

円筒型消音器について.

筒隔の固体壁で

はさまれた領域では

鏡像を考えて.

$$S = \sum \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} = \frac{1}{8\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} H_0^{(2)}(\omega \sqrt{k^2 - t^2}) dt, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2e^{-itx} &= e^{-itx} + e^{itx} + \sum_{n=\pm 1}^{\pm \infty} e^{-it(2nL)} (e^{-itx} + e^{itx}) \\ &= 2 \cos tx \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos 2nL \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \cos tx \left[\frac{\sin(2N+1)L}{\sin L} \right], \quad (2)$$

2" 因子から

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\omega \sqrt{k^2 - t^2}) \frac{\sin(2N+1)L}{\sin L} dt \cos tx, \\ &= \frac{1}{4L i} \left[H_0^{(2)}(k\omega) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(\omega p_n) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$p_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

$k < \frac{n\pi}{L}$ のときは

$$H_0^{(2)}(\omega p_n) = \frac{2i}{\pi} K_0(\omega |p_n|), \quad \text{とする。}$$

これからさらに円筒壁で囲まれているとすると.

$$H_0^{(2)}(\tilde{\omega} p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_n^{(2)}(pr) J_n(pr') \cos n(\theta - \theta'), \quad r > r'$$

$$K_0(p\tilde{\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n K_n(pr) I_n(pr') \cos n(\theta - \theta'), \quad r > r'$$

であるから

$$S = \frac{1}{4Li} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(pr) J_m(pr') \cos m(\theta - \theta') \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi X}{L} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(2)}(pr) J_m(pr') \cos m(\theta - \theta') \right]$$

となるから $r=1$ で法線速度が 0 となるような板は

$$N = \frac{1}{4Li} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[H_m^{(2)}(pr) J_m(pr') - \frac{H_m^{(2)}(pr)}{J_m'(pr)} J_m(pr) J_m(pr') \right] \\ + \frac{1}{2Li} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi X}{L} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left[H_m^{(2)}(pr) J_m(pr') - \frac{H_m^{(2)}(pr)}{J_m'(pr)} J_m(pr) J_m(pr') \right] \cos m(\theta - \theta') \\ \text{for } r > r' \quad \dots (4)^*$$

$r < r'$ の時は右辺が 1, 3 項の r と r' を交換する。

これらの表現は $J_m'(pr) = 0$ の時は成立しないから

今は r の小さい方を考えるのでこの場合は考慮しない。

これは 1 次元問題 (ホロ導管境界値問題のグリーン関数) であるから円筒面 (円筒内なる円筒面とは限らない)

の折動によるポテンシャルは

* 虚部は打消し合ってしまうので実である。

$$\phi(P) = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} N(P, Q) dS_Q, \quad \dots (5)$$

と表わされる。

簡罩の壁に振動源が一点に集中しているとすると、

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS(Q) = f(Q), \quad \dots (6)$$

とおいて

$$\phi(P) = f(Q) N(P, Q), \quad \dots (7)$$

と置けるが明らかに

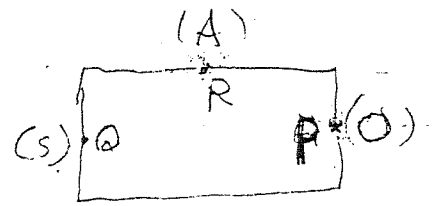
$$N(P, Q) = N(Q, P), \quad \dots (8)$$

であるから Q 点における f なる振動源による P 点のポテンシャルは P 点における同じ強さの振動源による Q 点のポテンシャルに等しい (相反又は可逆又はヘルムホルツの定理)

同簡罩に穴があってそこから音が出て行かない場合には P (今は P 点とする) で ϕ が 0 であればよい。と考えられるが議論を進めて見るとそれでは 音源から 音のエネルギーを吸収出来ない事になる。

そこで Q 点に音源をおき P 点と

R 点 から音が 出て 行く こと 1 点。



$$\phi_S(P) = g_S N(P, Q),$$

$$\phi_O(P) = g_O N(P, P), \quad (7)$$

$$\phi_A(P) = g_A N(P, R),$$

これらの点のインピーダンスを Z とすると
($p = -p^*$ の故)。

$$\frac{g_S}{A_S} Z_S = -p i \omega [\phi_S(Q) + \phi_O(Q) + \phi_A(Q)],$$

$$\frac{g_O}{A_O} Z_O = -p i \omega [\phi_S(P) + \phi_O(P) + \phi_A(P)], \quad (8)$$

$$\frac{g_A}{A_A} Z_A = -p i \omega [\phi_S(R) + \phi_O(R) + \phi_A(R)],$$

各点での反射は 同様に Q 点でも

$$W_S = \frac{p i \omega}{4} [g_S (\overline{\phi_S + \phi_O + \phi_A}) - \overline{g_S} (\phi_S + \phi_O + \phi_A)]$$

$$= \frac{1}{4} g_S \overline{g_S} (Z_S + \overline{Z_S}) = \frac{\mu_S}{2} g_S \overline{g_S}, \quad \dots (11)$$

$$p_S = \text{Re} \{ Z_S \}$$

$$W_O = \mu_O \frac{g_O \overline{g_O}}{2}, \quad W_A = \mu_A \frac{g_A \overline{g_A}}{2},$$

2 ネルフィ - 不正確則から

$$W_s = W_0 + W_A, \quad (12)$$

さて (10) を整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_s}{A_s} Z_s^* &= -\rho i \omega [g_0 N(P, Q) + g_A N(Q, R)], \\ -\rho i \omega N(P, P) \frac{g_0}{A_0} Z_0^* &= -\rho i \omega [g_s N(P, Q) + g_A N(P, R)], \\ \frac{g_A}{A_A} Z_A^* &= -\rho i \omega [g_s N(Q, R) + g_0 N(P, R)], \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_s^* &= Z_s + \rho i \omega A_s N(Q, Q) \\ Z_0^* &= Z_0 + \rho i \omega A_0 N(P, P) \\ Z_A^* &= Z_A + \rho i \omega A_A N(R, R) \end{aligned} \right\} (14)$$

$N(P, P)$ 等は無限大となるけれど今は穴面の平均値と考える。

(13) の下 2 式から

$$\left. \begin{aligned} g_0 \left[\frac{Z_0^* Z_A^*}{A_0 A_A} + \rho^2 \omega^2 N^2(P, R) \right] &= -\rho i \omega g_s \left[\frac{Z_A^*}{A_A} N(P, Q) - \rho i \omega N(P, R) N(Q, R) \right] \\ g_A \left[\frac{Z_0^* Z_A^*}{A_0 A_A} + \rho^2 \omega^2 N^2(P, R) \right] &= -\rho i \omega g_s \left[\frac{Z_0^*}{A_0} N(Q, R) - \rho i \omega N(P, Q) N(P, R) \right] \end{aligned} \right\} (15)$$

これを (13) の式に代入すると Z_s^* が求まる。

さて 2 の 2 式から

$$\frac{g_0}{g_A} = \frac{N(P,Q)}{N(Q,R)} \frac{\left[\frac{Z_A^*}{A_A} - P^2 \omega \frac{N(P,R)N(Q,R)}{N(P,Q)} \right]}{\left[\frac{Z_0^*}{A_0} - P^2 \omega \frac{N(P,Q)N(P,R)}{N(Q,R)} \right]}, \quad (16)$$

また

$$\frac{W_0}{W_A} = \frac{\mu_0 N^2(P,Q)}{\mu_A N^2(Q,R)} \frac{\left[\frac{Z_A^* \bar{Z}_A^*}{A_A^2} + P^2 \omega^2 \frac{N(P,R)N(Q,R)}{N^2(P,Q)} + \frac{P^2 \omega (Z_A^* - \bar{Z}_A^*)}{A_A} \frac{N \cdot N}{N} \right]}{\left[\frac{Z_0^* \bar{Z}_0^*}{A_0^2} + P^2 \omega^2 \frac{N^2(P,Q)N^2(P,R)}{N^2(Q,R)} + \frac{P^2 \omega (Z_0^* - \bar{Z}_0^*)}{A_0} \frac{N \cdot N}{N} \right]}, \quad (17)$$

よって Z_A^* の reactance が 0 とすると

$$\frac{W_0}{W_A} = \frac{\mu_0}{\mu_A} \frac{\frac{\mu_A^2 N^2(P,Q)}{A_A^2 N^2(Q,R)} + P^2 \omega^2 N^2(P,R)}{\left[\frac{Z_0^* \bar{Z}_0^*}{A_0^2} + P^2 \omega^2 \frac{N^2(P,Q)N^2(P,R)}{N^2(Q,R)} + \frac{P^2 \omega (Z_0^* - \bar{Z}_0^*)}{A_0} \frac{N \cdot N}{N} \right]}, \quad (18)$$

あるいは (13) を

$$\frac{g_0}{g_A} = \frac{N(P,Q)}{N(Q,R)} \frac{Z_A'/A_A}{Z_0/A_0}, \quad (16')$$

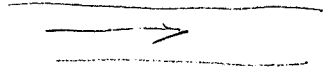
と置いて $Z_A = \mu_A$ とすれば

$$\frac{W_0}{W_A} = \frac{\mu_0}{\mu_A} \frac{A_0 N^2(P,Q)}{A_A^2 N^2(Q,R) Z_0 \bar{Z}_0}, \quad (18')$$

外部の放射インピーダンス

1. ハイト (無限長)

$$\phi = e^{-ikx}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -ik e^{-ikx}$$



$$Z = -\rho i \omega \phi / \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\rho \omega}{k} = \rho c,$$

$$\omega = k \frac{c}{\lambda}$$

2. 無限大 バリッフル付 開口

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \int \frac{e^{-ikR}}{R} r dr d\theta.$$

$$Z = \frac{-\rho i \omega \phi}{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{-\rho \omega}{2\pi i} \int \frac{e^{-ikR}}{R} r dr d\theta.$$

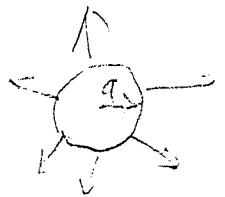
$R \rightarrow r$

$$= +i\rho\omega \left[a - ik \frac{a^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\rho \omega k a^2}{2} + i\rho\omega a = \frac{\rho c}{2} (ka)^2 + i\rho\omega a$$

3. 無指向性 点源

$$\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \int \frac{e^{-ikR}}{R} r^2 d\omega$$



$$Z = \frac{-\rho i \omega \phi}{\frac{\partial \phi}{\partial r}} = \frac{\rho i \omega}{4\pi} \int \frac{e^{-ikR}}{r} r^2 d\omega d\phi$$

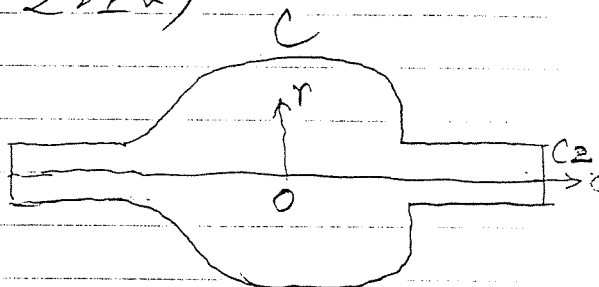
$$= \rho i \omega a [1 - ika] = \rho \omega k a^2 + \rho i \omega a //$$

軸対称消音器内の音場

 $\langle \text{Re}[\phi e^{i\omega t}] \rangle$ と考えて

速度ポテンシャルは、グリーン2の定理より

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} \frac{e^{-i\omega R}}{R} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-i\omega R}}{R} \right) ds, \quad (1)$$



$$R^2 = (x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta.$$

$$P \equiv (x, r, \theta), \quad Q \equiv (x', r', \theta').$$

 ϕ が Q にだけ関係しない. とすると新しく

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\omega R}}{R} d\theta', \quad (2)$$

なる核関数を導入して. 以下 $P \equiv (x, r), Q \equiv (x', r')$

と考えると (1) は次のように書ける.

$$\phi(P) = \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) - \phi \frac{\partial}{\partial n} S \right) r' ds, \quad (3)$$

2. に ds は子午線の線素で, C_1, C_2 については
 上半分だけの積分である. (検査面)

境界条件は C が固体壁で動かないとすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad (4)$$

 C の一部が動く時は (放射問題) として速度 $\partial \phi / \partial n$ が与えられるものとしよう。

検査面 C_1, C_2 が図のように充分遠くにある時は

ϕ は平面波 $e^{\pm i k x}$ になると考えられる (はらか管径に比べて短く存在と勿論伝わりながら問題にならない)。

まず C_1 から入射波が来 (散乱問題) の場合は

$$\phi \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-i k x} + A e^{-i k x}, \quad (15)$$

のように入射波 $e^{i k x}$ に対して反射波もある。

C_2 では x の正方向へ進む波は "かり" 。

$$\phi \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-i k x} (1 + A^+), \quad (16)$$

これを透過波 $(1 + A^+)$ と呼ぼう。

さて (3) 式で ϕ の代わりに $e^{\pm i k x}$ をあてるとよりから

$$e^{\pm i k x} = \int_{C_1 + C_2 + C} \left(\frac{\partial e^{\pm i k x'}}{\partial n} S - e^{\pm i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right) r' ds, \quad (17)$$

(5), (6) を考慮して (3) から (17) を差引くと

$$\begin{aligned} \varphi(p) = \phi(p) - e^{-i k x} &= \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} S - \varphi \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds \\ &+ A^- \int_{C_1} \left[\frac{\partial e^{i k x'}}{\partial n} S - e^{i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right] r' ds \\ &+ A^+ \int_{C_2} \left[\frac{\partial e^{-i k x'}}{\partial n} S - e^{-i k x'} \frac{\partial S}{\partial n} \right] r' ds, \quad (18) \end{aligned}$$

を得る。

2、2'' 充分遠方では

$$R \xrightarrow{|x| \gg 1} \rho + x' \frac{\partial R}{\partial x'} + r' \frac{\partial R}{\partial r'} \quad \text{at } x', r' = 0$$

$$\rho = \sqrt{x'^2 + r'^2}$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial x'} \right|_{x'=r'=0} = \frac{-(x-x')}{R} \Big|_{x'=r'=0} = -\frac{x-x'}{\rho}$$

$$\left. \frac{\partial R}{\partial r'} \right|_{x'=r'=0} = \frac{r'-r' \cos \theta}{R} \Big|_{x'=r'=0} = \frac{-r' \cos \theta}{\rho}$$

$$R \xrightarrow{|x| \gg 1} \rho + \frac{x'}{\rho}(x-x') - \frac{r' r' \cos \theta}{\rho}, \quad \text{at } x', r' = 0$$

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \xrightarrow{|x| \gg 1} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} + x' \frac{\partial}{\partial x'} \frac{e^{-ikR}}{R} + r' \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{-ikR}}{R} \quad \text{at } x', r' = 0$$

$$= \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \left[1 + ik \left\{ x' \frac{\partial R}{\partial x'} + r' \frac{\partial R}{\partial r'} \right\} \right]$$

$$= \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} \left[1 + i \frac{k}{\rho} \{ x'(x-x') + r' r' \cos \theta \} \right]$$

$$\therefore S(p, Q) \xrightarrow{|x| \gg 1} \frac{e^{-ik\rho}}{2\pi\rho} \left[1 + \frac{ik}{\rho} x x' \right], \quad \dots (9)$$

これを(8)式右辺の2, 3項に代入してみるとこれらの項は消えてしまい、

$$\varphi(p) = \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} S(p, Q) - \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(p, Q) \right] r' d\Omega, \quad (10)$$

と表わされる事がわかる。

入射波がない時も同様にして ϕ に対して上式が成立つ。

境界条件は散乱問題に対しては

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} e^{-ikx}, \quad (11)$$

である。放射問題に対しては同じように $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が与えられる。

また (9) を (10) に代入すると

$$\phi(r) \xrightarrow{|x| \gg 1} \frac{1}{2\pi\rho} \left[\int_C r' \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + \frac{ikx}{\rho} \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} x - \phi \frac{\partial x}{\partial n} \right) r' ds \right], \quad (12)$$

それ故 $|x| \rightarrow r$ 元から

$$A^\pm = \frac{1}{2\pi\rho} \left[\int_C r' \frac{\partial \phi}{\partial n} ds + ik \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} x - \phi \frac{\partial x}{\partial n} \right) r' ds \right], \quad (13)$$

となって ϕ が無限遠方で 0 となるとすると $\rho \rightarrow \infty$ で

$A^\pm \rightarrow 0$ となる。(この時は勿論入射はもはいてこれない!)

そういう訳で C_1, C_2 は有限の ρ だけに ^{おいて} 考えねばならない。

ここでもう一度 (3) 式の表現に戻ろう。

さて先ず出口 C_2 では外部に音のエネルギーが放射される故 そのインピーダンスを Z とすると (定義?)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega \phi / Z = (14)$$

とかけて Z が与えられると ϕ から $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が ^{計算出来} 求まる逆

が可能である。

* この仮定が成り立たない事は付録1に見る通りであるから前々回 (5) 式からの議論は修正すべきである。

しかしこのような立上りをすて、以下の方角をとるならば別に成り立たない。

又 C_1 についても反射については同じ事が考えられる
がこちらは音源に直結していて反射は再び
音源から反射されて入射波となるからこちらに
ついては反射波はなく入射波のみを考えればよい
だろう。

別の考えとしては C_1 上で ϕ または $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が与えられる
としてもよい。(この方が理論上問題が少いだろう。)
いづれにしてもそうすると音は C_2 を通じて放射
されるだけである。

以上のようにして C, C_1, C_2 上での $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が
与えられると (3) 式は境界上の点で積分
方程式となりこれを解くと境界上の ϕ が
わかる。

この時同調周波数は上の積分方程式の
固有値として与えられるからそのマトリックス
の Determinant が 0 となる ρ を探し、固有値
を求めねばならない。

そう言う事で理想的消音器は、 C_2 から音が
出ない つまり

$$\phi \text{ or } \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C_2, \quad (15)$$

であるから その内部 又は周面上に減衰器を
おいて C_1 から入った音のエネルギーを吸収すれば
よいわけである。

今は C の一部 C_3 が動いて と言う役割を
果たするとすると その振動振幅は (15) の関係
を満たすように決めればよい。

あるいは (3) を積分方程式として解く時に C_2 上では
(15) の条件を満たすものとして その上の積分は考えず
がために C_3 上の $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ を未知数として 解けばよい。

この時 エネルギー の関係から

$$\int_{C_1+C_3} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} r ds = 0, \quad (16)$$

となっている筈である。

これをもう少しゆけて考えよう。

まず C_3 は動かないとして C_1 のみが動いているとして、
その時 C_2 上の ϕ はある値になるだろう。

次に C_1 は動かない(固定壁)として C_3 のみを動かして
 C_2 上の ϕ を計算するとまたある値を得る。

この両者を足したものが ϕ となるように C_3 上の
振動の振幅と位相を決めればよい。

それ故 能動的に C_3 の振幅と位相を制御する
と考えれば常に言う事は可能であろう。

またこの時 C_3 の振動で音のエネルギー一様吸収
しなければならぬのであるから 制御と言っても
動力は不要で C_3 の振動系の質量とバネ定数
を用いた数に従って所望の値とし必要に減衰
を附せばよい。

このような目的のためにはまず与えられた形状 C_1 についてその上の各点に集率的に ϕ を与えた時の問題を解いて C_2 上の ϕ をおめておき一方 C_1 のみが与えられる問題から得られる C_2 上の ϕ と較べて適当な場所と振幅位相を決めればよい。

この時最終的には C_2 からの放射抵抗はあってもなくても (いくらであつても) 関係ないので極端に言えば“固体壁と考えておいてよいからエネルギーはこゝから出て行かねばならないので”そのインピーダンスは適当な値 (有限な値) (いくらでもよい) にとつておかねばならない。

附録 無限に長い円筒の中の特異性

半径 1 の無限長円筒の $x=0$ の点に特異性 S がある。

$$S(x, r; 0, r') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta R}}{R} d\theta$$

$$R^2 = x^2 + \omega^2, \quad \omega^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta, \quad \left. \vphantom{\int_0^{2\pi}} \right\} (A.1)$$

Weyrich の積分によれば

$$\frac{e^{-i\theta R}}{R} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} H_0^{(2)}(\omega \sqrt{r^2 - t^2}) dt, \quad \dots (A.2)$$

又

$$H_0^{(2)}(\omega p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n H_n^{(2)}(pr) J_n(pr') \cos n\theta, \quad \dots (A.3)$$

for $r > r'$

よって (A.1) は

$$S(x, r; 0, r') = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} H_0^{(2)}(rp) J_0(pr') dt, \quad \dots (A.4)$$

$p = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad r > r'$

今

$$A = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F(t) J_0(pr) dt, \quad \dots (A.5)$$

のような $0 < r < 1$ で 適切な関数によって

$$\left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{r=1} = - \left. \frac{\partial S}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad \dots (A.6)$$

とすれば「出れば」新しく

$$N(p, a) = S + A, \quad (A.7)$$

のような同数は円盤上で境界条件を満たす核函数である。

さて

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{J_0(pr)}{H_0^{(2)}(pr)} \right\} = \frac{1}{p} \left\{ \frac{J_1(pr)}{H_1^{(2)}(pr)} \right\}$$

であるから (A.6) の条件から

$$F(\#) = -J_0(pr) \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)}, \quad (A.7)$$

となる。

それ故 (A.5) は

$$A(x, r; r', 0) = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i+x} J_0(pr) J_0(pr') \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)} dp, \quad (A.8)$$

と書ける。

そこで

$$J_1(p) = \frac{p}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{p^2}{j_{1,n}^2} \right), \quad (A.9)$$

のように現わされ $j_{1,n}$ は J_1 の根である。

つまり上の被積分函数は $p = \sqrt{k^2 - x^2} = \pm j_{1,n}$ の値

に pole を有すし、下半面で正値で小さくなって

行く ($x > 0$ として)。

右半面で
 したがって (A.8) の積分経路は、実軸の少し上にあるものとし、
 それを無限下方まで押し下げるとすれば、pole の
 留数分だけ残る。

さて まず $p \rightarrow 0$ つまり $t \rightarrow \infty$ のとき、

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(p) &\rightarrow -iY_1(p) \rightarrow \frac{2}{\pi p^2}, \\ J_1(p) &\rightarrow \frac{p}{2} \end{aligned} \quad \left\{ \right.$$

であるから 前述の積分図式は

$$I = \frac{i}{4} \int_0^\infty dr J_0(pr) J_0(pr') \frac{H_1^{(2)}(p)}{J_1(p)} \xrightarrow[p \rightarrow 0]{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - l^2}, \quad (A.10)$$

また

$$J_1'(j_n) = -j_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{j_{1,m}^2}{j_n^2}\right)$$

だから

$$J_1(p) \xrightarrow[p \rightarrow j_n]{} \frac{j_n}{2} \left(\frac{p^2}{j_n^2} - 1\right) J_1'(j_n),$$

$$I \xrightarrow[p \rightarrow j_n]{} \frac{i}{2} \int_0^\infty dr \frac{J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r) J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r') H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - j_n^2})}{(-k^2 - l^2 - j_n^2) J_1'(j_n)}.$$

したがって

$$A = -\frac{i}{k} \int_0^\infty dr \frac{J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r) J_0(\sqrt{k^2 - j_n^2} r') H_1^{(2)}(p_n)}{\sqrt{k^2 - j_n^2} J_1'(j_n)},$$

$$p_n = \sqrt{k^2 - j_n^2}, \quad \text{for } k > 0 \quad (A.11)$$

$j_n > k$ のときは $\sqrt{k^2 - j_n^2} = -i\sqrt{j_n^2 - k^2}$ とする。