

"自由表面を持つ半無限領域での" 二次元弾性波の伝播

別所弘利

内容

概要

1. 場の方程式と変位の表現	1
2. 特異性テンソル (無限領域)	4
3. 続 長波近似	8
4. 続 遠方の表現	10
5. 自由表面のある場合	13
6. 境界積分方程式とその解法	28~39

附録	A	ハンケル変換のフーリエ変換	A-1~2
"	B	Δ の根	B-1
"	C	M, N 関数	C-1~4
"	D	$\lim_{k \rightarrow 0} S$ の境界条件 (6.21 改)	D-1~5
"	E	γ, ω の表現	E-1~5
"	F	γ の表現	F-1~5
"	G	変分原理と相互定理	G-1~17
"	H	可逆性	H-1~5
"	I	数値計算	I-1~5

1. 場の方程式と変位の表現

現象がすべて同一周波数 ω で周期的であるものとして、すべての量を複素表示して時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して記すものとする。

変位 $u_i (i=1,2)$ の満たす微分方程式は Δ をラプラシアン

とて

$$(\Delta + k^2) u_i + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1,2) \quad (1.1)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

とて

$$k^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad \alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.3)$$

ν : ポアソン比

ρ : 密度, G : 剛性率で k は横波の波数である。

今新しく周波数を導入して次のように定義する。

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (1.4)$$

(同一周波数と混同する事があるまい)

(1.1) に代入すると γ と ω は次の微分方程式を満たさねばならない。

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + k^2) \gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2) \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$$k^2 = \frac{1-\nu}{2} k_r^2 \quad (1.6)$$

K は 縦波の波数である。

(1.5) は ヘルムホルツ の 方程式 で その 解 は よく 知られて いる。

そこで γ と ω が 決まった と すると (1.1), (1.2), (1.4) から

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ u_2 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

一方 応力 成分 は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

であるから 曲線 C に 沿って 働く 境界力 の (x, y)

成分 は

$$G T_1 \equiv t_1 = \sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} = G \left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial x}{\partial n} \right),$$

$$G T_2 \equiv t_2 = \tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_y \frac{\partial x}{\partial s} = G \left(\frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial y}{\partial n} \right) \quad (1.9)$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= G \left[-2 \frac{\partial u_2}{\partial s} - \omega \frac{\partial \gamma}{\partial n} + \frac{2}{1-\nu} \gamma \frac{\partial x}{\partial n} \right] \\ t_2 &= G \left[2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \omega \frac{\partial \gamma}{\partial n} + \frac{2}{1-\nu} \gamma \frac{\partial y}{\partial n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.9')$$

変位 と 境界力 は また C 上の 法線, 接線

成分 で 表わしておく 方が 便利 である 事 も ある ので

これを $u_n, u_s, (t_n, t_s)$ と 記す。

$$\begin{aligned} U_n &= U_1 \frac{\partial X}{\partial n} + U_2 \frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \\ U_s &= U_1 \frac{\partial X}{\partial s} + U_2 \frac{\partial Y}{\partial s} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 \frac{\partial X}{\partial n} + t_2 \frac{\partial Y}{\partial n} = g \left[2 \frac{\partial U_n}{\partial n} + \frac{2\gamma}{1-\gamma} \gamma \right] \\ t_s &= t_1 \frac{\partial X}{\partial s} + t_2 \frac{\partial Y}{\partial s} = g \left[2 \frac{\partial U_s}{\partial n} - \omega \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

[前報の式では n と s の微分が順序変更可能と仮定したが、それは不可能であることが判明した。]

$$\begin{aligned} \text{従って} \quad \frac{\partial U}{\partial n} &= \frac{\partial X}{\partial n} \frac{\partial U_n}{\partial n} - \frac{\partial Y}{\partial n} \frac{\partial U_s}{\partial n} \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= \frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial U_s}{\partial n} + \frac{\partial Y}{\partial s} \frac{\partial U_n}{\partial n} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\gamma = \frac{\partial U_n}{\partial n} + \frac{\partial U_s}{\partial s}, \quad \omega = \frac{\partial U_s}{\partial n} - \frac{\partial U_n}{\partial s}$$

$$\frac{t_n}{G} = \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X \partial s}$$

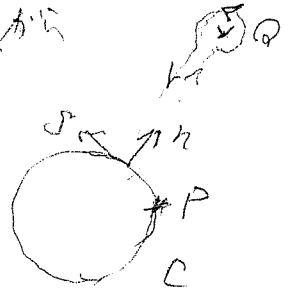
2. 特異性 ラッセル (無限小変位)

(1.7) および (1.9) において ^{2種} ハンケル関数から

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \\ \omega_1(P, Q) &= \frac{-i}{4} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} (2.1)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y'),$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} H_0(kR) \\ \omega_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x} H_0(kR) \end{aligned} \right\} (2.2)$$



とあって.

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{(-1)^{i+j}}{k^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_{j+1}} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}, \quad (2.3)$$

$$x_3 \equiv x, \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y,$$

のような変位の組を定義すると具体的に

$$U_{11}(P, Q) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)],$$

$$\left. \begin{aligned} U_{12}(P, Q) &= \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)], \\ &= U_{21}(P, Q) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

$$U_{22}(P, Q) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)],$$

これから境界力は

$$\left. \begin{aligned} G \tau_{j1} = t_{j1} &= G \left[-\omega_j \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{2}{1-\nu} \gamma_j \frac{\partial x}{\partial n} - 2 \frac{\partial U_{j2}}{\partial s} \right], \\ G \tau_{j2} = t_{j2} &= G \left[\omega_j \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2}{1-\nu} \gamma_j \frac{\partial y}{\partial n} + 2 \frac{\partial U_{j1}}{\partial s} \right], \end{aligned} \right\} (2.5) \quad j=1, 2.$$

$$\begin{aligned} T_1(P, Q) = & \frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ & - \frac{i}{2K^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} T_2(P, Q) = & \frac{i}{4} \left[+ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ & + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(KR) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{21}(P, Q) = & \frac{i}{4} \left[+ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ & - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(KR) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR) \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22}(P, Q) = & \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ & + \frac{i}{2K^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \left\{ H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR) \right\}, \end{aligned}$$

これらの特性を用いて図の C と Q 点を通る積分路 C について相互定理を適用すると

$$u_j(Q) = \int_C \left[u_i(P) T_{ij}(P, Q) - \epsilon(P) u_{ij}(P, Q) \right] ds, \quad j=1, 2, \quad (2.7)$$

なる積分表示を得る。

境界力を求めるには (1.9) の演算を行う必要がある。

ここで (1.2), (1.4) により縦波と横波の表現を求めておこう。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y'} &= -\gamma_1 \\
 \frac{\partial u_{12}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{11}}{\partial y'} &= -\omega_1 \\
 \frac{\partial u_{12}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y'} &= -\gamma_2 \\
 \frac{\partial u_{22}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{12}}{\partial y'} &= -\omega_2
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y'} = +\frac{1}{4} k^2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) + 2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s},$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y'} = \frac{1}{4} k^2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - 2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s},$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x'} - \frac{\partial T_{11}}{\partial y'} = -\frac{1}{4} k^2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) + 2 \frac{\partial \omega_2}{\partial s},$$

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial x'} - \frac{\partial T_{12}}{\partial y'} = \frac{1}{4} k^2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - 2 \frac{\partial \omega_1}{\partial s}.$$

γ_2

$$\begin{aligned}
 \gamma(R) = \int_C \left[T_1(p) \gamma_1(p, R) + T_2(p) \gamma_2(p, R) \right. \\
 \left. + 2 u_1 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s} - 2 u_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s} \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} k^2 u_n H_0^{(2)}(kR) \right] ds, \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega(R) = \int_C \left[T_1(p) \omega_1(p, R) + T_2(p) \omega_2(p, R) \right. \\
 \left. + 2 u_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial s} - 2 u_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial s} \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} k^2 u_s H_0^{(2)}(kR) \right] ds, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

(1.8/1)
 この部分積分公式 (1.10) を使えば、

$$\delta(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\delta \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) - \frac{\partial \delta}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) \right] ds, \quad (2.10)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) - \frac{\partial \omega}{\partial n} H_0^{(1)}(kR) \right] ds,$$

$$\text{ただし } \frac{2}{1-\alpha} \gamma = \left(\tau_1 + 2 \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial n} + \left(\tau_2 - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial n},$$

$$\omega = \left(\tau_1 + 2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \left(\tau_2 - 2 \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.11)$$

を得るから、これらの式はよく知られた素項である。

3. (續) 無限近似

物体の寸法に比べて波長が充分大きいと、 kR は充分小さいと考へる事が出来る。

極限においては、

$$H_0^{(2)}(kR) \xrightarrow{kR \ll 1} \frac{2}{\pi i} \log\left(\frac{\gamma k R}{2}\right) \quad (3.1)$$

γ ; Euler's Const.

$$H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) \xrightarrow{kR \ll 1} \frac{i(1+\nu)}{4\pi} R^2 R^2 \log R + \dots; \quad (3.2)$$

となるので (2.4) は

$$\begin{aligned} u_{11} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \log R + \frac{(1+\nu)}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R^2 \log R), \\ u_{12} = u_{21} &\rightarrow -\frac{(1+\nu)}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (R^2 \log R), \\ u_{22} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{(1+\nu)}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (R^2 \log R); \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただしここで R に直交しない項は省略してある。
又 (2.6) より

$$\begin{aligned} \tau_{11} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log R + \frac{(1+\nu)}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial y} (R^2 \log R), \\ \tau_{12} &\rightarrow + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log R - \frac{(1+\nu)}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial x \partial x^2} (R^2 \log R), \\ \tau_{21} &\rightarrow - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R + \frac{(1+\nu)}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (R^2 \log R), \\ \tau_{22} &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R - \frac{(1+\nu)}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial y} (R^2 \log R). \end{aligned} \quad (3.4)$$

これは 静力学の式に一致する。

すなわち 近似的にはこれらの特異性を無視して、境界値問題も解決可能になる。

今度は放射問題 (物体が振動して波を放射する問題) では境界条件として運動方程式が与えられるから静力学問題とけるが放射波についてはわかりにくい事になる。

しかしこの節に示すように物体上の変位等と放射波の関係が与えられるので近似的にこれによって計算出来る。

又散乱問題 (物体により入射波が反射散乱波) では入射波が無限に x の正方向からの連続波とすると

$$u_0 = e^{ikx} \quad (3.5)$$

でこれによる変位は (1.7) (1.8) より

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{k} e^{ikx} \xrightarrow{kx \rightarrow 0} x + \text{const} \\ u_2 &= 0 \xrightarrow{} 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\rightarrow 2G \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \\ \sigma_y &\rightarrow 2G \frac{\nu}{1-\nu} \end{aligned} \right\} \sigma_{xy} \rightarrow 0, \quad (3.7)$$

となってこれは近似的に (3.7) のような一対引張りを受ける静的問題に等しい。

4. (経度) 変位の表現,

無限遠方では

$$H_0^{(2)}(kR) \longrightarrow \sqrt{\frac{2i}{\pi kR}} e^{-ikR}$$

$$\longrightarrow \frac{4}{i} \psi(k') \phi(k, \theta, R), \quad (4.1)$$

$$\psi(k') = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2i}{\pi k'}} e^{-ik'r'}$$

$$\phi(k, \theta, R) = e^{ik(x \cos \theta' + y \sin \theta')} \quad (4.2)$$

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (r' \cos \theta', r' \sin \theta')$$

となるので、これを2部の式に代入すると無限遠方での近似値を得るかなり複雑な式になる。

これを少く直観的にする為に振動源に原点をとり変位を極座標表示すると(1.10)により

$$u_r(Q) = \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \xrightarrow{r' \gg} -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r'} \quad (4.3)$$

$$u_\theta(Q) \longrightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r'}$$

となって、また縦波、横波だけで表わされる。

つまり振動源からの動径方向の変位は縦波振動であり、それに直角な方向のずれは横波振動と見ることが出来る。この方が便利であろう。

$$\left[\begin{aligned} u_r(Q) &\longrightarrow \frac{1}{k^2} \gamma, \\ u_\theta(Q) &\longrightarrow \omega, \end{aligned} \right] \quad (4.3')$$

ここで (4.1) を (2.10) に代入し、

$$\begin{aligned} P(k, \theta') &= \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] \phi(k, \theta', P) ds, \\ \Omega(k, \theta') &= \int_C \left[u_1 \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \right] \phi(k, \theta', P) ds, \end{aligned} \quad (4.3)$$

なる周波数を定義すると、

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{R^2} \gamma &\xrightarrow{r \gg 1} \gamma(kr') P(k, \theta'), \\ \tau_p &\xrightarrow{r \gg 1} \gamma(kr') \Omega(k, \theta'), \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.3) に代入して

$$\begin{aligned} u_r(\theta) &\rightarrow \frac{i}{k} \gamma(kr') P(k, \theta'), \\ u_\theta(\theta) &\rightarrow \frac{i}{k} \gamma(kr') \Omega(k, \theta'). \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial n}$ 等は (1.10), (1.9) 等から 境界と境界から遠く

の領域で

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial n} &= -k^2 u_1 + \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= -k^2 u_5 - \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$$\frac{k^2}{R^2} \gamma = \tau_1 + 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{\partial u_1}{\partial n} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \quad (1.9')$$

$$\omega = \tau_5 + 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial s} \frac{\partial \gamma}{\partial s} - \frac{\partial u_2}{\partial s} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = -k^2 u_2 - \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{k^2}{R^2} \gamma = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -k^2 u_1 + \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \omega = 2 \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

又は

$$\begin{aligned}
 P(K, \theta') &= K^2 \int_C u_k \phi_K dS + \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} + \frac{k^2}{R^2} \omega \frac{\partial}{\partial s} \right) \phi_K dS, \\
 Q(K, \theta) &= R^2 \int_C u_s \phi_K dS + \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{R^2}{K^2} \gamma \frac{\partial}{\partial s} \right) \phi_K dS.
 \end{aligned} \quad (4.6)$$

さらに今 C が x 軸上の線分として

$$\begin{aligned}
 T_n = T_s = U_2 = U_n = 0 \\
 \mp u_s = [u_1]_{y=\pm 0} = \pm \Delta \quad \text{for } |x| < 1
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

とすると

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \pm \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \omega = 0, \\
 \frac{\partial \gamma}{\partial n} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{R^2}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x}
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

また

$$\begin{aligned}
 P(K, \theta') &= 2\Delta \int_{-1}^1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi(K, \theta', R) dx' \\
 &= -4K^2 \Delta \left[\int \phi dx' \right] \cos \theta' \Delta \theta',
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$Q = 2R^2 \Delta \int \phi(K, \theta', R) dx' - 4R^2 \sin \theta' \Delta \int \phi dx'$$

となつて 横波は無指向性^{*}の部分を含む。
縦波は無指向性^{*}の部分がない。

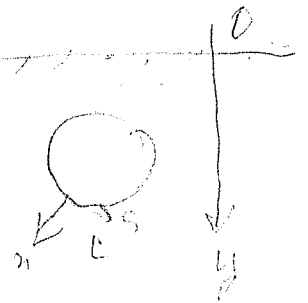
よつて $\theta' = 0$ のとき $\theta = \frac{\pi}{2}$ では $P=0$ で 縦波のみが得られる。

$$2 \cos \theta - 1 = \cos \theta \quad /$$

5. 自由表面のある場合

実軸が自由表面でその場合は
実軸の上半面であるとしてよう。

自由表面の条件は明らかに



$$t_1 = t_2 = 0 \quad \text{on } y=0, \quad (5.1)$$

となる。

本節ではこの条件を満たし、上半面では2節と
同じ特異性を示す変位関数を求めよう。

さてそのような関数の構成は勿論2節と同じ
で ω_i のかわりにそれらと同じ微分方程式(1.5)
を満たし、かつ上半面の特異性はそれらと等しい
関数を2つのように導入しよう。

$$\omega_1 = -\frac{i\omega}{4\pi y} H_0^{(2)}(kR) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial y} S_{11}(P, Q),$$

$$\gamma_1 = \frac{i k^2}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \rightarrow \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} S_{12}(P, Q).$$

$$\omega_2 = \frac{i\omega}{4\pi x} H_0^{(2)}(kR) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} S_{21}(P, Q),$$

$$\gamma_2 = \frac{i k^2}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \rightarrow \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} S_{22}(P, Q),$$

(5.2)

そうすると u_{ij} , t_{ij} は (2.3), (2.5) の δ_i , ω_i を式
 の中の δ にかえて δ_i よりから

$$\begin{aligned} u_{11}(p, Q) &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_{11} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{12} = \frac{K^2}{R^2} S_{12} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S_{11} - S_{12}) \\ u_{12}(p, Q) &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [S_{11} - S_{12}] \\ u_{21}(p, Q) &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [S_{21} - S_{22}] \\ u_{22}(p, Q) &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{21} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_{22} = +S_{21} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial y^2} (S_{21} - S_{22}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$T_{11} = \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial}{\partial y} S_{11} + \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial}{\partial x} S_{12} - 2 \frac{\partial u_{12}}{\partial S}$$

$$T_{12} = -\frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial}{\partial y} S_{11} + \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial}{\partial x} S_{12} + 2 \frac{\partial u_{11}}{\partial S}$$

$$T_{21} = -\frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial}{\partial x} S_{21} + \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial}{\partial y} S_{22} - 2 \frac{\partial u_{22}}{\partial S}$$

$$T_{22} = \frac{\partial x}{\partial h} \frac{\partial}{\partial x} S_{21} + \frac{\partial y}{\partial h} \frac{\partial}{\partial y} S_{22} + 2 \frac{\partial u_{21}}{\partial S} \quad (5.4)$$

自由表面の条件は、上式から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} S_{11} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (S_{11} - S_{12}) \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} S_{12} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} S_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{12} \right] &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} S_{21} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{21} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} S_{22} \right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} S_{22} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [S_{21} - S_{22}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad x=y=0$$

少し整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) S_{11} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} S_{12} \right] &= 0 \\ -\frac{2}{R^2} \left(R^2 + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) S_{11} + \left(1 + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) S_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } y=0 \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) S_{21} - \frac{2}{R^2} \left(R^2 + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) S_{22} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2}\right) S_{22} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} S_{21} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } y=0 \quad (5.6)$$

$y=0$ でこれらを満たすために フーリエ変換して考えよう。

まず

$$\frac{i}{4} \int_0^\infty H_0^{(2)}(kR) \cos px \, dx = -\frac{e^{-\sqrt{p^2-R^2}|y-y'|}}{4\sqrt{p^2-R^2}} \quad \text{for } \left. \begin{aligned} p > R \\ x' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

or

$$\frac{i}{4} H_0(kR) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-R^2}|y-y'|} \frac{\cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-R^2}} dp,$$

$k > p$ の時は 附録 A に示すように $\sqrt{p^2-R^2}$ の argument を採るものとする。

そこで S_{ij} の満たすべき方程式を考えるとこれらは

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos p(x-x') \left[\frac{e^{+\sqrt{p^2-R^2}(y-y')}}{\sqrt{p^2-R^2}} - \frac{e^{-\sqrt{p^2-R^2}y}}{\sqrt{p^2-R^2}} A_{11} \right] dp, \\ S_{12} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos p(x-x') \left[e^{\sqrt{p^2-R^2}(y-y')} - e^{-\sqrt{p^2-R^2}y} A_{12} \right] dp, \end{aligned} \right\} \text{for } (y' > y > -y') \quad (5.8)$$

$$S_{21} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\cos p(x-x')}{\sqrt{p^2 - k^2}} \left[e^{\sqrt{p^2 - k^2}(y-y')} + e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y} A_{21} \right] dp, \quad (5.9)$$

$$S_{22} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin p(x-x')}{\sqrt{p^2 - k^2}} \left[e^{\sqrt{p^2 - k^2}(y-y')} - e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y} A_{22} \right] dp,$$

(5.8) と (5.9) に代り (5.10) と

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + \frac{2p^2}{k^2} e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y} = -\left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) A_{11} - \frac{2p^2}{k^2} A_{12}, \\ & -2\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) \frac{e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'}}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \left(1 + \frac{2p^2}{k^2}\right) \frac{e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y}}{\sqrt{p^2 - k^2}} = -2\left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) \frac{A_{11}}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \frac{\left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right)}{\sqrt{p^2 - k^2}} A_{12}, \\ & \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) \frac{e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'}}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \frac{2}{k^2} \sqrt{p^2 - k^2} e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y} = \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) \frac{A_{21}}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \frac{2\sqrt{p^2 - k^2}}{k^2} A_{22}, \\ & \frac{2}{k^2} p^2 e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + \left(1 + \frac{2p^2}{k^2}\right) e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y} = -\frac{2p^2}{k^2} A_{21} - \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) A_{22} \end{aligned} \quad (5.10)$$

少し整理して

$$\begin{cases} A_{11} = -e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + A'_{11} \\ A_{12} = e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + A'_{12} \\ A_{21} = e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + A'_{21} \\ A_{22} = -e^{-\sqrt{p^2 - k^2}y'} + A'_{22} \end{cases} \quad (5.12)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)A'_{11} + \frac{2p^2}{R^2}A'_{12} &= -\frac{4p^2}{R^2}e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \\ + \frac{2}{R^2}\sqrt{p^2-k^2}A'_{11} + \frac{\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)}{\sqrt{p^2-k^2}}A'_{12} &= \frac{4}{R^2}\sqrt{p^2-k^2}e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \end{aligned} \right\} (5.10')$$

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)\frac{A'_{21}}{\sqrt{p^2-k^2}} + \frac{2\sqrt{p^2-k^2}}{R^2}A'_{22} &= +\frac{4}{R^2}\sqrt{p^2-k^2}e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \\ \frac{2p^2}{R^2}A'_{21} + \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)A'_{22} &= -\frac{4p^2}{R^2}e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \end{aligned} \right\} (5.11')$$

$$A'_{11} = \frac{4}{\Delta} \left[-\frac{p^2}{R^2} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} - \frac{2p^2}{R^4} \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right],$$

$$A'_{12} = -\frac{4\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-k^2}}{\Delta R^2} \left[\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} + \frac{2p^2}{R^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right],$$

$$\Delta = \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)^2 - \frac{4p^2}{R^4} \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-k^2}, \quad (5.13)$$

$$(5.14)$$

$$A'_{21} = \frac{4}{\Delta} \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-k^2} \left[\frac{\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right)}{R^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} + \frac{-2p^2}{R^4} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right], \quad (5.15)$$

$$A'_{22} = \frac{4}{\Delta} \left[-\frac{p^2}{R^2} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} - \frac{2p^2}{R^4} \sqrt{p^2-k^2} \sqrt{p^2-k^2} e^{-\sqrt{p^2-k^2}y'} \right], \quad (5.15)$$

これから 結局 的に

$$S_{11} = \frac{i}{4} [H_0^{(1)}(kR) + H_0^{(2)}(kR')] + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}y} \frac{\cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-k^2}} A'_{11} \frac{dp}{\sqrt{p^2-k^2}},$$

$$S_{12} = \frac{i}{4} [H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(2)}(kR')] + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}y} \frac{\cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-k^2}} A'_{12} \frac{dp}{\sqrt{p^2-k^2}}, \quad (5.16)$$

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y \pm y')^2},$$

$$S_{21} = \frac{i}{4} [H_0^{(2)}(KR) - H_0^{(2)}(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 K^2 y}} \frac{\cos p(x-x') A_{21}}{\sqrt{p^2 K^2}} dp,$$

$$S_{22} = \frac{i}{4} [H_0^{(2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2 K^2 y}} \frac{\cos p(x-x') A_{22}}{\sqrt{p^2 K^2}} dp, \quad (5.12)$$

5.18

$$S_{11} = \frac{i}{4} [H_0(KR) - H_0(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\gamma_R y} \frac{B_{11}}{\sqrt{p^2 - K^2}} dp$$

$$S_{12} = \frac{i}{4} [H_0(KR) + H_0(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_{12}}{\sqrt{p^2 - K^2}} dp \quad (5.18')$$

$$S_{21} = \frac{i}{4} [H_0(KR) + H_0(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_{21}}{\sqrt{p^2 - K^2}} dp$$

$$S_{22} = \frac{i}{4} [H_0(KR) - H_0(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int \frac{B_{22}}{\sqrt{p^2 - K^2}} dp$$

$$B_{11} = \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) \left[+ \frac{2p^2}{K^2} e^{-\gamma_R y'} + \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) e^{-\gamma_K y'} \right],$$

$$B_{12} = \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) \left[\frac{2\gamma_K \gamma_R}{K^2} e^{-\gamma_R y'} + \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) e^{-\gamma_K y'} \right], \quad (5.19)$$

$$B_{21} = \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) \left[\frac{2\gamma_R \gamma_K}{K^2} e^{-\gamma_K y'} + \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) e^{-\gamma_R y'} \right],$$

$$B_{22} = \frac{-2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) \left[+ \frac{2p^2}{K^2} e^{-\gamma_R y'} + \left(1 - \frac{2p^2}{K^2}\right) e^{-\gamma_K y'} \right],$$

これらの積分は次の型に整理出来る。 $\gamma_R = \sqrt{p^2 - K^2}$, $\gamma_K = \sqrt{K^2 - p^2}$

$$M(x, y, y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_R y - \gamma_K y'} \frac{\cos p x}{\Delta \sqrt{p^2 - K^2}} dp, \quad (5.20)$$

$$N(x, y, y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\gamma_K y - \gamma_R y'} \frac{\cos p x}{\Delta \sqrt{p^2 - K^2}} dp, \quad (5.21)$$

100)
 附録 C に 積分表示と漸近展開を示す。

以下 γ と ω を計算する。

$$g_1 \equiv \frac{\partial u_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y'} = -\frac{\partial s_{11}}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (s_{11} - s_{12}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y \partial y'} (s_{21} - s_{22})$$

$$g_2 \equiv \frac{\partial u_{12}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y'} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (s_{11} - s_{12}) + \frac{\partial s_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^3}{R^2 \partial y^2 \partial y'} (s_{21} - s_{22})$$

$$h_1 \equiv \frac{\partial u_{21}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{11}}{\partial y'} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (s_{21} - s_{22}) - \frac{\partial s_{11}}{\partial y} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial y'} (s_{11} - s_{12})$$

$$h_2 \equiv \frac{\partial u_{22}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{12}}{\partial y'} = -\frac{\partial s_{21}}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (s_{21} - s_{22}) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial y'} (s_{11} - s_{12})$$

$$g_3 \equiv \frac{\partial T_{11}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y'} = -2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y'} \right) + \frac{\partial y}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} s_{21} \right] \\ + \frac{\partial x}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} s_{12} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} s_{22} \right),$$

$$g_4 \equiv \frac{\partial T_{12}}{\partial x'} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y'} = 2 \frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} s_{21} \right] \\ + \frac{\partial y}{\partial s} \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_{12} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} s_{22} \right],$$

$$h_3 \equiv \frac{\partial T_{21}}{\partial x'} - \frac{\partial T_{11}}{\partial y'} = -2 \frac{\partial h_2}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_{21} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} s_{11} \right] \\ + \frac{\partial x}{\partial s} \left[+\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s_{22} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} s_{12} \right],$$

$$h_4 \equiv \frac{\partial T_{22}}{\partial x'} - \frac{\partial T_{12}}{\partial y'} = 2 \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_{21} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} s_{11} \right] \\ - \frac{\partial y}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s_{22} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} s_{12} \right],$$

$$f_1 = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{22}}{\partial y \partial y'} \right]$$

$$- \frac{\partial^2 S_{11}}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 S_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{21}}{\partial y \partial y'} \right]$$

$$= \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial S_{11}}{\partial y} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y'} \right] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{22}}{\partial y \partial y'} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G_1} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{G_2}$

$$f_2 = - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial S_{11}}{\partial y} + \frac{\partial S_{21}}{\partial y'} \right] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{22}}{\partial y \partial y'} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G_1} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{G_2}$

$$h_1 = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y'} \right] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 S_{11}}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^2 S_{21}}{\partial x^2} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H_2} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{H_1}$

$$h_2 = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y'} \right] + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 S_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_{11}}{\partial y \partial y'} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H_2} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{H_1}$

$$k^2 \underbrace{G_2}_{\equiv} \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{12} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} S_{22} = \frac{-ik^2}{4} [H_0(KR) + H_0(KR')] + \frac{1}{2\pi} \int$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [B_{12}] - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} [B_{22}] = \frac{2(1 - \frac{p^2}{k^2})}{\Delta} \left[\left(-p^2 \frac{\partial^2 \tilde{g}_R}{\partial k^2} + \frac{2p^2}{k^2} \tilde{g}_R \tilde{g}_K \right) e^{-\tilde{g}_K y'} \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right) (-p^2 + \tilde{g}_R \tilde{g}_K) e^{-\tilde{g}_K y'} \right] \\ = \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right)^2 (\tilde{g}_R \tilde{g}_K - p^2) e^{-\tilde{g}_K y'}$$

$$k^2 \int_0^X G dx = \frac{\partial}{\partial y} S_{11} + \frac{\partial}{\partial y'} S_{21} = \frac{1}{2\pi} \int$$

$$\frac{\partial}{\partial y} B_{11} + \frac{\partial}{\partial y'} B_{21} = \frac{2(1 - \frac{p^2}{k^2})}{\Delta} \left[e^{-\tilde{g}_K y'} \left(\frac{2p^2}{k^2} \tilde{g}_R - \frac{2\tilde{g}_R \tilde{g}_K}{k^2} \right) \right.$$

$$\left. + e^{-\tilde{g}_K y'} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2} \right) (\tilde{g}_R - \tilde{g}_K) \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{g}_R \tilde{g}_K - K^2}$

$$k^2 H_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} S_{21} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} S_{11} = \frac{i k^2}{4} [H_0(kR) + H_0(kR')] + \frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B_{21}] - \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} [B_{11}] &= \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) \left[e^{-g_k y'} \left(-\frac{2p^2 g_k g_k}{k^2} + \frac{2p^2 g_k g_k}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) e^{-g_k y'} (-p^2 + g_k g_k) \right] \\ &= \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right)^2 (g_k g_k - p^2) e^{-g_k y'} \end{aligned}$$

$$\Delta = k^2 - p^2$$

$$k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial S_{12}}{\partial y'} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} B_{12} + \frac{\partial}{\partial y} B_{22} &= \frac{2}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) \left[e^{-g_k y'} \left(-\frac{2g_k^2 g_k}{k^2} + \frac{2p^2 g_k}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) e^{-g_k y'} (-g_k + g_k) \right] \\ &= \frac{4}{\Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) g_k e^{-g_k y'} \end{aligned}$$

$$g_1 = \frac{\partial}{\partial y} G_1 + \frac{\partial}{\partial x} G_2$$

$$g_2 = -\frac{\partial}{\partial x} G_1 + \frac{\partial}{\partial y} G_2$$

$$h_1 = \frac{\partial}{\partial x} H_2 - \frac{\partial}{\partial y} H_1$$

$$h_2 = \frac{\partial}{\partial y} H_2 + \frac{\partial}{\partial x} H_1$$

(5.22)

$$g_3 = -2 \frac{\partial}{\partial s} g_2 - k^2 \left[\frac{\partial}{\partial n} G_1 + \frac{\partial}{\partial n} G_2 \right]$$

$$g_4 = 2 \frac{\partial}{\partial s} g_1 + k^2 \left[\frac{\partial}{\partial n} G_1 - \frac{\partial}{\partial n} G_2 \right]$$

$$h_3 = -2 \frac{\partial}{\partial s} h_2 + k^2 \left[\frac{\partial}{\partial n} H_1 - \frac{\partial}{\partial n} H_2 \right]$$

$$h_4 = 2 \frac{\partial}{\partial s} h_1 - k^2 \left[\frac{\partial}{\partial n} H_1 + \frac{\partial}{\partial n} H_2 \right]$$

(5.23)

$$\gamma = \int_C [\tau_1 g_3 + \tau_2 g_4 - \tau_1 g_1 - \tau_2 g_2] ds.$$

$$= \int_C \left[g_2 \left[2 \frac{\partial u_1}{\partial s} - 2 g_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} - \tau_1 g_1 - \tau_2 g_2 \right] \right.$$

$$\left. + k^2 \int [u_s G_1 - u_n G_2] ds. \right.$$

$$= k^2 \int [u_s G_1 - u_n G_2] ds$$

$$+ \int_C \left[\frac{\gamma}{k^2} \left(\omega \frac{\partial \gamma}{\partial n} - \frac{2}{1-\nu} \gamma \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) - \frac{\gamma}{k^2} \left(\omega \frac{\partial \chi}{\partial n} + \frac{2}{1-\nu} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) \right] ds$$

$$= \int_C \left[\omega \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} g_1 - \frac{\partial \chi}{\partial n} g_2 \right) - \frac{2}{1-\nu} \gamma \left(g_1 \frac{\partial \chi}{\partial n} + g_2 \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) \right] ds$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial n} - \frac{\partial G_2}{\partial s}$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial s} + \frac{\partial G_2}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n}$$

$$\gamma = \int_C \left[\frac{\partial G_1}{\partial n} \omega - \frac{2}{k^2} \gamma \frac{\partial G_1}{\partial s} + k^2 u_s G_1 \right] ds$$

$$+ \int_C \left[-k^2 u_n G_2 - \omega \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{k^2}{k^2} \gamma \frac{\partial G_2}{\partial n} \right] ds$$

$$= \int_C \left(\omega \frac{\partial G_1}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} G_1 \right) ds$$

$$+ \frac{k^2}{k^2} \int_C \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} G_2 - \gamma \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) ds, // (5.24)$$

$$W = \int_C (u_1 h_3 + u_2 h_4 - \tau_1 h_1 - \tau_2 h_2) ds$$

$$= \int_C \left[h_1 \left(-\tau_1 + 2 \frac{\partial u_2}{\partial s} \right) + h_2 \left(-\tau_2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial s} \right) \right] ds$$

$$+ \frac{R^2}{k} \int_C (-u_s H_1 - u_n H_2) ds$$

$$= \int_C \left[\left(\omega \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{R^2}{k^2} \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) h_1 - h_2 \left(\omega \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{R^2}{k^2} \delta \frac{\partial \delta}{\partial n} \right) \right] ds$$

$$= \int_C \left[\omega \left(h_1 \frac{\partial u}{\partial n} - h_2 \frac{\partial v}{\partial n} \right) - \frac{R^2}{k^2} \gamma \left(h_1 \frac{\partial \gamma}{\partial n} + h_2 \frac{\partial \delta}{\partial n} \right) \right] ds$$

$-\frac{\partial H_2}{\partial s} - \frac{\partial H_1}{\partial n} \qquad \frac{\partial H_2}{\partial n} \sim \frac{\partial H_1}{\partial s}$

$$W = \int_C \left[- \left(R^2 u_s + \frac{R^2}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) H_1 - \omega \frac{\partial H_1}{\partial n} \right] ds$$

$$+ \int_C \left[\left(-R^2 u_n + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) H_2 - \frac{R^2}{k^2} \delta \frac{\partial H_2}{\partial n} \right] ds$$

$$= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} H_1 - \omega \frac{\partial H_1}{\partial n} \right) ds$$

$$+ \frac{R^2}{k^2} \int_C \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} H_2 - \gamma \frac{\partial H_2}{\partial n} \right) ds \quad // \quad (5.25)$$

2.12

$$G_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{K^2}{R^4} \int_0^\infty e^{-g_K y - g_K y'} \frac{P(1 - \frac{z p^2}{R^2})}{\Delta} \sin p x dp,$$

$$\frac{R^2}{K^2} G_2 = -\frac{i}{4} \left[H_0^{(1,2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR') \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-g_K(y+y')} \frac{(1 - \frac{z p^2}{R^2})^2 (g_R g_K - p^2)}{K^2 \Delta \sqrt{p^2 - K^2}} \cos p x dp, \quad (5.26)$$

$$H_1 = \frac{i}{4} \left[H_0^{(1,2)}(KR) + H_0^{(1,2)}(KR') \right]$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-g_K(y+y')} \frac{(1 - \frac{z p^2}{R^2})^2 (g_R g_K - p^2)}{K^2 \Delta \sqrt{p^2 - K^2}} \cos p x dp,$$

$$\frac{R^2}{K^2} H_2 = -\frac{2}{\pi K^2} \int_0^\infty e^{-g_K y - g_K y'} \frac{(1 - \frac{z p^2}{R^2}) p}{\Delta} \sin p x dp, \quad (5.27)$$

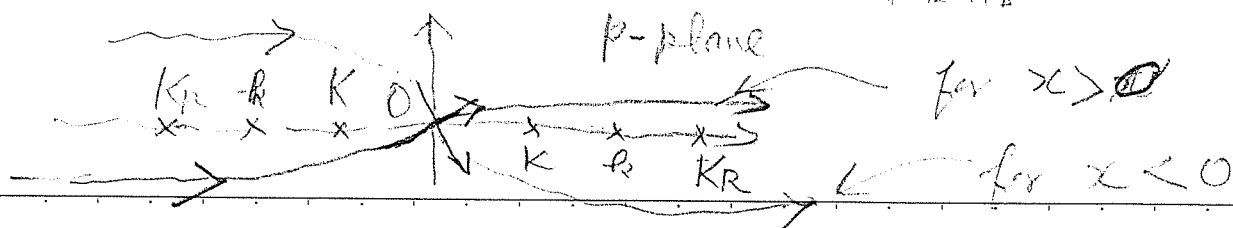
これらの積分は又複素形式で表現してよい。

3.1.12

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos p x [] dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i p x} [] dp,$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin p x [] dp = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i p x} [] dp,$$

となり積分路は (15) のようにとる。



そのように解する本として (4.3) と同様に

$$P(p_x, q_k y) = \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) e^{ipx - \sqrt{p^2 - k^2} y} dS, \quad (5.28)$$

$$\Omega(p_x, q_k y) = \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) e^{ipx - \sqrt{p^2 - k^2} y} dS, \quad (5.29)$$

と定義すると (5.24), (5.25) は

$$\begin{aligned} \gamma(Q) = & \gamma_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{(1 - \frac{2p^2}{k^2})^2 (p^2 - q_k q_k)}{k^2 \Delta} \right] e^{-ipx' - q_k y'} \\ & \times P(p_x, q_k y) \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \\ & + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(1 - \frac{2p^2}{k^2})}{\Delta} e^{-ipx' - q_k y'} \Omega(p_x, q_k y) dp, \quad (5.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \omega_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{(1 - \frac{2p^2}{k^2})^2 (p^2 - q_k q_k)}{k^2 \Delta} \right] e^{-ipx' - q_k y'} \\ & \times \Omega(p_x, q_k y) \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{p(1 - \frac{2p^2}{k^2})}{\Delta} e^{-ipx' - q_k y'} P(p_x, q_k y) dp, \quad (5.31) \end{aligned}$$

$$\gamma_0(Q) = -\frac{i}{4} \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) dS$$

$$\omega_0(Q) = -\frac{i}{4} \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) dS \quad \left. \begin{array}{l} (5.32) \\ \text{right?} \end{array} \right\}$$

$$\gamma_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx' - \sqrt{p^2 - k^2} y'} \Gamma(p, k, y) \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}}, \quad y' > y,$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx' - \sqrt{p^2 - k^2} y'} \Omega(p, k, y) \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}} \text{ for } y' > y, \quad (5.3)$$

このようにして 自由表面がある場合は 鏡像からの半射線
と 連続体ならば 横波が 自由表面に反射に出てくる
縦成分と レーリー波を含む事になる。

6. 境界積分方程式とその解法

前節の特性性を用いると変位はやはり (2.7) で表現出来, 自由表面の積分は T_{ij} および T_i が 0 であるから消える。

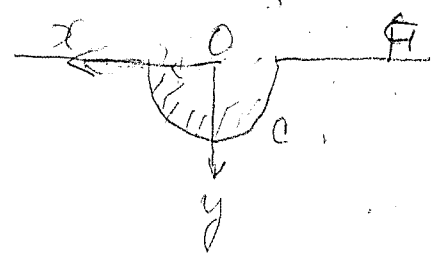
境界条件を与える積分方程式は 3 枚板

$$u_j(Q) = \int_C [u_i(P) T_{ij}(P, Q) - T_i(P) u_{ij}(P, Q)] dS, \quad (6.1)$$

for $Q \in C$

可逆性によって地震による力 および変位は放射問題を解けば求められるので以下それについてのみ考える。

先ず 1 図のように C が完全に剛な固体である場合を考える。[問題 I]



[一般には C は地震によって振動を始めるので先の振動モードに対応して境界条件を考えねばならないが今は最も基本的なモードとして固体的上下, 左右, 回転振動を考えようとするわけである。]

上下振動に対しては (単位振幅とする)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad \text{--- (6.2)}$$

左右振動に対しては

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0, \quad \text{--- (6.3)}$$

回転振動に対しては (原点中心として)

$$u_1 = -y, \quad u_2 = +x, \quad \text{--- (6.4)}$$

$$\text{or } u_1 = 0, \quad u_2 = y,$$

これを (6.1) に代入すれば "フレッドホルム" の第1種方程式となりこれを解けばよい。

さて (6.2) ~ (6.4) の変位が C と自由表面で囲まれた領域全体で "そうなる" という字とするとこれらの変位による応力は (1.8) によりすべて 0 となるので

$$\int_C (u_1 T_{11} + u_2 T_{22}) ds = 0, \quad \text{--- (6.5)}$$

この等式が成立つので (6.1) は今の場合は

$$u_j(Q) = - \int_C T_i(P) u_{ij}(P, Q) ds, \quad \text{--- (6.6)}$$

と単純化される。

前述のように一般には境界 C 上の変位条件は固体の各振動モードに対して計算しなければならぬがその時でもこれらの変位は明らかに C の内部で正則であるから (6.5) は成立ちそれ故一般に (6.6) も成立つ。

次に図のように溝があって

自由表面上の1点から

強制的に加振される場合

を考えよう。〔問題Ⅱ〕

(原点における)

よび強制力 α_j による変位 $u_j^{(0)}$ は

$$u_j^{(0)}(Q) = -\alpha_i u_{ij}(0, Q), \quad \text{--- (6.7)}$$

この変位は C_1, C_2 によって反射散乱されるから

その影響による変位を $u_j^{(1)}$ としよう。

その境界条件は

$$T_j^{(0)}(P) + T_j^{(1)}(P) = 0, \quad P \text{ on } C_1, C_2, \quad \text{--- (6.8)}$$

ここで Q が領域内にあれば $u_i^{(0)}, T_i^{(0)}$ は C_1, C_2 の内部で正則な

$$\int_{C_1+C_2} [u_i^{(0)}(P) T_{ij}(P, Q) - T_i^{(0)}(P) u_{ij}(P, Q)] ds = 0, \quad \text{--- (6.9)}$$

が成立つから $u_i^{(1)}$ に対する (6.1) の表現と
上式を加えて

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(1)}(Q) &= \int_{C_1+C_2} u_i(P) T_{ij}(P, Q) ds, \\ u_i(P) &= u_i^{(0)} + u_i^{(1)}, \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (6.10)}$$

あるいは又

$$u_i(Q) - \int_{C_1+C_2} u_i(p) T_{ij}(p, Q) ds = u_j^{(6)}(Q), \quad (6.11)$$

このように変形して (6.7) を見るとこれは Q 点から震源の場合の変位方程式と同形であるから最初に述べた可逆性の裏づけは明らかであろう。

さてこのようにして解くべき積分方程式は決つてつづこれらの核関数は 5 節で見たように大変複雑なものでそれらの特に積分の計算には大変時間を喰ひそうであるが、解くのはあまり上策ではないように思われる。

5 節のような核関数を求めた目的の一つは無限領域の場合の 2 節の核関数では自由表面上の積分が残るのでそれをなくして簡潔化するかにあつた款であるがこう複雑になってはその有利性は失われてしまう。

そこでもう一度 2 節の核関数を使う事を考えなおして見よう。

以下 2 節の核関数を使用するものとする。

そうすると (6.1) は F を自由表面, R を充分大きな半円
として

$$u_j(Q) = \int_{C+F+R} [u_i(P)T_{ij}(P,Q) - T_i(P)u_{ij}(P,Q)] ds, \quad (6.12)$$

となる。

これを解くには所謂領域分割法

のように R 上の u_i, T_i の漸近展開を用い

R 上の積分を評価して, C と F 上での境界条件を
満たすようにすればよい。

しかしこの方法では R の位置のとり方に注意が必要
あり少し不安が残る。

R 上の積分は R を無限に大きくすれば^{本来}よい
になるものがあるが そうすると F を無限遠方まで
とるわけは^{積分}ならず^{積分}この評価をするとすると R を
ある所から先は漸近展開を使って
考えるのと同じ事になる。

この難点をさけるために F と無限遠点で
 u_j と同じ漸近展開を持つ関数 $u_j^{(0)}$ を
考えて $(u_j - u_j^{(0)})$ について (6.12) を構成すると

$\bar{H}$ の無限遠方では

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(1)} &\equiv u_j^{(1)}(\infty) - u_j^{(1)}(0) \\ T_j^{(1)} &\equiv T_j^{(1)}(\infty) - T_j^{(1)}(0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} |x| &\gg 1 \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

とする事になるので、その積分は消えて問題なくなり

$$u_j^{(1)}(0) = \int_{C \cup \bar{H}} [u_j^{(1)}(p) T_j^{(1)}(p, 0) - T_j^{(1)}(p) u_j^{(1)}(p, 0)] ds, \quad (6.14)$$

を境界積分方程式として使ってよい。

境界条件は C 上では問題 I の場合 (6.2) $\wedge$ (6.4)

から

$$u_j^{(1)} = a_j - u_j^{(1)} \quad \text{on } C, \quad (6.15)$$

a_j は (6.2) $\sim$ (6.4) の条件を意味するものとする。

又 $\bar{H}$ 上では

$$T_j^{(1)} = 0 \quad \text{on } \bar{H}, \quad (6.16)$$

$$\text{なお } u_j^{(1)} \text{ は } T_j^{(1)} = 0 \quad \text{on } \bar{H}, \quad (6.16')$$

を満たすものとする。

今の核関数では (6.5) は成立たず

$$\int_C (a_1 T_{j1} + a_2 T_{j2}) ds = \int_{\bar{H}} (a_1 T_{j1} + a_2 T_{j2}) ds, \quad (6.17)$$

2.12 $\bar{H}$ は自由表面の C 内にある部分とする。

今の場合はこの関係を導入するとかえって式が複雑になる

さて $u_j^{(0)}$ は (6.16) を満たすとしたのでこれは 5 節の解でなければならぬ。又 (6.13) の条件を満たすにはその漸近展開から

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^{(0)}(Kx, 0) &= \Gamma^{(1)}(Kx, 0) \\ \Gamma^{(0)}(Kx, -\sqrt{K^2 - k^2}y) &= \Gamma^{(1)}(Kx, -\sqrt{K^2 - k^2}y) \\ \Gamma^{(0)}(K_R x, -\sqrt{K_R^2 - k^2}y) &= \Gamma^{(1)}(K_R x, \sqrt{K_R^2 - k^2}y) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{(0)}(Kx, 0) &= \Omega^{(1)}(Kx, 0) \\ \Omega^{(0)}(K_R x, -\sqrt{K_R^2 - k^2}y) &= \Omega^{(1)}(K_R x, -\sqrt{K_R^2 - k^2}y) \\ \Omega^{(0)}(K_R x, -\sqrt{K_R^2 - k^2}y) &= \Omega^{(1)}(K_R x, -\sqrt{K_R^2 - k^2}y) \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

PSR(5.28), (5.29) の定義によつて。

$u_j^{(0)}$ はなるべく簡単でかつ上の 3 組の条件を満たすには x 軸又は y 軸上に適当な特異点をおけばよいからその内 $y=0$ とすると式 1, 式 2 式の右辺は等しくなつて具合が悪いので y 軸上に点特異点を置けばよい。

さて $y=0$ の点では (t_1, t_2) を任意に与えられるだけであり、 $y>0$ の点では $(u_1, u_2), (t_1, t_2)$ の

2 組を任意に与えられるから これで合計 5 組の
任意定数も確保出来る。

それ故 $u_j^{(0)}$ としたのは 原点 と その直下 相当な
位置に 点 特異性を 置いたものでよい。

したが (6.14) を (6.18), (6.19) の 副条件 の下 (6.15),
(6.16) の 境界値問題を 積分方程式 として 解くと

C 上で $\tau_j^{(1)}$, H 上で $u_j^{(1)}$ が得られ (6.13) の
関係から u_j, τ_j が 求め 計算出来る。

この方法では 問題 II でも 起振力による項を
含めた 変位を u_j とすると 全く 同形で 境界条件は

$$\tau_j = \tau_j^{(1)} - \tau_j^{(0)} = 0 \quad \text{on } C \text{ and } H, \quad (6.20)$$

となる。

この場合も (6.9) の ^{よろな}関係の 導入は かえって
式を複雑化 すると思われる。

さて、このように核関数もこの節のものとして (2.4), (2.6) に見るように必ずしもそう簡単ではない。

そのような高次の特異性をさける方法としては未知関数を u_j, T_j のかわりに (1.10), (1.11) 等によつて $\sigma, \frac{\partial \sigma}{\partial n}, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial n}$ の組にとり, (2.10) を境界積分方程式として選べばよい。

これならば音響学等に表示されるもので数値計算の実績もかなり多くあるので問題はない。

但し C が閉じた有限の曲線である場合 (の内部が同じ媒質で出来てゐると考えてその固有値の所で解はないから注意しなければならぬ。 C が自由表面と交つて F も含む場合はその心配はないであらう。(固有値がかり) しかしこの方法では u_j, T_j が直接出て来ない点で後の処理が複雑であるけれど、逆に漸近展開をおめる時は便利であるので推奨に値する。

今は その場合の特異積分の取扱いも含めて (2.4)
(2.6) の積分についての注意を述べる。

積分方程式を解くに当っては $\sqrt{\epsilon}$ を微小直線要素
で近似するものとしよう。

- (1) その要素上で u_j は一定とする (あるいはそれが
与えられる程度に要素を小さくするかもしくは
要素が長い時は その中で u_j を階段関数で
近似して積分するものとする)

- (2) そうすると ϵ_j は u_j の微分であるから 要素の中で
のどこなり従って 端点に ^{おける} 集中力で近似する事
と同等であるから 以下そうする事にしよう。

又境界条件は常に要素の中心で指定
する事にする。

とす ϵ_j は要素の端の集中力とする事から
 u_{ij} (2.4) は積分の必要がなくなり (2.6) の T_{ij} を
積分する事を考えればよい。

幸いこれら右辺の第2項はすべて S の微分

を含むのでそれらは1項として積分出来る。

右辺が1項に帰して例えは

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2} \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) + \frac{\partial X}{\partial n} \frac{\partial}{\partial X} H_0(KR)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) + \left(\frac{\partial X}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR)$$

$$+ \frac{\partial^2 X}{\partial n^2} \frac{\partial X}{\partial n} \frac{\partial}{\partial s} [H_0(KR) - H_0(KR)], \quad (6.21)$$

となり要素上で方向余弦は一定であるから

右辺が2項は直ちに積分出来て、結果

$$I(Q) = \int_A^B \frac{\partial}{\partial n_p} H_0^{(2)}(KR) ds_p, \quad \dots (6.22)$$

だけが問題でこれは又Q点から要素上に来ると

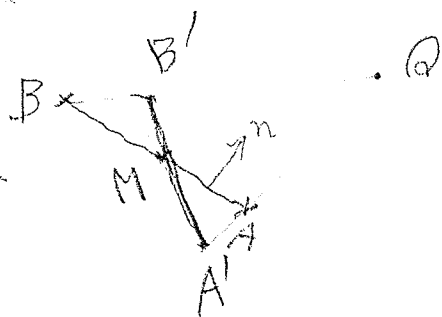
ジャヤフがあるので注意しなければならぬ。

今右図のようにQA, QBを結ぶ

M (ABの中点)を通り $\overline{QM} \equiv R_M$,

を半径として円を描き $\overline{AQ}, \overline{BQ}$

と交わる点を A', B' としよう。



グリーンの定理によつて、

$$I(Q) = - \int_{A'}^{B'} \frac{\partial}{\partial R} H_0^{(2)}(kR) \cdot R d\Theta - k^2 \iint_{\triangle AMA' - \triangle BMB'} H_0^{(2)}(kR) dx dy, \quad (6.23)$$

なぜなら $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 上では法線微分は 0 となるからである。

又要素の長さは $kAB \ll 1$ のように選ばれるであろうから右辺の 2 項は 1 項に較べて小さく、さらにその積分は $\triangle AMA'$ 上のものと $\triangle BMB'$ 上のものの差であるから、かなり小さいと考えられる。(Q が AB の二等分線上にある時はそうならないかわりに 3 角形の面積が小さくなるのでやはり小さくなる)

そこで近似的に

$$I(Q) \approx k R_M H_1^{(2)}(k R_M) \Delta\Theta, \quad (6.24)$$

$$\Delta\Theta = \angle AQB$$

特に

$$I(Q) \xrightarrow{Q \rightarrow M} \mp 2i, \quad (6.25)$$

これは正しい結果であるから (6.24) の精度は

かなり高いものと期待出来る。

別録 A ハンケル 関数の フーリエ 変換

フーリエ 変換 の 案 から

$$\int_0^{\infty} H_0^{(1)}(kr) \cos px \, dx = \frac{i e^{-\sqrt{p^2 - k^2} r}}{\sqrt{p^2 - k^2}} \quad (A.1)$$

$$H_0^{(2)}(kr) \approx \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{p^2 - k^2} r} \cos px}{\sqrt{p^2 - k^2}} \, dp \quad (A.2)$$

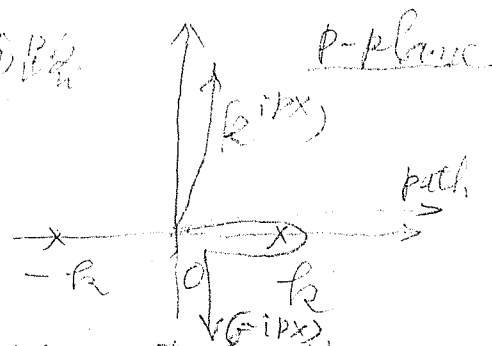
こゝに $k > 0$ とし $k > p$ の時は左のようにとるものとす。

$$\sqrt{p^2 - k^2} = i \sqrt{k^2 - p^2}$$

これは複素 p 平面において積分路

右図のように実軸の少し上側を

通っているものと解すればよい。



ハンケル関数の積分表示は教科書に載っているがこゝでは別録Bの関数の積分表示を求めるための準備として (A.2) を変形して見る。

まず (A.2) において $2 \cos px = e^{ipx} + e^{-ipx}$ とおき e^{ipx} は上半面で e^{-ipx} は下半面で正則であるから

積分路を k より e^{ipx} については 虚軸 に沿って

直直ぐ上方に e^{-ipx} については 円 のように C_{ct}

を折って 垂直下方に変形すると 次式を得る。

$$H_0^{(2)}(kR) = \frac{2i}{\pi} \int_0^\infty e^{-\eta R} \frac{\cos(\eta \sqrt{R^2 + \eta^2})}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} d\eta$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-ikR(\theta + \eta \cos \theta)} d\theta \quad (A.3)$$

(ただし $\eta = k \sin \theta$ とおく)

R が充分大きいとき右辺の1項は $O(\frac{1}{R})$ で

2項に上して充分小さいから

$$H_0^{(2)}(kR) \xrightarrow{R \gg 1} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-ikR \cos(\theta + \varphi) + ikR' \cos(\theta + \varphi')} d\theta \quad (A.4)$$

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')$$

2次元定常点法を適用すると、 $\varphi = \varphi'$ の定常点は

$$\pi > \theta = -\varphi + \frac{\pi}{2} > 0 \quad \text{および} \quad \theta > 0$$

積分は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+ \frac{i}{2} k R z^2} dz = \frac{i}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} k R} = \sqrt{\frac{2i}{\pi k R}}$$

$$\therefore H_0^{(2)}(kR) \xrightarrow{R \gg 1} \sqrt{\frac{2i}{\pi k R}} e^{i k R' \cos(\varphi' - \varphi) - i k R} \quad (A.5)$$

これは (8.1) に等しい。

附録 B Δ の根, Rayleigh 波

$$\Delta = \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right)^2 - 4\left(\frac{p}{k}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{p}{k}\right)^2 - 1} \sqrt{\left(\frac{p}{k}\right)^2 - \frac{k^2}{k^2}}, \quad (B.1)$$

この根はよく知られているようにレーリー波の波数である。
それを K_R と書く事にしよう。

複素 p 平面で Δ は $p = \pm K_R$ に零点をもち
 k と K , $-k$ と $-K$ を結ぶ各2つの cut をもっている。

$p = K_R$ の近くでは

$$\Delta \underset{p \rightarrow K_R}{\sim} \frac{(p^2 - K_R^2)}{k^2} A(K_R), \quad \dots \quad (B.2)$$

$$A' = \frac{\partial}{\partial x} \left[(2x-1)^2 - 4x \sqrt{(x-1)(x-\frac{1-x}{2})} \right] \Big|_{x=\frac{K_R^2}{k^2}}, \quad (B.3)$$

本文の諸式は 静力学で言う 平面応力問題 (薄板)
であり, 地震では 平面歪問題 (2方向に無限に
厚くて 2方向の歪が一定) とする方が適しているで
あろうか するとポアソン比のは 本文のと力の関係が異なる。

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (B.4)$$

数値例を示せば

ν	σ	K_R/k	A	$B = \frac{2K_R}{k} A$	$C = B \sqrt{\frac{K_R^2}{k^2} - 1}$	$C' = B \sqrt{\frac{K_R^2}{k^2} - \frac{k^2}{k^2}}$
$1/2$	$1/3$	1.072	25.95	55.64	21.55	52.78
$1/3$	$1/4$	1.088	26.08	56.73	24.27	52.29

附録 C

$$M(x, y, y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2 - R^2} y - \sqrt{p^2 - K^2} y'} \frac{\cos px}{\Delta \sqrt{p^2 - R^2}} dp, \quad (C.1)$$

$$N(x, y, y') = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2 - K^2} y - \sqrt{p^2 - R^2} y'} \frac{\cos px}{\Delta \sqrt{p^2 - K^2}} dp, \quad (C.2)$$

積分路は附録 A のように解するものとする。

このまゝでは Δ の零点のため数値積分は困難であるので附録 A のように積分路を変更すると

$$M = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-mx} \frac{\cos(\sqrt{m^2 - R^2} y + \sqrt{m^2 - K^2} y')}{\Delta(\pm im) \sqrt{R^2 - m^2}} dm + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} \frac{e^{-iR(x \sin \theta + y \cos \theta) - i\sqrt{R^2 - K^2} \sin \theta y'}}{\Delta(R \sin \theta)} d\theta - i \frac{e^{-iKRx - \sqrt{R^2 - K^2} y - \sqrt{R^2 - R^2} y'}}{C}, \quad (C.3)$$

$$\Delta(\pm im) = \left(1 + \frac{2m^2}{R^2}\right)^2 + \frac{4m^2}{R^4} \sqrt{(R^2 - m^2)(K^2 + m^2)}$$

$$\Delta(R \sin \theta) = (1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{K^2}{R^2} - \sin^2 \theta} = \cos^2 2\theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1-\nu}{2} - \sin^2 \theta} \quad \text{for } \sin \theta < \frac{1-\nu}{2}$$

$$= \cos^2 2\theta + 4i \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{1-\nu}{2}} + \text{sign} \quad \text{for } \sin \theta > \frac{1-\nu}{2}$$

$$N = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-mx} \frac{\cos(\sqrt{m^2 - R^2} y' + \sqrt{m^2 - K^2} y)}{\Delta(\pm im) \sqrt{K^2 + m^2}} dm$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} \frac{e^{-iK(x \sin \theta + y \cos \theta) - i\sqrt{K^2 - R^2} \sin \theta y'}}{\Delta(K \sin \theta)} d\theta - i \frac{e^{-iKRx - \sqrt{K^2 - R^2} y - \sqrt{K^2 - R^2} y'}}{C} \quad (C.4)$$

$$\Delta(K, \theta) = \left(1 - \frac{2K^2}{R^2} \sin^2 \theta\right)^2 + \frac{4K^3}{R^3} \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 - \frac{K^2}{R^2} \sin^2 \theta},$$

$$\text{for } K\theta < \frac{2}{1-D}$$

$$= \left(1 - \frac{1-D}{2} \sin^2 \theta\right)^2 - i \frac{(1-D)^3}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\frac{1-D}{2} \sin^2 \theta - 1}$$

$$\text{for } K\theta > \frac{2}{1-D}$$

(2 次根号内は正)

x, y が充分大で M, N は右辺が 1 になる

無視出来て 2 項は 付録 A 同様見れば

$$M(x-x', y, y') = \frac{e^{-iKr + iKx' \cos \varphi - i\sqrt{K^2 - R^2 \cos^2 \varphi} y'}}{\sqrt{2i\pi Ry} \Delta(K \cos \varphi)}$$

$$- \frac{i}{c} e^{-iKRx - \sqrt{K^2 - R^2} y + iKx' - \sqrt{K^2 - R^2} y'}$$

(C.5)

$$N(x-x', y, y') = \frac{e^{-iKr + iKx' \cos \varphi - i\sqrt{K^2 - R^2 \cos^2 \varphi} y'}}{\sqrt{2i\pi Ry} \Delta(K \cos \varphi)}$$

$$- \frac{i}{c} e^{-iKRx - \sqrt{K^2 - R^2} y + iKx' - \sqrt{K^2 - R^2} y'}$$

(C.6)

自由表面より $y=0$ として

$$M(x-x', 0, y') = \frac{e^{-iKr + iKx' - \sqrt{K^2 - R^2} y'}}{\sqrt{2i\pi Ry}} - \frac{i}{c} e^{-iKRx + iKx' - \sqrt{K^2 - R^2} y'}$$

(C.7)

$$N(x-x', 0, y') = \frac{e^{-iKr + iKx' - i\sqrt{K^2 - R^2} y'}}{\sqrt{2i\pi Ry}} - \frac{i}{c} e^{-iKRx + iKx' - \sqrt{K^2 - R^2} y'}$$

(C.8)

T.F. 7

$$M(x-x', y+y', 0) \doteq \frac{e^{-ikr + ik(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)}}{\sqrt{i\pi k r} \Delta(k, \cos\varphi)}$$

$$= \frac{i}{c} e^{-ikr(x-x') - \sqrt{k_r^2 - k^2}(y+y')} \quad \dots (C.9)$$

$$N(x-x', y+y', 0) \doteq \frac{e^{-ikr + ik(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi)}}{\sqrt{i\pi k r}}$$

$$= \frac{i}{c} e^{-ikr(x-x') - \sqrt{k_r^2 - k^2}(y+y')} \quad \dots (C.10)$$

(C.3), (C.4) の積分表示の右辺第2項は次のように書く事も出来る。

$$I_M = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{e^{-iK(x/\lambda\theta + y'\cos\theta) + (iKx\sin\theta - \sqrt{K^2\lambda^2\theta - R^2}y)}}{\Delta(K\lambda\theta)} \frac{K\cos\theta}{\sqrt{K^2\lambda^2\theta - R^2}} d\theta, \quad \text{for } M. \quad (C.11)$$

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{e^{-iK(x/\lambda\theta + y'\cos\theta) + (iKx\sin\theta - \sqrt{R^2\lambda^2\theta - K^2}y)}}{\Delta(R\lambda\theta)} \frac{R\cos\theta}{\sqrt{R^2\lambda^2\theta - K^2}} d\theta, \quad \text{for } N. \quad (C.12)$$

for $x' \gg x$,

C.12

$$\sqrt{K^2\lambda^2\theta - R^2} = \pm i\sqrt{R^2 - K^2\lambda^2\theta}, \quad + \text{ for } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ - \text{ for } \pi > \theta > \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{R^2\lambda^2\theta - K^2} = \pm i\sqrt{K^2 - R^2\lambda^2\theta} \quad \text{for } \frac{K}{R} > \lambda\theta \\ + \text{ for } \theta < \frac{\pi}{2} \\ - \text{ for } \theta > \frac{\pi}{2}$$

x, y' が充分大きいと

$$I_M \rightarrow \frac{e^{iKr'} + iKx\cos\varphi' - i\sqrt{R^2 - K^2\cos^2\varphi'}}{2\pi i K r'} \frac{1}{\Delta(K\cos\varphi')} \frac{K\lambda\varphi'}{i\sqrt{R^2 - K^2\cos^2\varphi'}}, \quad (C.13)$$

$$I_N \rightarrow \frac{e^{-iKr'} + iR\lambda\cos\varphi' - i\sqrt{K^2 - R^2\cos^2\varphi'}}{2\pi i R r'} \frac{1}{\Delta(R\cos\varphi')} \frac{R\lambda\varphi'}{\sqrt{R^2\cos^2\varphi' - K^2}}, \quad (C.14)$$

附錄 D $\lim_{k \rightarrow 0} S_{ij}$

$$\begin{aligned}
 A'_{11} &= -\frac{4b^2}{k^2 \Delta} \left[-\left(1 - \frac{k^2}{2p^2}\right) \frac{2b^2}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) + \frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) \right. \\
 &\quad \left. 1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y' \right] - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} b^2 y' \\
 &\quad \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y'\right) \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} b^2 y'\right) \\
 &= \frac{-4}{1+p} \left[+\frac{1+p}{2} + \frac{1+p}{2} p y' \right], \quad B_{11} - A'_{11} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= +\frac{4b^2}{k^2 \Delta} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2}\right) \left[\frac{2b^2}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) - \frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) \right. \\
 &\quad \left. 1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y' \right] \\
 &\quad \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y'\right) \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} b^2 y'\right) \\
 &= -\frac{4}{1+p} \left(1 - \frac{1+p}{2} p y'\right), \quad B_{11} - A'_{11} = -2 + \frac{4}{1+p} p y'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A'_{12} &= \frac{4b^2}{\Delta k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2}\right) \left[\frac{2b^2}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) - \frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y'\right) \right. \\
 &\quad \left. \frac{2b^2}{k^2} \left(1 + \frac{k^2}{2p} y'\right) - \frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} b^2 y'\right) \right] \\
 &\quad \left(1 - \frac{1+p}{2} p y'\right) \\
 &= -\frac{4}{1+p} \left(1 - \frac{1+p}{2} p y'\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{12} &= -\frac{4b^2}{\Delta k^2} \left[\frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y'\right) - \frac{2b^2}{k^2} \left(1 - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} y'\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^2}{2p^2} + \frac{k^2}{2p} b^2 y' \right] \\
 &= \frac{-4}{1+p} \left[-\frac{1+p}{2} + \frac{1+p}{2} p y' \right]
 \end{aligned}$$

$$B_{12} - A'_{12} = -2$$

$$B_{11} - B_{12} = -2, \quad A'_{11} - A'_{12} = 2 - \frac{4}{1+p} p y'$$

$$A'_{21} = \frac{4b^2}{R\Delta} \left[\frac{2p^2}{R^2} \left(1 + \frac{R^2}{2p} y' \right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{2p^2} + \frac{K^2}{2p} y' \right) \right]$$

$$1 - \frac{b^2}{2p^2} + \frac{R^2}{2p} K^2 y'$$

$$= - \frac{4}{1+\nu} \left[1 + \frac{1+\nu}{2} p y' \right]$$

$$B_{21} = + \frac{4}{1+\nu} \left[\frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{R^2}{2p^2} K^2 + \frac{K^2}{2p} y' \right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{2p^2} + \frac{R^2}{2p} y' \right) \right]$$

$$+ \frac{K^2}{2p^2} + \frac{K^2}{2p} b^2 y'$$

$$= - \frac{4}{1+\nu} \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} p y' \right)$$

$$B_{21} - A'_{21} = 2,$$

$$A'_{22} = \frac{4}{1+\nu} \left[\frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{R^2}{2p^2} K^2 + \frac{K^2}{2p} y' \right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{2p^2} + \frac{R^2}{2p} y' \right) \right]$$

$$- \frac{K^2}{2p^2} + \frac{K^2}{2p} b^2 y'$$

$$= - \frac{4}{1+\nu} \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} p y' \right)$$

$$B_{22} = - \frac{4}{1+\nu} \left[\frac{2p^2}{R^2} \left(1 + \frac{R^2}{2p} y' \right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{b^2}{2p^2} + \frac{K^2}{2p} y' \right) \right]$$

$$1 + \frac{R^2}{2p} p y'$$

$$= - \frac{4}{1+\nu} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} p y' \right)$$

$$B_{22} - A'_{22} = 2$$

$$R_{11} = 1$$

$$\Delta = - \frac{p^2}{R^2} (1+\nu)$$

$$\log R' = - \int_0^{\infty} \frac{p(p^2 + y^2)}{p^2 + R'^2} dp$$

$$-\frac{y y'}{R'^2} = \int_0^{\infty} \frac{p(p^2 + y^2)}{p^2 + R'^2} dp = \frac{\partial}{\partial y} \log R'$$

$$\frac{y}{R'} = 1 \Rightarrow \frac{3-y}{1+y}$$

$$\begin{aligned} \therefore S'_{11} &= -\frac{1}{2\pi} \log R' + \frac{2}{\pi(1+y)} \log R' + \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' \\ &= \frac{1+(3-y)}{2\pi(1+y)} \log R' + \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{12} &= \left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{1-y}{\pi(1+y)} \right) \log R' + \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' \\ &= \frac{3-y}{2\pi(1+y)} \log R' + \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' // \end{aligned}$$

$$S'_{21} = \frac{3-y}{2\pi(1+y)} \log R' - \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' //$$

$$S'_{22} = \frac{3-y}{2\pi(1+y)} \log R' - \frac{y'}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R' //$$

$$S'_{11} - S'_{12} = 0, \quad S'_{21} - S'_{22} = 0 //$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} - A'_{12} &= \frac{2}{\Delta} \left[e^{-\frac{2k y'}{R}} \left\{ -\frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2k y'}{R}} - \frac{2p^2}{R^2} \frac{2k y'}{R} e^{-\frac{2k y'}{R}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\frac{2k y'}{R}} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) \left\{ -\left(1 - \frac{p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2k y'}{R}} - \frac{2p^2}{R^2} \frac{2k y'}{R} e^{-\frac{2k y'}{R}} \right\} \right] \\
 &= \frac{-2}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2k y'}{R}} + \frac{2p^2}{R^2} e^{-\frac{2k y'}{R}} \right] \left[e^{-\frac{2k y'}{R}} \left(1 - \frac{p^2}{R^2}\right) + \frac{2p^2}{R^2} e^{-\frac{2k y'}{R}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{2p^2}{R^2} + \frac{k^2 y'}{2p}\right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{2p^2} + \frac{p^2 y'}{2p}\right) \\
 &\quad \left(-\frac{1-y}{2} - \frac{1+y}{2} p y\right) \\
 &\frac{2p^2}{R^2} \left(1 + \frac{k^2 y'}{2p}\right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{2p^2} + \frac{p^2 y'}{2p}\right) \\
 &\quad + 1 - \frac{1+y}{2} p y'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} - A'_{12} &= \frac{-2k^2}{p^2(1+y)} \left(\frac{1-y}{2} + \frac{1+y}{2} p y \right) \left(1 - \frac{1+y}{2} p y' \right) \\
 &= -\frac{k^2}{p^2} \left(\frac{1-y}{1+y} + p y \right) \left(1 - \frac{1+y}{2} p y' \right) \\
 &= -\frac{k^2}{p^2} \left[\frac{1-y}{1+y} + p y - \frac{1-y}{2} p y' \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (S'_{11} - S'_{12}) &= \frac{1+y}{16\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} R' + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1-y}{1+y} + p y - \frac{1-y}{2} p y' \right] e^{-\frac{p(1+y')}{R}} \cos p x \frac{dp}{p} \\
 &= \left[\frac{1+y}{16\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} R' + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-y}{1+y} \right) \frac{1}{R} R' + \frac{y}{2\pi} - \frac{1+y}{2} \frac{y'}{2y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} R' \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$u'_{11} = S'_{11} + \dots =$$

$$B_{21} - A'_{22} = \frac{2}{\Delta} \left[e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} \left\{ \frac{2p^2 k^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) + \frac{4p^2}{R^4} k^2 \right\} + e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} \left(1 - \frac{p^2}{k^2}\right) \left\{ \left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} + \frac{2p^2}{R^2} \right\} \right] e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}}$$

$$= \frac{2}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} + \frac{2p^2}{R^2} e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} \right] \times$$

$$\left[\left(1 - \frac{2p^2}{R^2}\right) e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} + \frac{2p^2}{R^2} e^{-\frac{2p^2 y'}{R^2}} \right]$$

$$\frac{2p^2}{R^2} \left(1 + \frac{k^2 y'}{2p^2}\right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{2p^2} + \frac{k^2 y'}{2p^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1+\nu}{2} p y'$$

$$\frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{k^2 y'}{2p^2} + \frac{k^2 y'}{2p^2}\right) - \frac{2p^2}{R^2} \left(1 - \frac{p^2}{2p^2} + \frac{k^2 y'}{2p^2}\right)$$

$$= -\frac{1-\nu}{2} - \frac{1+\nu}{2} p y'$$

$$B_k - A'_{22} = \frac{2R^2}{p^2(1+\nu)} \left(1 - \frac{1+\nu}{2} p y'\right) \left(\frac{1-\nu}{2} + \frac{1+\nu}{2} p y'\right)$$

$$\left[\frac{1-\nu}{2} + \left(\frac{1+\nu}{2} y' - \frac{1-\nu^2}{4} y\right) p \right]$$

$$= \frac{R^2}{p^2} \left[\frac{1-\nu}{1+\nu} + \left(y' - \frac{1-\nu}{2} y\right) p \right]$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_{21} - A'_{22} \right) e^{-\frac{p^2 y'}{R^2}} \frac{dp}{p} = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\nu}{1+\nu} \log R' + \frac{y y'}{2\pi R^2} \left(\frac{1-\nu}{2} y' - y' \right)$$

$$S'_{21} - S'_{22} = -\frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} R'^2 \log R' + \frac{1}{2\pi} \frac{1-\nu}{1+\nu} \log R' + \frac{y y'}{2\pi R^2} \left(\frac{1-\nu}{2} y' - y' \right)$$

$$= \left(\frac{1+\nu}{-8\pi} + \frac{1-\nu}{2\pi(1+\nu)} \right) \log R' + \frac{1+\nu}{8\pi} = \frac{1+\nu}{4\pi} \frac{x^2}{R'^2} + \frac{y y'}{2\pi R'^2}$$

「自由表面を持つ^{一様}半無限領域における
2次元弾性波の伝播について」

最終予想内容

概要

1. 場の方程式と変位の表現.
2. 自由表面のある場合の縦横変位の表現
3. 境界値問題. 特に散乱問題の定式化.
4. 長波近似
5. 遠方の表現 ... 各波の指向特性
6. 変分原理と相反定理
7. 可逆性.

8. 計算例と結果

附録 A. ^{計算例}変位の表現.

C. G : 1点散乱

B. Δ の根.

波は1次元型理論

中3部

附録 E γ, ω の境界条件

(1.10), (1.11) より γ, ω と u_n, u_s の関係は

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \\ u_s &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \right\} \dots (E.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{K^2}{h^2} \left[\tau_n + 2 \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{2}{p} u_n \right], \\ \omega &= \tau_s - 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{2}{p} u_s, \end{aligned} \right\} \dots (E.2)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial X}{\partial s}, \quad \text{where} \quad \frac{\partial X}{\partial n} = \frac{\partial Y}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = -\frac{\partial X}{\partial s} = 1$$

(2.10) より

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) - \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] ds, \quad (E.3)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) - \frac{\partial \omega}{\partial n} H_0(KR) \right] ds, \quad (E.4)$$

(E.1) を (2.10) 式に代入して部分積分すると

$$\begin{aligned} \gamma(Q) &= \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) - \frac{K^2}{h^2} \omega \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \\ &\quad + K^2 \int_C u_n H_0^{(2)}(KR) ds, \quad \dots (E.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) &= \frac{i}{4} \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} H_0(KR) + \frac{h^2}{K^2} \gamma \frac{\partial}{\partial s} H_0(KR) \right] ds \\ &\quad + h^2 \int_C u_s H_0(KR) ds, \quad \dots (E.6) \end{aligned}$$

**自由表面では u_n, u_s の代わりに $(E.7)$ により γ, ω を代入しておけばよい。

No. F-2

Date _____

γ と ω に対する境界条件は $(E.7)$ で与えられる。

自由表面では $\tau_n = \tau_s = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= (1-\nu) \frac{\partial u_1}{\partial x}, \\ \omega &= -2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \text{ on } F, \quad (E.7)$$

問題 I においては 上下, 左右 振動では 共に

$$\gamma = \frac{K^2}{4\mu} \tau_n, \quad \omega = \tau_s, \quad \text{on } C, \quad (E.8)$$

回転に対しては

$$\gamma = \frac{1-\nu}{2} \tau_n, \quad \omega = \tau_s + 2, \quad \text{on } C, \quad (E.9)$$

これは C 上で τ_n, τ_s を計算するための式で *

問題 II においては 遠振力の流れを 肩荷 (e) で表わし

溝による影響分を 肩荷 (d) で表わし

$$\gamma = \gamma^{(e)} + \gamma^{(d)}, \quad \omega = \omega^{(e)} + \omega^{(d)}, \quad (E.10)$$

とすると $(E.3)$ $(E.4)$ の右辺の $\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial n}$ の代りに 肩荷 (e) の入射波に 関するものを入れると 0 となるから

$$\gamma^{(d)} = \gamma - \gamma^{(e)} = \frac{i}{4} \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) ds,$$

$$\omega^{(d)} = \omega - \omega^{(e)} = \frac{i}{4} \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) ds, \quad (E.11)$$

となる。

* γ, ω は未知関数と置き $(E.5), (E.6)$ の代りに (6.2) と (6.4) を用いて計算する。

境界条件は $T_n = T_s = 0$ である (E.1) より

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2K^2} \gamma &= \frac{\partial U_s}{\partial s} + \frac{1}{P} U_n = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2 \partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \\ &\quad + \frac{1}{P K^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{P K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n}, \\ \frac{\omega}{2} &= -\frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{1}{P} U_s = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial n} \\ &\quad + \frac{1}{P K^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{P K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s}, \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on } C \\ \text{(E.12)} \end{array} \right.$$

となり、今境界上の未知数を $\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial n}, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial n}$ の
と見做せば、その条件式は (E.11), (E.12) の微分方程式
の2組で解く事になる。

自由表面の条件も (E.12) で $n \Rightarrow y, s \Rightarrow -x$ と書いた
ものである。

これを解いて変位等には (E.1), (E.2) より求められる
が、後で必要なのは G, H 等である。この際、 γ, ω の関係が
計算出来る。

自由表面の条件を満たす核函数を使う時は
(E.11) の右辺が異なるだけで (E.12) は同じである。

自由表面の条件を改めて書くと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho^2}{2K^2} \gamma + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\omega}{2} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (E.13)$$

以下 $x \gg 1$ と

$$\left. \begin{aligned} \gamma &\rightarrow \frac{A e^{-ikx}}{\sqrt{x}} + B e^{-ik_R x} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &\rightarrow \frac{C e^{-ikx}}{\sqrt{x}} + D e^{-ik_R x} \\ \omega &\rightarrow \frac{a e^{-ikx}}{\sqrt{x}} + b e^{-ik_R x} \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &\rightarrow \frac{c e^{-ikx}}{\sqrt{x}} + d e^{-ik_R x} \end{aligned} \right\} \quad (E.14)$$

よって 上式 (E.13) を満たすために

$$\left. \begin{aligned} &\left(\frac{\rho^2}{2K^2} - 2K^2 \right) A \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} + \frac{iC K}{K^2} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} \\ &+ \left[B \left(\frac{\rho^2}{2K^2} - \frac{K_R^2}{K^2} \right) + \frac{iD K_R}{K^2} \right] e^{-ik_R x} = 0 \\ &\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho^2}{K^2} \right) a \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} - \frac{iC K}{K^2} \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}} \\ &+ \left[b \left(\frac{1}{2} - \frac{K_R^2}{K^2} \right) - \frac{iD K_R}{K^2} \right] e^{-ik_R x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (E.15)$$

これから X の 対角 1 に かわらす 成 立 せ め には

$$A = 0, \quad c = 0$$

$$a = 0, \quad C = 0$$

$$\frac{B}{2K^2} (k^2 - 2k_R^2) + i d \frac{k_R}{k^2} = 0 \quad (E.16)$$

$$\frac{b}{2b^2} (k^2 - 2k_R^2) - i D \frac{k_R}{K^2} = 0$$

それ故、当然の事ながら $|X| \gg 1$ では レーリー波のみが伝わり、その振幅の関数は (E.16) の関係がなければならぬ。

この事から考えると 6. 節 (6.18) (6.19) の条件は少し余計すぎて、レーリー波のみ消える条件でよいように思われる。

そうすると、^{6. 節の条件では} 原点にのみ特異性を置けばよい。

また (E.11), (E.12) を C 上と F 上の境界積分方程式と見なすならば $|X| \gg 1$ では (E.16) の下に (E.14) と近似してよいと考えられ、これは大変簡潔である。

附録 F γ の表現

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)}(R) &= \frac{i}{4} \int_C \left(\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) ds_P, \\ \omega^{(1)}(R) &= \frac{i}{4} \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) H_0^{(2)}(KR) ds_P,\end{aligned}\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (F.1)$$

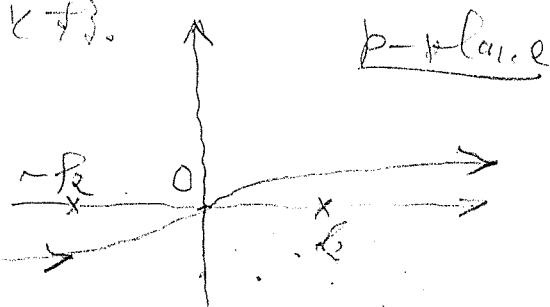
$$\frac{-i}{4} H_0^{(2)}(KR) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-|y-y'|\sqrt{p^2-k^2} + ip(x-x')}}{\sqrt{p^2-k^2}} dp, \quad (F.2)$$

積分経路は右図に示すようにとることにする。

$\arg(\sqrt{p^2-k^2})$ は 1 図のように実軸を少し

離れたところを $+\infty$ 点で 0 に近づける。

ものとする。



今

$$\begin{aligned}G(p, q_k) &= \int_C \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ipx - q_k y} ds, \\ H(p, q_k) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ipx - q_k y} ds,\end{aligned}\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (F.3)$$

$$q_k = \sqrt{p^2 - k^2}, \quad \bar{q}_k = \sqrt{p^2 - k^2}$$

グリーン関数を定義すると

$$\begin{aligned}\gamma^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(p, q_k) e^{+q_k y' - ipx'} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}}, \\ \omega^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q_k) e^{+q_k y' - ipx'} \frac{dp}{\sqrt{p^2 - k^2}},\end{aligned}\quad \left. \begin{array}{l} \\ \int y' < y, \end{array} \right\} (F.4)$$

自由表面より上の特異点による分を加えて新しく

$$\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx'}}{\sqrt{p^2 - k^2}} [G(p) e^{+iky'} - G' e^{-iky'}],$$

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx'}}{\sqrt{p^2 - k^2}} [H e^{+iky'} - H' e^{-iky'}],$$

(F.5)
\$y' < y\$

とおこう。

自由表面の条件は

$$\omega + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y'} = 0$$

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \gamma - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y'} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{2\nu}{1-\nu} \gamma} \right\} \text{for } y'=0, \quad (F.6)$$

(F.5)を代入して \$G, H\$ 等の関係を求めると

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 - k^2}} \left[1 + \frac{2}{k^2} (p^2 - k^2) \right] H + \frac{2ipgk}{k^2 \sqrt{p^2 - k^2}} G$$

$$= \frac{\left(\frac{2p^2}{k^2} - 1 \right)}{\sqrt{p^2 - k^2}} H' + \frac{2ip}{k^2} G'$$

$$\frac{1}{gk} \left\{ \frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{2}{k^2} (p^2 - k^2) \right\} G + \frac{2ip}{k^2} H$$

$$= \frac{\left(\frac{2\nu}{1-\nu} - \frac{2p^2}{k^2} \right)}{gk} G' + \frac{2ip}{k^2} H'$$

$$k \frac{2ipgk}{k^4} \left(\frac{2p^2}{k^2} - 1 \right) \frac{H'}{g} + \frac{2ip}{k^2} G' = \left(\frac{2p^2}{k^2} - 1 \right) H + \frac{2ip}{k^2} G,$$

$$\left(1 - \frac{2\nu}{1-\nu} \right) \left(1 - \frac{2p^2}{k^2} \right) \frac{G'}{g} - \frac{2ipk^2}{gk^4} H' = \left(1 - \frac{2p^2}{k^2} \right) G + \frac{2ip}{k^2} H, \quad (F.7)$$

$$\begin{aligned} H' &= \frac{1}{\Delta} \left[\Delta' H - 2ip \frac{g}{k^2} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) G \right], \\ G' &= \frac{1}{\Delta} \left[\Delta' G + \frac{2ipk^2 g}{k^2} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) H \right], \end{aligned} \quad (F.8)$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right)^2 + \frac{4p^2 g^2}{k^4},$$

2nd eq

$$\gamma = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}, \quad \omega = \omega^{(1)} + \omega^{(2)}, \quad (F.9)$$

$$\gamma^{(2)}(Q) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta'}{\Delta g k} G(p) + \frac{2ipk^2}{k^2 \Delta} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) H \right] e^{-ipx' + gky'} dp, \quad (F.10)$$

$$\omega^{(2)} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta'}{\Delta g k} H + \frac{2ip}{\Delta k^2} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) G \right] e^{-ipx' + gky'} dp,$$

2nd eq

$$G_1(p, Q) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta'}{\Delta} \frac{dp}{gk} e^{ip(x-x') - gk(y+y')}$$

$$G_2(p, Q) = -\frac{ik^2}{2\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{2p^2}{k^2}\right) p dp e^{ip(x-x') - gky - gky'}, \quad (F.11)$$

$$H_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta'}{\Delta g k^2} dp e^{ip(x-x') - gk(y+y')}$$

$$H_2 = \frac{i}{2\pi k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(1 - \frac{2p^2}{k^2})}{\Delta} dp e^{ip(x-x') - gky - gky'}, \quad (F.12)$$

右: 関数を定義すると (F.10) は又,

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(Q) = & \int_C \left[\gamma(p) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] G_1(p, Q) ds_p \\ & + \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] G_2(p, Q) ds_p, \\ \omega^{(2)}(Q) = & \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right] H_1(p, Q) ds_p \\ & + \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right] H_2(p, Q) ds_p, \end{aligned} \quad (F.13)$$

さて x' の正負によつて右図のよゝに積分路を
変更すれば

$$\begin{aligned} G_1 = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta'(-im)}{\Delta(-im)} \frac{dm}{\sqrt{m^2 + K^2}} e^{-m(x-x')} e^{i\cos\theta \sqrt{m^2 + K^2} (y+y')} + \\ & -\frac{1}{4\pi i} \int_0^\pi \frac{\Delta'(K\alpha\theta)}{\Delta(K\alpha\theta)} d\theta e^{iK[(x-x')\alpha\theta - (y+y')\cos\theta]} \\ & + \phi_3 e^{iK_0(x-x') - \sqrt{K_0^2 - K^2} (y+y')} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Delta'(im)}{\Delta(im)} \frac{dm}{\sqrt{m^2 + K^2}} e^{-m(x-x')} e^{i\cos\theta \sqrt{m^2 + K^2} (y+y')} + \\ & -\frac{1}{4\pi i} \int_\pi^{2\pi} \frac{\Delta'(K\alpha\theta)}{\Delta(K\alpha\theta)} d\theta e^{iK[(x-x')\alpha\theta - (y+y')\cos\theta]} \\ & + \phi_3 e^{iK_0(x-x') - \sqrt{K_0^2 - K^2} (y+y')} \end{aligned} \quad (F.14)$$

等々となり、これから漸近展開を求めよう。

$$\frac{1}{4} H_0^{(2)}(kR) \rightarrow \frac{e^{-ikr'} + ik(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')}{2\sqrt{2\pi i k r'}}$$

$$\gamma^{(0)}(Q) \rightarrow \frac{e^{ikr'}}{2\sqrt{2\pi i k r'}} G(K \cos \varphi', -K \sin \varphi')$$

$$\omega^{(0)} \rightarrow \frac{e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi i k r'}} H(K \cos \varphi', -K \sin \varphi')$$

これに添えて

$$\begin{aligned} \gamma(Q) \rightarrow & \frac{e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi i k r'}} \left[G(K \cos \varphi', -K \sin \varphi') + \right. \\ & \left. + \phi_1 G(K \cos \varphi', K \sin \varphi') + \phi_2 H(K \cos \varphi', K \sin \varphi') \right] \\ & + e^{-iK_R |x'| - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'} \\ & \left[\phi_3 G(K_R \cos \varphi', K_R \sin \varphi') + \phi_4 H(K_R \cos \varphi', K_R \sin \varphi') \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) \rightarrow & \frac{e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi i k r'}} \left[H(K \cos \varphi', -K \sin \varphi') \right. \\ & \left. + \psi_1 H(K \cos \varphi', K \sin \varphi') + \psi_2 G(K \cos \varphi', K \sin \varphi') \right] \\ & + e^{-iK_R |x'| - \sqrt{K_R^2 - K^2} y'} \\ & \left[\psi_3 H(K_R \cos \varphi', K_R \sin \varphi') + \psi_4 G(K_R \cos \varphi', K_R \sin \varphi') \right] \end{aligned}$$

ϕ_j, ψ_j は 1 次の φ' の関数である、 $(\phi_3, \phi_4, \psi_3, \psi_4)$ は $(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ と同じである。

G. 変分原理と 相反定理

領域 D において 次の双二次形式を考えよう。

$$2\tilde{L}(u^{(1)}, u^{(2)}) = \sum_j \iint_D \left[k^2 u_j^{(1)} u_j^{(2)} - \sum_i e_{ij}^{(1)} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \right] dx dy, \quad (G.1)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

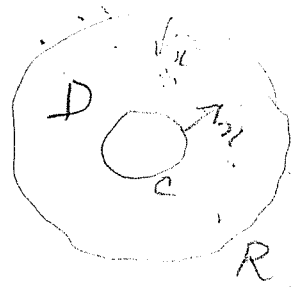
$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2e_{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \gamma \delta_{ij},$$

$$\gamma = e_{ii}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

$u^{(1)}, u^{(2)}$ が D 内で 弾性振動の微分方程式を満足するならば 部分積分によつて

$$2\tilde{L}(u^{(1)}, u^{(2)}) = \sum_j \int_{C^*} u_j^{(1)} \tilde{\tau}_j^{(2)} ds, \quad \dots (G.3)$$

$$\tilde{\tau}_j = \sum_i \tilde{\sigma}_{ji} \frac{\partial u_i}{\partial n}, \quad \dots (G.4)$$



明らかに定義から

$$\tilde{L}(u^{(1)}, u^{(2)}) = \tilde{L}(u^{(2)}, u^{(1)}), \quad (G.5)$$

であるから (G.3) より

$$\int_{C^*} u_j^{(1)} \tilde{\tau}_j^{(2)} ds = \int_{C^*} u_j^{(2)} \tilde{\tau}_j^{(1)} ds, \quad (G.6)$$

ここで領域が無限大の場合は同様に充分遠方の円周上の積分を考えれば「なりなり」か

$u^{(1)}, u^{(2)}$ が共に 外側に発散して行くはも持っとすればそれは平均において 0 となるので考えなくともよい。
さて今汎関数 (例えば C 上で $\bar{u}_j^{(0)}$ が与えられた時)

$$I = \tilde{L}(u, u) - \int_C u_j \bar{u}_j^{(0)} ds, \quad \dots (G.17)$$

を考えると その変分が 0 ならば

$$\bar{u}_j = \bar{u}_j^{(0)}, \quad \text{if } \delta I = 0, \quad (G.18)$$

u_j が与えられる時も同様な式が成立つ。

これは 今の場合の 境界値問題の変分原理である。

また (G.6) のどちらかに特異性テンソルを代入すれば本気で与えた表現が得られる。

次に、上式を後系変数値を意味するものとして

$$2L(u^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) = \iint_D [k_{ij}^{(1)} u_j^{(1)} \bar{u}_i^{(2)} - c_{ij}^{(1)} \bar{u}_{ij}^{(2)}] dx dy, \quad (G.9)$$

なる双一次形式を導入しよう。

これは $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$ の時 ^(その実部が) 所謂 Lagrangian or Kinetic potential の時間平均値の 4 倍である。(周知事 G で割ってはあがる)

この意味では $\mathcal{L}$ は modified Lagrangian と呼ぶのが「適当」であろう。

さて前同下記部分積分により、

$$2L = \int_{C-R} u_j^{(1)} \overline{\tau_j^{(2)}} ds = \int_{C-R} \overline{u_j^{(2)}} \tau_j^{(1)} ds, \quad (G.10)$$

となるが今度は R 上の積分は有限である、

さて各変数では、

$$u_r \Rightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r},$$

$$u_\varphi \rightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

$$\tau_r \rightarrow \frac{k^2}{k^2} \gamma,$$

$$\tau_\varphi \rightarrow \omega,$$

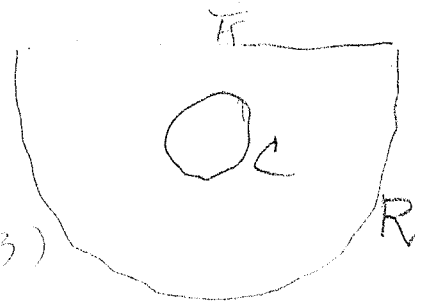
$$\gamma \rightarrow \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} \left[G(k, \varphi) + \phi_1(\varphi) G^*(k, \varphi) + \phi_2(\varphi) H^*(k, \varphi) \right] \\ + e^{-ikr/2 - \sqrt{k_R^2 - k^2} r} \left[\phi_3 G^*(k_R, \varphi) + \phi_4 H^*(k_R, \varphi) \right],$$

$$\omega \rightarrow \frac{e^{-i\omega r}}{2\sqrt{2\pi i \omega r}} \left[H(k_0, \varphi) + \psi_1(\varphi) H^*(k, \varphi) + \psi_2(\varphi) G^*(-k, \varphi) \right] \\ + e^{-i\omega r/2 - \sqrt{k_R^2 - k^2} r} \left[\psi_3 H^*(k_R, \varphi) + \psi_4 G^*(k_R, \varphi) \right], \quad (G.12)$$

それ故 自由表面のなるとき 右図の

半円上の積分を実行すると、

$$+E = \int_C (u_j^{(1)} \bar{t}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} t_j^{(1)}) ds, \quad (G.13)$$



$$\begin{aligned}
 E = & \frac{R^2}{4\pi K^2} \int_0^\pi [\phi_1 G^{(1)} + \phi_2 H^{(1)}] (\bar{\phi}_1 G^{(2)} + \bar{\phi}_2 G^{(2)}) d\theta \\
 & + \frac{R^2 K_R}{K \sqrt{K_R^2 - K^2}} \operatorname{Im}_1 \left[\phi_3 \{ G^{*(0)}(K_R, 0) + G^{*(1)}(K_R, \pi) \} \right. \\
 & \quad \left. + \phi_4 \{ H_{01}^{*(0)}(K_R, 0) + H_{01}^{*(1)}(K_R, \pi) \} \right] \\
 & \times \left[\bar{\phi}_3 \{ G^{(0)*}(K_R, 0) + G^{(1)*}(K_R, \pi) \} \right. \\
 & \quad \left. + \bar{\phi}_4 \{ H^{*(0)}(K_R, 0) + H^{*(1)}(K_R, \pi) \} \right] \\
 & + \frac{\operatorname{Im}_1}{4\pi R^3} \int_0^\pi [
 \end{aligned}$$

11 12 13 14 15 16 17 18

(G.74)

$$W = \frac{4\pi}{T} u^2 + u^2$$

No. G-5.

Date

領域 D 内に C を通じてなされる仕事率の時間平均は

$$W = \operatorname{Re} \frac{i\omega}{4} \int_C (u_j \bar{t}_{ij} - \bar{u}_j t_{ij}) ds, \quad \dots (G.15)$$

であるから E は その $(\frac{4\pi}{\omega})$ となり、それは R を通じて出て行く力の持ちさるものに等しいことを示す。

$$\frac{i\omega}{4} [u_j \bar{t}_{ij} - \bar{u}_j t_{ij}] \quad \dots (G.16)$$

は電磁気理論における pointing vector である。

(G.13) の $u_j^{(1)} \rightarrow u_j$, $u_j^{(2)} \rightarrow u_{ij}$ とおくと前同様

$$\begin{aligned} \bar{u}_j(R) &= \int_C [\bar{u}_i(P) \bar{t}_{ij} - \bar{t}_{ij}(P) u_{ij}(RQ)] ds \\ &\quad - E_j(R) \quad \dots (G.17) \end{aligned}$$

には (G.15) の $q^{(1)}$, $H^{(1)}$ 等を t_{ij} , u_{ij} のものに替え

たものであうて單純に $\exp.[-i\omega t]$ となり、入射波の集まりと考える事が出来る。

一方

$$u_j(R) = \int_C [u_i t_{ij} - t_{ij} u_{ij}] ds, \quad (G.18)$$

であるから

$$u_j = \bar{u}_j \quad \text{on } C \quad (G.19)$$

とに 少々 引算をすれば

$$u_j^{(d)} - \overline{u_j^{(d)}} = \frac{1}{2} \int_C (\tau_j - \overline{\tau_j}) u_{ij} ds + E(Q), \quad (G.20)$$

よって 入射波(肩符(i))に対する散乱変位(肩符(d))は

$$u_j^{(d)} + u_j^{(i)} = 0 \quad \text{on } C \quad (G.21)$$

$$u_j^{(d)} = \int_C (u_i^{(d)} \tau_{ij} - \tau_i^{(d)} u_{ij}) ds \quad \dots$$

となるから境界条件を代入し $Q \in D$ とすると

$$\int_C (u_i^{(d)} \tau_{ij} - \tau_i^{(d)} u_{ij}) ds = 0$$

であるから

$$u_j^{(d)} = - \int_C (\tau_i^{(d)} + \tau_i^{(i)}) u_{ij} ds \quad ; \quad (G.22)$$

となる。

これに $\underbrace{C \cup C'}_{(G.21)}$ を代入すると,

$$u_j^{(d)} - \int_C (\tau_i^{(d)} + \tau_i^{(i)}) u_{ij} ds = 0, \quad \text{on } C, \quad (G.23)$$

一方 (G.20) に (G.19) を代入するとこれと同形になるから境界値問題の解が唯一ならば

(G.20) の右辺第1項は $E(Q)$ なる時の散乱場でないといけない。

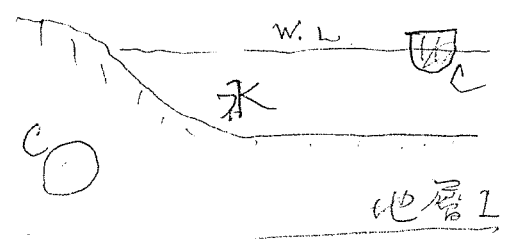
それを $u_j^{(d)}(Q, E)$ と書くならば

$$u_j(Q) - \bar{u}_j(Q) = E(Q) + u_j^{(d)}(Q, E), \dots (G.23)$$

つまり 零位の実部は 自分の作った位と散乱分
から成り立っている。

H. 可逆性

さて、相反定理 (G.5) は
もっと一般化されてよい。
と云うのは右図のような



場合を考えて各地層又は水との

境界で減衰なく振動が

伝えられるとすると境界では変位と力が等しく

く (水と地面では切線方向力は不連続であるが

水の粘性を無視すると水の中では剪断力はない

ので問題の本質に害はない) なければなら

ないからこの線種分には不連続はなく同様に

成立つ。

(この事は又全領域について Modified Lagrangian (G.1) を導入し直と考えるもよい。水の領域で剪断力が 0 となるがけで同じである。

なお (G.1) は剛性率で割っているのでこの時は G をかけて加え合せねばならない。念のため) のように以下で $G = 1$ とする

今 C と C' と云う 2つの物体又は振動源等を
考えると (G.6) は

$$\int_C (u_j^{(1)} t_j^{(2)} - t_j^{(1)} u_j^{(2)}) ds = \int_{C'} (u_j^{(2)} t_j^{(1)} - t_j^{(2)} u_j^{(1)}) ds, \quad (H.1)$$

すなわち C' が振動して出て来るので C に働く力を
考えよう。

C' の振動によるものは肩符 (1) で表わされるとし
境界条件は次のように与えられるものとする。

$$u_j^{(1)} = v_j \quad \text{on } C', \quad j=1, 2 \quad (H.2)$$

$$u_j^{(1)} = 0 \quad \text{on } C, \quad j=1, 2 \quad (H.3)$$

力は

$$X_j = \int_C t_j^{(1)} ds, \quad \dots \quad (H.4)$$

モーメントは

$$X_3 = \int_C (t_2^{(1)} x - t_1^{(1)} y) ds,$$

そこで今

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(2)} &= 1, \quad u_{j \neq 1}^{(2)} = 0, \quad \text{on } C \\ u_j^{(2)} &= 0 \quad \text{on } C', \quad j=1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (H.5)$$

とおくと (H.1) は

$$X_j = \int_{C'} v_i t_i^{(2)} ds, \quad (H.6)$$

(X_3 に対しては $u_1^{(2)} = -y, u_2^{(2)} = x$ on C)

C' が断面に比べて充分小さい時は

$$\int_{C'} v_i ds = V, \quad (H.7)$$

とすると

$$X_j = V t_i^{(2)}|_{C'}, \quad (H.8)$$

C' が断面による震源とすると V は ± 地震のズレのフーリエ変換の ω 成分であり $t_i^{(2)}$ は C' が (H.5) のように振動した時の C' 点におけるズレの方向の力である。

境界条件を少しかえて

$$u_j^{(2)} = 1, \text{ 他は } 0 \text{ on } C \quad (H.9)$$

$$u_j^{(1)} = 0, j=1,2$$

$$t_j^{(1)} = t_j, \quad t_j^{(2)} = 0 \text{ on } C', \quad (H.10)$$

ならば

$$X_j = - \int_{C'} u_i^{(2)} t_j ds, \quad (H.11)$$

で C' が小さく

$$\int_{C'} t_i ds = T, \quad (H.12)$$

ならびに

$$X_j = -T u_i^{(2)} \Big|_C, \quad (H.13)$$

となる。

力のかりに 変位を 考えても 全く 同様に 可逆性
が 成立つ。

この事は (G.18) に グリーニ関数 を 導入 して 見ると
もつと よく わかる。

今

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(A)} &= 0 \\ u_{ij}^{(G)} &= 0 \end{aligned} \quad \text{on } C. \quad (H.14)$$

なる グリーニ関数 $u_{ij}^{(N)}, T_{ij}^{(N)}$ を 導入 すると (G.18) は

$$u_j(Q) = \int_C u_i T_{ij}^{(G)}(P, Q) ds_P, \quad (H.15)$$

$$u_j(Q) = - \int_C T_i u_{ij}^{(N)}(P, Q) ds_P, \quad (H.16)$$

元素 T_{ij}, u_{ij} は Q 点に 特異性 を 囲いた
時の P 点の 力 あるいは 変位 と して 誘導 された
もの なので これらの 式 を Q 点に おける 変位 は Q 点に
単位 力 を 加えた 時の C 上の 力 又は 変位 に 等しい
事を 表わ している。

例えば C が今度地震源で地表に於いて小さく
(H.7) が成立つならば (H.15) より

$$u_j(Q) = V \left. \varepsilon_{ij}^{(G)}(P, Q) \right|_{P \in C}, \dots \quad (H.17)$$

これらの式から 散乱問題つまり地震力を物体が散乱させる問題は 特^にに 解く必要はなく 放射問題つまり 物体が振動する
あるいは 考える点に 単位力を加えて加振する
問題を解いて 震源における変位等を計算
すればよい事になる。

所で 一般には 震源と考える物体とは
地点の距離は充分離れていて ^近漸近展開

が可能であると考えられる (H.2), (H.5) 等の C 上の
境界条件は考えなくともよいと考える。

I. 散乱問題

S点から出て来る波を肩符(e)

で示すことにし、Cなる物体と

自由表面で反射散乱する

部分を肩符(d)で表わすことにしよう。

境界条件は

$$u_j^{(e)} = -u_j^{(d)}, \quad \dots (2.1)$$

とする時 働く力は

$$X_j = \int_C (\tau_j^{(e)} + \tau_j^{(d)}) ds.$$

$$X_3 \equiv Y = \int_C [(\tau_2^{(e)} + \tau_2^{(d)})x - (\tau_1^{(e)} + \tau_1^{(d)})y] ds. \quad (2.2)$$

今 新しく

$$u_i^{(1)} = \delta_{ij} \quad \dots (2.3)$$

$$u_1^{(3)} = -y, \quad u_2^{(3)} = x$$

なる放射問題の解を考えよう。

相互定理により (2.1)

$$\int_C \tau_j^{(d)} u_j^{(e)} ds = \int_C \tau_j^{(e)} u_j^{(d)} ds = - \int_C \tau_j^{(1)} u_j^{(e)} ds,$$

であるから

$$X_i = \int_C \left(\bar{T}_j^{(e)} u_j^{(i)} - \bar{T}_j^{(i)} u_j^{(e)} \right) ds, \quad [I.4]$$

となり 放射問題を解けば力が求まる事になる。

次に (1) 部分積分

と

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_n^{(e)} &= \frac{\rho c^2}{K^2} \gamma^{(e)} - 2 \left(\frac{\partial u_s^{(e)}}{\partial s} + \frac{1}{\rho} u_n^{(e)} \right) \\ \bar{T}_s^{(e)} &= \omega^{(e)} + 2 \left(\frac{\partial u_n^{(e)}}{\partial s} - \frac{1}{\rho} u_s^{(e)} \right) \end{aligned} \right\}$$

これを上式に代入すると (1 部 部分積分して)

$$\begin{aligned} X_i &= \int_C \left[\frac{\rho c^2}{K^2} \gamma^{(e)} u_n^{(i)} + \omega^{(e)} u_s^{(i)} + u_s^{(e)} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u_n^{(i)}}{\partial s} - \frac{1}{\rho} u_s^{(i)} \right) - \bar{T}_s^{(i)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - u_n^{(e)} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u_s^{(i)}}{\partial s} + \frac{1}{\rho} u_n^{(i)} \right) + \bar{T}_n^{(i)} \right\} \right] ds \\ &= \frac{\rho c^2}{K^2} \int_C \left(\gamma^{(e)} u_n^{(i)} - \gamma^{(i)} u_n^{(e)} \right) ds + \int_C \left(\omega^{(e)} u_s^{(i)} - \omega^{(i)} u_s^{(e)} \right) ds \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} u_n &= \frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \\ u_s &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \right\}$$

を代入して 部分積分して 並べかえると

$$\begin{aligned} X_i &= K^2 \left[\frac{1}{K^4} \int_C \left(\gamma^{(e)} \frac{\partial \gamma^{(i)}}{\partial n} - \gamma^{(i)} \frac{\partial \gamma^{(e)}}{\partial n} \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{K^4} \int_C \left(\omega^{(e)} \frac{\partial \omega^{(i)}}{\partial n} - \omega^{(i)} \frac{\partial \omega^{(e)}}{\partial n} \right) ds \right], \end{aligned} \quad - (I.5)$$

を得る。

X_i は G で割られてゐるから 両辺をかけると $K^2 G = \rho \omega^2$ となる。

無限領域では第12/14) 第1) となる。

$$\begin{aligned} r^{(10)}(p) &\rightarrow \frac{i}{2\sqrt{2\pi}kr_0} e^{-ikr_0 + iK(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)} G_s(K, \varphi_0) \\ \omega^{(10)}(p) &\rightarrow \frac{i}{2\sqrt{2\pi}k_0r_0} e^{-ik_0r_0 + iK(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)} H_s(k_0, \varphi_0) \end{aligned} \quad (I.6)$$

r_0, φ_0 は点 $\vec{r}$ の位置ベクトル
を"から

$$\frac{X_i}{k^2} = \frac{i}{2\sqrt{2\pi}r_0} \left[\frac{1}{k^{4.5}} G_s(K, \varphi_0) G_i(K, \varphi_0) + \frac{1}{k^{4.5}} H_s(k_0, \varphi_0) H_i(k_0, \varphi_0) \right] \quad (I.7)$$

$$\begin{aligned} G(K, \varphi) &= \int_C \left(\theta \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) e^{iK(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} dS, \\ H(k, \varphi) &= \int_C \left(\omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) e^{ik(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} dS, \end{aligned} \quad (I.8)$$

自由表面から"へ

(I.9)

次に空間内で散乱する場合を考えよう。

境界条件は

$$T_j^{(e)} = -T_j^{(d)} \quad \text{on } C, \quad (I.10)$$

$$U_j^{(d)}(Q) = \int_C (U_i^{(d)} T_{ij} - T_i^{(d)} U_{ij}) dS, \quad (I.11)$$

で「83から」射影は C の内側で成り立つ

$$\int_C (U_i^{(e)} T_{ij} - T_i^{(e)} U_{ij}) dS = 0, \quad (I.12)$$

で「83から」上式に (I.10) をより

$$U_j^{(d)}(Q) = \int_C (U_i^{(d)} + U_i^{(e)}) T_{ij}(P, Q) dS, \quad (I.13)$$

なる長方形がある。

さて Q 点の周りに ϵ の円を考慮

$$\int_{\epsilon} T_{ij}^{(d)} dS_P = \delta_{ij} \quad (I.14)$$

$$\text{かつ} \quad T_{ij}^{(d)} = 0 \quad \text{on } C$$

なる関数を考える

$$\begin{aligned} U_j^{(d)}(Q) &= \int_{\epsilon} (U_i^{(d)}(Q) T_{ij}^{(d)}(Q) - T_i^{(d)} U_{ij}^{(d)}) dS = \\ &= - \int_C (U_i^{(d)}(Q) T_{ij}^{(d)}(Q) - T_i^{(d)} U_{ij}^{(d)}) dS \\ &= - \int_C T_{ij}^{(e)}(P) U_{ij}^{(d)}(P) dP, \quad (I.15) \end{aligned}$$

あるいは $T_i^{(a)} = 0$ on C 故、次のように書いてよい。

$$u_j^{(a)}(Q) = \int_C (u_i^{(e)} T_i^{(a)} - T_i^{(e)} u_i^{(a)}) dS, \quad \dots (I.15')$$

これは (I.4) と同形故、(I.5) を導いたのと同様

$$u_j^{(a)}(Q) = k^2 \left[\frac{1}{k^2} \int_C \left(\gamma^{(a)} \frac{\partial \gamma^e}{\partial n} - \gamma^e \frac{\partial \gamma^a}{\partial n} \right) dS \right. \\ \left. + \frac{1}{k^4} \int_C \left(\omega^{(a)} \frac{\partial \omega^e}{\partial n} - \omega^e \frac{\partial \omega^a}{\partial n} \right) dS \right], \quad (I.16)$$

と書け (I.7) の類な表現も出来る。