとしよう。

$$\begin{aligned} \frac{X}{\rho i \omega} &= \int_C \phi \frac{\partial \phi_w}{\partial n} ds = \int_{B+C} \phi \frac{\partial \phi_w}{\partial n} ds \\ &= \int_{B+C} \phi_w \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_B \phi_w \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (F.7) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad (F.8)$$

とする。

又、地中で B 上の圧力 $-i\rho\omega\phi$ によって起る変位を u_w, v_w とすると

$$p_{wn} = i\rho\omega\phi, \quad p_{ws} = 0 \quad \text{on } B, \quad (F.9)$$

となるので (F.4) を使って

$$X = \int_B p_{0n} u_n ds = \int_{B+\bar{B}} (p_{0n} u_n + p_{0s} u_s) ds$$

$$= \int_{B+\bar{B}+G} (p u_n + q v_n) ds - \int_G (p_n u + q_n v) ds$$

境界条件により 結局

$$X = \int_G (p u_n + q v_n - p_n u - q_n v) ds, \quad (F.10)$$

を得るが 本文と同様にして、例えは

$$X = u_n \int_G p ds + v_n \int_G q ds, \quad (F.11)$$

のような式を得、このような場合でもやはり

G の振動による力は、¹³⁾ 物体内の振動

した時 G 点に及ぼす変位又は力に

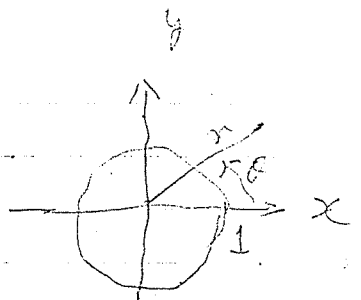
等しい事がわかる。

G. 円筒の運動

1) 剛体の運動 (x 方向 = 振幅)

$$u_m = \cos \theta, \quad u_s = -\sin \theta \quad (G-1)$$

$$\begin{cases} \gamma = k^2 A_1 \cos \theta H_1^{(2)}(kr) \\ \omega = k^2 D_1 \sin \theta H_1^{(2)}(kr) \end{cases} \quad (G-2)$$



また

$$\begin{cases} u_m = \{D_1 H_1^{(2)}(kr) - A_1 K H_1^{(2)'}(kr)\} \cos \theta \\ u_s = -\{k D_1 H_1^{(2)'}(kr) + A_1 H_1^{(2)}(kr)\} \sin \theta \end{cases} \quad (G-3)$$

また

$$\begin{cases} D_1 H_1^{(2)}(k) - K A_1 H_1^{(2)'}(k) = 1 \\ k D_1 H_1^{(2)'}(k) + A_1 H_1^{(2)}(k) = 1 \end{cases} \quad (G-4)$$

$$\Delta = H_1(k) H_1'(k) - k H_1'(k) H_1(k)$$

$$A_1 = \frac{k H_1'(k) - H_1(k)}{\Delta} = -\frac{k H_2(k)}{\Delta}$$

$$D_1 = \frac{1}{\Delta} (H_1(k) - K H_1'(k)) = \frac{K H_2(k)}{\Delta} \quad (G-5)$$

$$\frac{X}{G} = \int_0^{2\pi} \frac{p}{G} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \left[-2 \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{2}{1-\nu} \gamma \cos \theta - \omega \sin \theta \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{1-\nu} \cdot k^2 A_1 H_1(k) - \pi k^2 D_1 H_1(k)$$

$$= -\frac{\pi k^2}{\Delta} [k H_2(k) H_1(k) + K H_1(k) H_2(k)] \quad (G-6)$$

$$\Delta = \frac{Rk}{2} \{ H_0(z) H_2(k) + H_0(k) H_2(z) \}$$

と書けるから $k, R \rightarrow 0$ の時は

$$H_0(z) \xrightarrow{(2)} \frac{2}{\pi i} \log \frac{z}{2}$$

$$H_1(z) \xrightarrow{(2)} \frac{2i}{\pi - z}, \quad H_2(z) \xrightarrow{(2)} \frac{1}{\pi z^2}$$

故に

$$\Delta \rightarrow \frac{Rk}{\pi^2} \left[\frac{\log \frac{z}{2}}{R^2} + \frac{\log \frac{z}{2}}{k^2} \right]$$

$$\frac{X}{G} \xrightarrow{k, R \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\log \frac{z}{2} + (1-\frac{1}{2}) \log \frac{z}{2}} < 0, \quad (G.7)$$

$k, R \gg 1$ の時は

$$\Delta \rightarrow \frac{2\sqrt{Rk}}{\pi} e^{-i(k+R-\frac{3}{2}\pi)}$$

$$\frac{X}{G} \xrightarrow{k, R \gg 1} \pi R \left(1 + \frac{R}{k}\right) e^{-\frac{\pi i}{2}}, \quad (G.8)$$

これを 緩和力 R と 慣性力 および 減衰 について

$$X = -R + \omega^2 (M - iA), \quad (G.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{と書くと } k, R \rightarrow 0 \text{ ならば } A \rightarrow 0, M \rightarrow +\infty \\ k, R \gg 1 \text{ ならば } \omega^2 M \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} (G.9)$$

と $T_0 \rightarrow 0$

$$\frac{X}{\pi G} = -k^2 \left[1 + \frac{2H_0^{(2)}(k)H_2^{(2)}(k)}{H_0^{(2)}(k)H_2^{(2)}(k) + H_0^{(2)}(k)H_2^{(2)}(k)} \right]$$

$$= -k^2 \left[1 + 2 \left\{ \frac{H_0^{(2)}(k)}{H_2^{(2)}(k)} + \frac{H_0^{(2)}(k)}{H_2^{(2)}(k)} \right\} \right],$$

$$H_0^{(2)}(k) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(k - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 - \frac{1}{8ik} - \frac{3}{128k^2} + \dots \right\}$$

$$H_2^{(2)}(k) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i(k - \frac{5\pi}{4})} \left\{ 1 + \frac{15}{8ik} - \frac{125}{128k^2} + \dots \right\}$$

$$\frac{H_0^{(2)}(k)}{H_2^{(2)}(k)} \doteq - \left[1 + \frac{2i}{k} - \frac{189}{64k^2} + \dots \right]$$

$$\frac{H_0^{(2)}(k)}{H_2^{(2)}(k)} + \frac{H_0^{(2)}(k)}{H_2^{(2)}(k)} \doteq -2 \left[1 + i\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) - \frac{189}{128}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right) \right]$$

$$\frac{X}{\pi G} \doteq -ik\left(1 + \frac{k}{k}\right) - \frac{2k}{k} + \frac{61}{128}\left(1 + \frac{k^2}{k^2}\right)$$

$$4\frac{1}{2}k = 2k \quad (\sigma = \frac{1}{2}, \nu = \frac{1}{2}) \text{ とおくと}$$

$$\frac{X}{\pi G} \doteq -3ik - 1.6172$$

K	REAL	IMAGINARY	-(REAL)*K**2	-(IMAG)*K**2
10	.92272355E+02	.56103049E+02	-.92272355E+00	-.56103049E+00
20	.26548985E+02	.21604200E+02	-.10619594E+01	-.86416801E+00
30	.12731538E+02	.12754214E+02	-.11458384E+01	-.11478793E+01
40	.75102077E+01	.89097968E+01	-.12016332E+01	-.14255675E+01
50	.49589939E+01	.68074547E+01	-.12397485E+01	-.17018637E+01
60	.35155939E+01	.54969632E+01	-.12656138E+01	-.19789067E+01
70	.26175268E+01	.46077997E+01	-.12825881E+01	-.22578218E+01
80	.20202988E+01	.39675321E+01	-.12929913E+01	-.25392205E+01
90	.16031449E+01	.34856887E+01	-.12985474E+01	-.28234079E+01
100	.13005989E+01	.31104832E+01	-.13005989E+01	-.31104832E+01
110	.10745591E+01	.28102463E+01	-.13002166E+01	-.34003980E+01
120	.50244571E+00	.19081853E+01	-.12862610E+01	-.48849544E+01
130	.29070057E+00	.14515650E+01	-.12819895E+01	-.64014017E+01
140	.19136961E+00	.11719757E+01	-.12936586E+01	-.79225557E+01
150	.13670675E+00	.98208852E+00	-.13137518E+01	-.94378707E+01
160	.10307571E+00	.84460875E+00	-.13358612E+01	-.10946129E+02
170	.80718287E-01	.74059520E+00	-.13568744E+01	-.12449405E+02
180	.64980382E-01	.65922112E+00	-.13749849E+01	-.13949119E+02
190	.53460164E-01	.59384180E+00	-.13904989E+01	-.15445825E+02
200	.44771198E-01	.54021444E+00	-.14040248E+01	-.16941125E+02
210	.38046721E-01	.49545839E+00	-.14157185E+01	-.18436007E+02
220	.32728178E-01	.45755012E+00	-.14256395E+01	-.19930883E+02
230	.28445742E-01	.42503156E+00	-.14339499E+01	-.21425841E+02
240	.24946771E-01	.39682952E+00	-.14409255E+01	-.22920873E+02
250	.22046936E-01	.37215447E+00	-.14464995E+01	-.24417055E+02
260	.19613851E-01	.35037101E+00	-.14506404E+01	-.25913440E+02
270	.17560918E-01	.33098723E+00	-.14542196E+01	-.27409052E+02
280	.15815876E-01	.31363232E+00	-.14575911E+01	-.28904354E+02

$$Re\left(\frac{x}{-k^2 \pi G}\right) \quad Im\left(\frac{x}{-k^2 \pi G}\right) \quad Re\left(\frac{x}{\pi G}\right) \quad Im\left(\frac{x}{\pi G}\right)$$

$$n = \frac{1}{3} \quad (n = \frac{1}{2})$$

$$G2''$$

竹筒は極端にXが無理に小さくするとは少し
不器に思われるが、物体の周りの大きい部分を變形
させる爲に必要な力であると考えれば、一応理解
出来る。

また竹筒では領域の大部分で、押込力と
抵抗力が釣り合っているのだから、関係は当然である。

3) 内部領域 (k', K')

$$u_n = A_n \cos n\theta, \quad u_s = B_n \sin n\theta \quad (G.10)$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} \gamma' &= K'^2 G_n' J_n(K'r) \cos n\theta \\ \omega' &= k'^2 F_n' J_n(k'r) \sin n\theta \end{aligned} \right\} (G.14)$$

と仮定する

$$\left. \begin{aligned} u_n &= [-K' G_n' J_n'(K'r) + n F_n' J_n(k'r)] \cos n\theta \\ u_s &= [n G_n' J_n(Kr) - k' F_n' J_n'(k'r)] \sin n\theta \end{aligned} \right\} (G.15)$$

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -K' J_n'(K) G_n' + n J_n(k) F_n' \\ B_n &= n J_n(K) G_n' - k' J_n'(k) F_n' \end{aligned} \right\} (G.16)$$

$$\left. \begin{aligned} G_n' &= \frac{1}{\Delta'} [k' J_n'(k) A_n + n J_n(K) B_n] \\ F_n' &= \frac{1}{\Delta'} [n J_n(K) A_n + K' J_n'(K) B_n] \end{aligned} \right\} (G.17)$$

$$\Delta' = n^2 J_n(K') J_n(k') - k' K' J_n'(K') J_n'(k')$$

4) 差

(4.11) より 内外で 変位が等しいとすると

$$\Delta P_n = P_n|_{\text{out}} - P_n|_{\text{inn}}, \quad \Delta P_s = P_s|_{\text{out}} - P_s|_{\text{inn}} \quad (G.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_n &= -2(G-G') \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{2G}{1-\nu} \gamma - \gamma \frac{2G'}{1-\nu'} \gamma', \\ \Delta P_s &= 2(G-G') \frac{\partial u_n}{\partial s} + G\omega - G'\omega', \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta P_n = -2(G-G') n B_n \cos n\theta + G k^2 G_n H_n(k) \cos n\theta$$

$$- G' k'^2 G'_n J_n(k') \cos n\theta,$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_s &= -2(G-G') n A_n \sin n\theta + k^2 G F_n H_n(k) \sin n\theta \\ &\quad - k'^2 G' F'_n J_n(k') \sin n\theta, \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\Delta P_n}{\cos n\theta} = G \left[\frac{k^2 H_n(k)}{\Delta} \{ k H'_n(k) A_n + n H_n(k) B_n \} - 2n B_n \right]$$

$$- G' \left[\frac{k'^2 J_n(k')}{\Delta'} \{ k' J'_n(k') A_n + n J_n(k') B_n \} - 2n B_n \right],$$

$$\frac{\Delta P_s}{n \sin \theta} = G \left[\frac{k^2 H_n(k)}{\Delta} \{ n H_n(k) A_n + k H'_n(k) B_n \} - 2n A_n \right]$$

$$- G' \left[\frac{k'^2 J_n(k')}{\Delta'} \{ n J_n(k') A_n + k' J'_n(k') B_n \} - 2n A_n \right],$$

$$\Delta P_n = (a_n A_n + b_n B_n) \cos n\theta$$

$$\Delta P_s = (c_n A_n + d_n B_n) \sin n\theta$$

と置く

(G.19)

$$q_n = \frac{G}{\Delta} k^3 H_n(k) H'_n(k) - \frac{G'}{\Delta'} k'^3 J_n(k') J'_n(k'),$$

$$b_n = \frac{G}{\Delta} \cdot n H_n(k) H_n(k) - 2nG \\ - \frac{G'}{\Delta'} n J_n(k') J_n(k') + 2nG'$$

$$c_n = nG \left[\frac{k^2}{\Delta} H_n(k) H_n(k) - 2 \right] \\ - nG' \left[\frac{k'^2}{\Delta'} J_n(k') J_n(k') - 2 \right] \quad (G.20)$$

$$d_n = \frac{G}{\Delta} k^2 k H_n(k) H'_n(k) \\ - \frac{G'}{\Delta'} k'^2 k' J_n(k') J'_n(k'),$$

5) 縦波の散乱

入射波 (単位振幅) は

$$\delta_0 = iK e^{iKz}$$

$$= iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta$$

$$u_{0n} = -i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n'(Kr) \cos n\theta$$

$$u_{0s} = + \frac{i}{K} \sum_{n=0}^{\infty} n i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \sin n\theta$$

(G.21)

δ, ω (G.10) のようにおくと、境界条件は

$$u_{0n} + u_{dn} = u_{0s} + u_{ds} = 0, \quad (G.22)$$

は

$$-K H_n'(K) G_n + n H_n(\frac{R}{2}) F_n = i^{n+1} \varepsilon_n J_n'(K) \quad (G.23)$$

$$n H_n(K) G_n - K H_n(\frac{R}{2}) F_n = -\frac{i^{n+1}}{K} n \varepsilon_n J_n(K) \quad (G.23)$$

$$G_n = \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{\Delta} \left[K H_n(\frac{R}{2}) J_n'(K) - \frac{n^2}{K} H_n(\frac{R}{2}) J_n(K) \right]$$

$$F_n = \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{\Delta} \left[n H_n(K) J_n'(K) - n H_n'(K) J_n(K) \right] \quad (G.24)$$

$$p_{0n} + p_{dn} = + \frac{2}{1-\nu} (\gamma_0 + \gamma_d)$$

$$= \frac{2}{1-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ i^{n+1} \varepsilon_n K J_n(K) + K^2 G_n F_n(K) \right\} \cos n\theta$$

$$p_{0s} + p_{ds} = \omega_d = \sum_{n=0}^{\infty} K^2 F_n H_n(\frac{R}{2}) n \sin n\theta, \quad (G.25)$$

$$P_{int} P_{dn} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos n\theta$$

$$P_{os} + P_{as} = \sum f_n \sin n\theta$$

$$E_n = \frac{2 E_n i^{n+1}}{1-\nu} \left[K J_n(K) + \frac{K^2 H_n(K)}{\Delta} \left\{ R H_n'(R) J_n'(K) - \frac{n^2 H_n(R) J_n(K)}{K} \right\} \right]$$

$$f_n = \frac{n E_n i^{n+1}}{\Delta} R^2 H_n(R) \left[H_n(K) J_n'(K) - H_n'(K) J_n(K) \right]$$

6) 同電力方程式

$$\Delta p_n = -p_{on} + p_{an} \quad \downarrow$$

$$\Delta p_s = p_{os} + p_{ds} \quad \uparrow$$

$$a_n A_n + b_n B_n = e_n \quad \downarrow$$

$$c_n A_n + d_n B_n = f_n \quad \uparrow$$

$$\therefore A_n = \frac{1}{\delta} (e_n d_n - f_n b_n) \quad \downarrow$$

$$B_n = \frac{1}{\delta} (-e_n c_n + f_n a_n) \quad \uparrow$$

$$\delta = a_n d_n - b_n c_n$$

H. 円筒の静的変位.

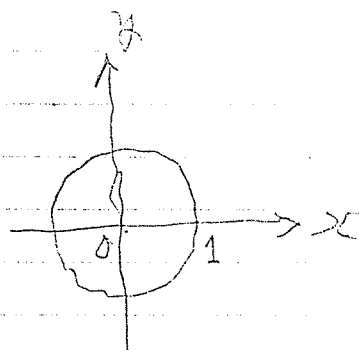
変位 (u, v) , 力 (p, q) について

$$2G(u-iv) = \alpha \varphi(z) - (\bar{z}\varphi' + \psi)$$

$$-p_y - i p_x = \bar{z}\varphi'(z) + \psi'$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{z} + i p_x) = \bar{z} + i p$$

$$\alpha = \frac{3-2\nu}{1+\nu}$$

2 法線方向変位 (u_r, u_θ) , 力 (p_r, p_θ) について

$$u_r - i u_\theta = (u-iv)e^{i\theta}$$

$$p_r - i p_\theta = (p-iq)e^{i\theta}$$

(H.2)

なす周縁力がある。

i) 外部領域

$$\varphi = M \log z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{z^n}$$

$$\varphi' = \frac{M}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n A_n}{z^{n+1}}$$

$$\psi' = N \log z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{z^n}$$

(H.3)

$$2G(u-iv) = \alpha \bar{M}(-i\theta) + \alpha \sum \bar{A}_n e^{i n \theta}$$

$$- [e^{-i\theta} (M e^{-i\theta} - \sum n A_n e^{-i(n+1)\theta}) + N(i\theta) + \sum B_n e^{-i n \theta}]$$

$$= i\theta (\alpha \bar{M} + N) + \alpha \bar{A}_1 e^{i\theta} - B_1 e^{-i\theta} + \alpha \bar{A}_0 - B_0 + \alpha \bar{A}_2 e^{2i\theta} - (M + B_2) e^{-2i\theta}$$

$$+ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{n+2} e^{i(n+2)\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} (n A_n - B_{n+2}) e^{-i(n+2)\theta}, \quad (H.4)$$

一般で与えるためには

$$\alpha \bar{M} + N = 0, \quad (H.5)$$

$$\text{今 } u - iv = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{in\theta} + D_n e^{-in\theta}), \quad (H.6)$$

とすると与えるには

$$\begin{aligned} \alpha \bar{A}_0 - B_0 &= C_0 \times 2G \\ M + B_2 &= 0 \end{aligned} \quad (H.7)$$

とすると

$$\begin{aligned} \varphi &= M \log z + \frac{B_0 + C_0 \times 2G}{2} \\ \varphi' &= -\alpha \bar{M} \log z - \frac{M}{z^2} + B_0 \end{aligned} \quad (H.8)$$

となつて B_0 と M は不定になる。

2つに与える力は

$$\begin{aligned} -P_y - i P_x &= \bar{M} (-i\theta) + e^{i\theta} M - \alpha \bar{M} (i\theta) - M e^{-2i\theta} + B_0 \\ &= - (1+\alpha) i \theta \bar{M} = - \frac{4}{1+\alpha} i \theta \bar{M} \quad (H.9) \end{aligned}$$

$(+2B_0 + (C_0 \times 2G)) \quad (+2B_0 + (C_0 \times 2G))$

$$-f - ip = - \frac{4i}{1+\alpha} \bar{M}, \quad (H.9')$$

であるから力を与えると M は決まるが B_0 はやはり不定である。

平行移動は応力場には影響がないのである。

当然である。

一般に:

$$2G C_0 = \alpha \bar{A}_0 - B_0$$

$$2G C_1 = \alpha \bar{A}_1$$

$$2G D_1 = -B_1$$

$$2G C_2 = \alpha \bar{A}_2$$

$$2G D_2 = -(M + B_2)$$

$$2G C_n = \alpha \bar{A}_{n+2}, \quad (n \geq 2)$$

$$2G D_n = n A_n - B_{n+2}$$

$$(H.10)$$

これから

$$\bar{A}_0 = \frac{B_0}{\alpha} + \frac{2G}{\alpha} C_0.$$

$$\bar{A}_1 = \frac{2G}{\alpha} C_1, \quad B_1 = -2GD_1,$$

$$\bar{A}_2 = \frac{2G}{\alpha} C_2, \quad B_2 = -2GD_2 - M$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{n+2} &= \frac{2G}{\alpha} C_{n+2}, \quad B_{n+2} = \eta A_n - 2GD_{n+2} \\ &= \frac{n}{\alpha} 2G \bar{C}_n - 2GD_{n+2} \end{aligned}$$

for $n \geq 3$

(H.11)

$$\begin{aligned} \frac{-P_y - iP_x}{2G} &= \frac{B_0}{2G\alpha} + \frac{1}{\alpha} C_0 + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\theta} + \frac{\bar{M}(-i\theta)}{2G} \\ &\quad + \frac{M e^{-2i\theta}}{2G} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha} \bar{C}_n e^{i(n+2)\theta} + \frac{B_0}{2G} + \\ &\quad + \frac{N(i\theta)}{2G} - D_1 e^{-i\theta} - \left(D_2 + \frac{M}{2G}\right) e^{-2i\theta} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\alpha} \bar{C}_n - D_{n+2}\right) e^{-i(n+2)\theta}, \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+\alpha)}{2G\alpha} B_0 + \frac{C_0}{\alpha} + \frac{-i\theta}{2G} (1+\alpha) \bar{M}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-in\theta}, \quad \text{--- (H.12)}$$

となり意味のない定数 B_0 を除いても $\bar{M}$ だけ不定である。

ii) 内部領域 (G', γ')

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n, \quad \varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n z^{n-1} \\ \gamma' &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n \end{aligned} \right\} \quad (H.13)$$

とおく

$$\begin{aligned} 2G'(u-iv) &= \alpha' \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n e^{-in\theta} - \left[\sum_{n=0}^{\infty} n A_n e^{i(n-2)\theta} + B_n e^{in\theta} \right] \\ &= \alpha' \bar{A}_0 - 2A_2 - B_0 + (\alpha' \bar{A}_1 - A_1) e^{-i\theta} - (3A_3 + B_1) e^{i\theta} \\ &\quad + \alpha' \sum_{n=2}^{\infty} \bar{A}_n e^{-in\theta} - \sum_{n=2}^{\infty} \{ B_n + (n+2) A_{n+2} \} e^{in\theta}, \end{aligned} \quad (H.14)$$

(4-iv) から (H.6) で与えられたとすると

$$\left. \begin{aligned} 2G' C_0 &= \alpha' \bar{A}_0 - 2A_2 - B_0, \\ 2G' D_1 &= \alpha' \bar{A}_1 - A_1, \quad 2G' \bar{D}_1 = \alpha' A_1 - \bar{A}_1 \\ 2G' C_1 &= -(3A_3 + B_1) \\ 2G' C_n &= -[(n+2) A_{n+2} + B_n] \\ 2G' D_n &= \alpha' \bar{A}_n \end{aligned} \right\} \quad (H.15) \quad (n \geq 2)$$

$$-P_y - iP_x = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n e^{-in\theta} + \left[B_0 + B_1 e^{i\theta} + A_1 e^{-i\theta} + 2A_2 e^{i\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} (B_n + (n+2) A_{n+2}) e^{in\theta} \right]$$

$$\frac{-P_y - iP_x}{2G'} = \frac{\bar{A}_0 + B_0 + 2A_2}{2G'} + \frac{D_1 + \bar{D}_1}{\alpha' L_1} e^{-i\theta}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D_n}{\alpha'} e^{-in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \quad (H.16)$$

左側下

$$-\dot{q} - i\dot{p} \Big|_{\text{in}} = 2G' \left[-i \frac{D_1 + \bar{D}_1}{\alpha' - 1} e^{-i\theta} - i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n D_n}{\alpha'} e^{-in\theta} - i \sum_{n=1}^{\infty} n C_n e^{in\theta} \right] \quad (H.17)$$

(H.12)より

$$-\dot{q} - i\dot{p} \Big|_{\text{out}} = 2G \left[-i \frac{(1+\alpha)}{2G} \bar{M} + \frac{i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n e^{in\theta} + i \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e^{-in\theta} \right] \quad (H.18)$$

$$\text{今 } \Delta p = p_{\text{in}} - p_{\text{out}}, \quad \Delta \dot{q} = \dot{q}_{\text{in}} - \dot{q}_{\text{out}}$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta \dot{q} + i \Delta p &= -i(\alpha+1)\bar{M} + i 2G D_1 e^{-i\theta} + \frac{2G'}{\alpha' - 1} (D_1 + \bar{D}_1) e^{-i\theta} \\ &\quad + i \left(\frac{2G}{\alpha} + 2G' \right) \sum_{n=1}^{\infty} n C_n e^{in\theta} + i \left(2G + \frac{2G'}{\alpha} \right) \sum_{n=2}^{\infty} n D_n e^{-in\theta}, \end{aligned} \quad (H.19)$$

I. 地震動の水中への伝播

水の運動は速度ポテンシャルを持つ。

$$\Delta \phi + \frac{\omega^2}{c^2} \phi = 0, \quad (I.1)$$

c は水中の音速とする。

→ 水面上では圧力が水圧と平衡するから

$$\frac{p}{\rho} + g y = 0 \quad (I.2)$$

y は水面上昇。

$$p = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho i \omega \phi \quad (I.3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = w = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (I.4)$$

$$\left(-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0, \quad (I.5)$$

すなわち $c \gg 1$ ならば "重力" は速度ポテンシャル

に一致し; $\omega^2/g \gg 1$ ならば (I.5) は断崖波

の水面条件 $\phi = 0$ となる。

(I.1) の基礎解は

$$S = H_0(R), \quad R = \frac{\omega}{c} \quad (I.6)$$

で、これからこれを水面条件を満たすようにして
みよう。

(E.1) より

$$H_0^{(2)}(kR) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip(x-x') - q(y-y')}}{q} dp, \quad q = \sqrt{p^2 - k^2}, \quad (I.7)$$

であるから 水面を $y=0$ とすると 水面で (I-5) を満たす

ために

$$S = H_0^{(2)}(kR) + f(p, q)$$

$$f(p, q) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(p) e^{ip(x-x') + q(y+y')}}{q} dp, \quad y < -y' \quad (I.8)$$

とかけば

$$F(p) = \frac{-(B+K)}{q-K}, \quad K = \frac{\omega^2}{g}, \quad (I.9)$$

である。よ。

$$S = H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K+q}{K-q} \frac{e^{ip(x-x') + q(y+y')}}{q} dq, \quad (I.10)$$

この積分の積分は いかん外へ出て行くように実軸をさければよく、水の波の理論に全く等しい。

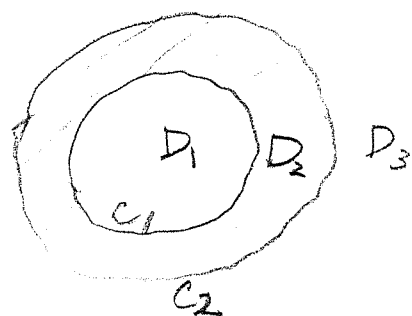
又地震については水深が水平で無限に深く
ならば 所与 A の周数で B 上に ^{並進} 圧力がある
ものを考えればよい。

J. ハスキントの 関係 の 裏

ハスキントの関係は力に注目して相反定理を物理的に解釋したものである。

従つてもう一つの関係として変位に注目したものを考えられる。

今図のように 空洞領域 D_1 が C_1 に囲まれ その外に 物性値の異なる D_2, D_3 なる 領域があり D_3 は無限遠方まで広がっているという。



さて 今 $u, v; p, q$ は D_3 の中の震源^{の振動}による変位および力 (その震源が充分遠方にある平面波によるそれ) という。

境界条件は

$$p = q = 0 \quad \text{on } C_1, \quad (J.1)$$

$$u, v, p, q : \text{continuous on } C_2 \quad (J.2)$$

次に 境界 C_1 上に力 f, g ^(振動力) を加えた時の変位を U, V としよう。 f, g は ^{目的より} 適当に選ぶので例えは

$$f(Q) = \delta(Q, P), \quad g = 0, \quad \text{on } C_1 \quad (J.3)$$

と選ぶのではない

$$u(p) = \int_{C_1} u(q) g(q) ds = \int_{C_1} (u g + v h) ds, \quad (J.4)$$

と仮定して右辺の積分は C_1 上の変位を与える事になる。

そこで相反定理により右辺の積分は

$$\int_{C_1} (u g + v h) ds = \int_{C_1} (U p + V q) ds - \int_{C_2} (u g + v h - U p - V q) ds,$$

となるが (J.1) により右辺第2項の積分は消える。

又 D_3 で u, v, p, q は震源の振動成分とその反射散乱成分に分けられるから

$$\left. \begin{aligned} u &= u_r + u_e, & v &= v_r + v_e \\ p &= p_r + p_e, & q &= q_r + q_e \end{aligned} \right\} \quad (J.5)$$

とかくと D_3 で

$$\int_{C_3} (u_r g_r + v_r h - U p_r - V q_r) ds = \int_{C_2} (\quad) ds$$

$$= 0, \quad (J.6)$$

であるから結局

$$u(p) \Big|_{p \in C_1} = - \int_{C_2} (u_e g + v_e h - U p_e - V q_e) ds, \quad (J.7)$$

特に D_2 が無い場合は大変簡単で

$$u(p)|_{C_1} = - \int_{C_1} (u_e g + v_e h - u_p e - v_g e) ds, \quad \dots (J.8)$$

となり、入射波が平面波の場合は P 点に単位振動力を加えた時の発散波の振幅であり、点震源の場合はハスキントの関係の時と同様に震源における発散波の振幅又は力となる。

あるいは既に実験的に P 点に集中力を加えて C_1 上の U, V を測定して上の計算を行えば、地震の時の振幅が計算出来る。

こゝ ハスキントの関係では u_e, v_e 変位を強制する振動試験で地震の強制力がわかるのである。これはいわばハスキントの関係の裏の関係をめたるが実験的にはこちらの方が簡単であろう。(勿論精度は別として)

一般的に u (J.7) の場合は少々面倒であるが、原理的には全く同じであり、又右辺の積分は C_1 上の g, h に関する問題を解いておけば C_1 上の U, V の値を測定すれば変位を計算出来る。

参考文献 (12行年)

- 1) 中村左卫门太郎 "地震学"
東京 内田老鶴園 1967
- 2) 金井 清 "地震工学"
共立出版 昭和44年
- 3) 藤井陽一郎 "日本の地震学"
紀伊国屋新書 昭和42年
- 4) 宇澤 徳治 "地震学"
共立全書 216 1977年
- 5) V.D. Kupradze "Dynamical Problems
in Elasticity"
Progress in Solid Mechanics vol. III,
North-Holland Publishing Corp., Amsterdam
1963.
- 6) P.H. Morse and H. Feshbach
"Methods of Theoretical Physics"
Part I and II, McGraw-Hill, 1953.
- 7) 大原 資生 "耐震工学"
朝北出版 昭和48年

- 1) T.A. Cruse and F.J. Rizzo "Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. I & II"
J. Mathematical Analysis and Applications
vol. 22, pp 244-259, pp 341-355, 1968
- 2) J.W. Craggs "On two-dimensional waves in an Elastic Half-Space"
Proc. Cambridge Phil. Soc. vol. 56, 1960
- 3) R.P. Banergh "Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surface of Arbitrary Shape"
Journal of the Acoustical Soc. of America,
vol. 35 No. 10, Oct. 1963.
- 4) M.D. Haslind, 「波の強制力と応力変化」 鈴木訳
Izves. Nauk C.C.P. Otd. Tech. Nauk, No. 7, 1957
日本造船学会誌 467号 昭和43年5月
- 5) 別所正利 「動揺問題における応力分布について」
日本造船学会論文集 117号 昭和40年6月
- 6) 元良誠三, 小山健夫 「Heavingの強制力を受ける
船体型について」
同上