

E M. H.

No.

Date 56.11.23

“一様媒質の無限領域における二次元弾性波”
の放射散乱について

別所正利

内容目次

頁

序論

1. 場の方程式と境界条件 1
2. 変位等の表現と境界積分方程式 5
3. 遠方の性質 10
4. 展開近似 (改増補^{11.29}) 13
5. 相反定理と変分原理 15
6. 可逆性とハストットの関係 17
7. エネルギー一定理 21
8. 逆指向運動量 23
9. 運動方程式, 指向性利得他 25
10. 散乱断面積 29

結論

附録 A

核周場

A-1~2

B

の長波極限係

B-1

B

11

C

円境界の解 (改11.29)

C-1~7

1. 場の方程式と境界条件

現象はすべて円周波数 ω で周期的である場合のみを考える事とし、すべての量を時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示するものとする。

変位 u_i ($i=1,2$) の満たす微分方程式は

Δ をラプラシアンとして、

$$(\Delta + k^2)u_i + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2, \quad (1.1)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

$$k^2 = \rho \omega^2 / G, \quad \alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.3)$$

ρ は密度, G は剛性率, k は横波の波数である。 ν は平面応力問題とした時のポアソン比であるが今は所謂平面歪問題と考えるとポアソン比 ν に対して

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (1.4)$$

となっている。

さて今回振動 ω (円周波数と混同しない事)

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (1.5)$$

を導入し、(1.1)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + k^2)\gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2)\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$$k^2 = \frac{1-\nu}{2} k^2 \quad (1.7)$$

となり、ヘルムホルツの方程式を満たしている。

(γ と ω は変位)

k は縦波の波数である。

今 γ と ω がわかっているとすると (1.1), (1.2), (1.5) から変位

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \\ u_2 &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

すなわち応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right), \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right), \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

であって、境界曲線 C に沿って働く力の (x, y)

成分 (t_1, t_2) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_1}{G} \equiv \tau_1 &= \frac{1}{G} \left(\sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial x}{\partial n}, \\ \frac{t_2}{G} \equiv \tau_2 &= \frac{1}{G} \left(\tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_y \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial y}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

(1.8), (1.9) を法線, 切線成分で表わすと (図参照) ^{ef.}

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n}, \\ u_s &= u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + u_2 \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} T_n &= \frac{k^2}{k^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_n, \\ T_s &= \omega + 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_s, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

但し $\rho = ds/d\theta$ T C の曲率半径とする。

我々は無限に広い媒質中で境界曲線 Γ を持つ物体もしくは空孔の入射波による振動を知りたい事であるが、これを2つに別けて考える事が出来る。

i) 放射問題 Γ にかゝえられた変位 (u_n, u_s) で振動して波を放射する問題である。

ii) 散乱問題 入射波が物体によって散乱せられる問題であるがこれは物体の弾性によって全く^{解が}決ってくる。別には剛体である場合と空孔である場合は大変様子が違う。この場合 Γ が変形しないとすると入射波は境界にある力を及ぼすから物体が固定された剛体でない限りその力と平衡するまで物体は変形する。この任意の変形によって境界に生じる力は i) の放射問題の解と物体の性質から求められる(空孔の場合は内部の力は0)からこの力と Γ が変形しない時に入射波から受ける

カとを等置すれば"よい。

このように考えて見ると C の変形を求める事は
この物体の運動方程式を解く事であるから
直接境界値問題には関係ない。

① 无限境界値問題としては C が変形しない
時の入射波による散乱問題が解けて
いけば"よい。

この問題と散乱場については C 上で入射波
による変位を打消さねばならぬから境界条件
としては i) と同じく C 上で変位の与えられる問題
である。

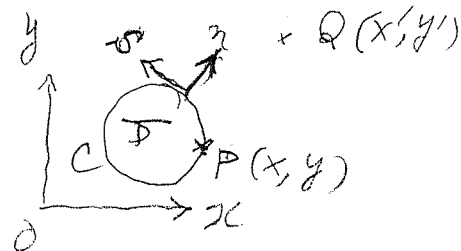
② 定孔の場合は上述のように考えてもよいが初め
から C 上で境界ウカロと与える条件を与える
方が簡単であるのは言うまでもない。

2. 変位, 横波, 縦波の表現と境界積分方程式

附録 A の核関数を使う

グリーン関数の定理を適用すると

次のような表現をうる



$$u_j(Q) = \sum_{i=1}^2 \int_C [u_i(P) T_{ij}(P, Q) - T_i(P) u_{ij}(P, Q)] ds, \quad (2.1)$$

(以下 i に関する総和記号を省略する) $j=1, 2$
今 C の内部領域で正則な変位 $u_j^{(a)}$ が存在し
 Q 点が外部領域にあれば

$$0 = \int_C [u_i^{(a)}(P) T_{ij}(P, Q) - T_i(P) u_{ij}(P, Q)] ds, \quad (2.2)$$

(2.1) と (2.2) を 加え合わせると

$$u_j(Q) = \int_C [\{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} T_{ij}(P, Q) - \{T_i(P) + T_i^{(a)}(P)\} u_{ij}(P, Q)] ds,$$

となるが 特になし

$$T_i(P) + T_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C, \quad (2.3)$$

ならば

$$u_j(Q) = \int_C \{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} T_{ij}(P, Q) ds, \quad (2.4)$$

また

$$u_i(P) + u_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C, \quad (2.5)$$

ならば

$$u_j(Q) = - \int_C \{T_i(P) + T_i^{(a)}(P)\} u_{ij}(P, Q) ds, \quad (2.6)$$

C内で正則な関数の例としては平面波などが考えられる。

それ故 (2.4) の表現は 空孔の散乱問題の境界積分方程式として 適当であり, (2.6) は 固定境界の時に 適当である。

しかし いづれにしてもこれらの核関数は 附録Aに見るように 特異性が大変強く ^{その} 数値積分には 細心の注意が必要である。

一方 (1.6), (1.7) から γ, ω には よく知られた次の表現がある。

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma(p) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(12)}(KR) - \frac{\partial \gamma}{\partial n} H_0^{(12)}(KR) \right] ds(p), \quad (2.7)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega(p) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(12)}(KR) - \frac{\partial \omega}{\partial n} H_0^{(12)}(KR) \right] ds(p), \quad (2.8)$$

実際 (1.2), (1.5), (1.8), (1.10) を使って (2.1) を導く事が出来るが今は省略する。

さて (2.7), (2.8) ^{右辺2項} に (1.11) を代入して 1 部部分積分すると 次の表現でうる。

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) + \frac{k^2}{k^2} \omega \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds + k^2 \int_C u_n |H_0^{(2)}(kR) ds \quad (2.9)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{k^2} \gamma \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds + k^2 \int u_s H_0^{(2)}(kR) ds, \quad (2.10)$$

ここで u_n, u_s が与えられる時はこれらによる γ と ω を未知とする

境界積分方程式になり、(2.1) に比べて各段に特異性が弱く計算上の難点が少ないと考えられる。

入射波のある時はこれを γ_0, ω_0 とすると

$$\int_C \left[\gamma_0 \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \gamma_0}{\partial n} |H_0^{(2)}(kR) \right] ds = Q \quad (2.11)$$

$$\int_C \left[\omega_0 \frac{\partial}{\partial n} |H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \omega_0}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) \right] ds = 0$$

であるから (2.17), (2.18) に代入して

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[(\gamma + \gamma_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial}{\partial n} (\gamma + \gamma_0) |H_0^{(2)}(kR) \right] ds, \quad (2.12)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[(\omega + \omega_0) \frac{\partial}{\partial n} |H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial}{\partial n} (\omega + \omega_0) H_0^{(2)}(kR) \right] ds, \quad (2.13)$$

再び (2.11) を代入すると

$q_n^{(0)}, u_s^{(0)}$ は γ_0, ω_0 による変位として、

(なお γ_0, ω_0 のどちらか一方のみの際は他方は 0 とおく)

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[(\gamma + \gamma_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{k^2}{k^2} (\omega + \omega_0) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) + K^2 (U_n + U_n^{(0)}) H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.14)$$

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[(\omega + \omega_0) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\gamma_0^2}{k^2} (\gamma + \gamma_0) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) + k^2 (U_s + U_s^{(0)}) H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.15)$$

固定境界では

$$U_n + U_n^{(0)} = U_s + U_s^{(0)} = 0 \quad \text{on } C \quad (2.16)$$

そこで上式に代入し, $\gamma + \gamma_0 = \Gamma$, $\omega + \omega_0 = \Omega$ を

未知関数とすると次の境界積分方程式が得られる。

$$\Gamma - \gamma_0 = \frac{i}{4} \int_C \left[\Gamma \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{k^2}{k^2} \Omega \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.17)$$

$$\Omega - \omega_0 = \frac{i}{4} \int_C \left[\Omega \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\gamma_0^2}{k^2} \Gamma \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.18)$$

空孔の場合には γ_0, ω_0 による力を $T_n^{(0)}, T_s^{(0)}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_n + T_n^{(0)} = 0 \\ T_s &= T_s + T_s^{(0)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

であるから

$$U_n = U_n + U_n^{(0)}, \quad U_s = U_s + U_s^{(0)} \quad (2.20)$$

において (2.14), (2.15) に (1.12) を代入すると

$$T_n + 2 \frac{\partial U_s}{\partial s} + \frac{2}{P} U_n = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n \left(\frac{2}{P} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(KR) + U_s \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{P} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.21)$$

$$T_s - 2 \frac{\partial U_n}{\partial s} + \frac{2}{P} U_s = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{P} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(kR) \right. \\ \left. + U_s \left(\frac{2}{P} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(kR) \right] ds \quad (2.22)$$

となり U_n, U_s を未知関数とする境界積分方程式をうる。

3. 遠方の性質

円筒座標 (r, θ) を導入し、充分半径の大きな円筒面で変位、撓率力を考えて見ると (1.11)

(1.12) より

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \rightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r}, \\ u_\theta &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{k^2 r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \rightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r}, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} T_r &\rightarrow \frac{k^2}{k^2} \gamma, \\ T_\theta &\rightarrow \omega, \end{aligned} \right\} (3.2)$$

となるから 充分遠方の変位等は γ, ω のそれらにわかればよい。

その γ, ω は充分遠方では

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(kR) &\xrightarrow{r' \gg 1} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k r'}} e^{-i(kr' - \frac{\pi}{4}) + ik\tilde{\omega}(\theta')}, \\ \tilde{\omega}(\theta') &= x \cos \theta' + y \sin \theta' \end{aligned} \right\} (3.3)$$

なる漸近展開があるから 今

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \int_C \left[\frac{\partial \gamma}{\partial n} - \gamma \frac{\partial}{\partial n} \right] e^{ik\tilde{\omega}(\theta')} ds, \\ H(\theta') &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ik\tilde{\omega}(\theta')} ds, \end{aligned} \right\} (3.4)$$

なる関数 (水波理論ではコッチ=座標と呼ぶ) を導入すると

$$\begin{aligned} \gamma(\varrho) &\doteq \frac{e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi i k r'}} G(\theta') \\ \omega(\varrho) &\doteq \frac{e^{-i\bar{k}r'}}{2\sqrt{2\pi i \bar{k} r'}} \bar{H}(\theta') \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } r' \gg 1, \end{array} \right\} (3.5)$$

すなわち $G, \bar{H}$ がゆがめば、遠方の性質は定まる。

(3.4)の表現は (2.7)で γ, ω が与えられると決まらないうえ、前節の終りのように少し変形しておいた方が便利である。

まず (2.9), (2.10) から

$$\begin{aligned} G(\theta') &= - \int_0^\infty \left(+\gamma \frac{\partial}{\partial n} + \frac{k^2}{k^2} \omega \frac{\partial}{\partial s} + k^2 u_n \right) e^{ik\bar{\omega}(\theta')} dS \\ \bar{H}(\theta') &= \int_0^\infty \left(-\omega \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\bar{k}^2}{\bar{k}^2} \gamma \frac{\partial}{\partial s} - \bar{k}^2 u_s \right) e^{i\bar{k}\omega(\theta')} dS \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} (3.6)$$

散乱問題ではさらに簡単になつて固定境界の時 (2.17), (2.18) に對して

$$\begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial n} + \frac{k^2}{k^2} \Omega \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{ik\bar{\omega}} dS \\ \bar{H}(\theta') &= - \int_C \left(\Omega \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\bar{k}^2}{\bar{k}^2} \Gamma \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i\bar{k}\omega} dS \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\} (3.7)$$

空孔の (2.21) (2.22) に代入して

$$G(\theta') = - \int_C \left[U_n \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) e^{ik\omega(\theta')} \right. \\ \left. + U_s \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{ik\omega(\theta')} \right] ds,$$

$$F(\theta) = - \int_C \left[U_n \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) + U_s \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) \right] \times \\ \times e^{ik\omega(\theta')} ds, \quad (3.8)$$

なお一般に (3.6) の (1.1), (1.2) に代入して (第1項の第1項) に至る。

$$\gamma_0 = \frac{ik}{K^2} e^{ik\omega}$$

$$U_n^{(K)} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial n}, \quad U_s^{(K)} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial s}$$

$$T_n^{(K)} = \left(\frac{-K^2}{K^2} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho K^2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \gamma_0$$

$$T_s^{(K)} = \left(-\frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho K^2} \right) \gamma_0$$

$$\omega_0 = \frac{ik}{K^2} e^{ik\omega}$$

$$U_n^{(K)} = \frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s}, \quad U_s^{(K)} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n}$$

$$T_n^{(K)} = \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho K^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s}$$

$$T_s^{(K)} = \omega_0 + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho K^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n}$$

とあると

$$G(\theta') = \frac{K^3}{ik^2} \int_C \left[T_n U_n^{(K)} + T_s U_s^{(K)} - U_n T_n^{(K)} - U_s T_s^{(K)} \right] ds,$$

$$F(\theta') = \frac{k}{i} \int_C \left[T_n U_n^{(K)} + T_s U_s^{(K)} - T_n^{(K)} U_n - T_s^{(K)} U_s \right] ds, \quad (3.11)$$

とある。

また (2.12) (2.13) の表現をうる際と 同様にして

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= i \frac{k^3}{r^2} \int_C (U_n T_n^{(0)} + U_s T_s^{(1)}) ds, \\ \bar{H}(\theta') &= i k \int_C (U_n T_n^{(0)} + U_s T_s^{(1)}) ds, \\ \text{for } U_n &= U_s = 0 \text{ on } C. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

3.12 大文字は入射波と散乱波を含む量を示す。

空孔による散乱は以下で表わすと

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \frac{k^3}{i r^2} \int_C (T_n U_n^{(1)} + T_s U_s^{(1)}) ds, \\ \bar{H}(\theta') &= \frac{k}{i} \int_C (T_n U_n^{(1)} + T_s U_s^{(1)}) ds, \\ \text{for } T_n &= T_s = 0 \text{ on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

4. 長波近似

物体の寸法に比べて波長が充分大きい時は

($k, K \rightarrow 0$)

$$H_0^{(2)}(kR) \xrightarrow{kR \ll 1} \frac{2}{\pi i} \log\left(\frac{ikR}{2}\right)$$

$$H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) \rightarrow \frac{i(1+\nu)}{4\pi} k^2 R^2 \log R,$$

(4.1)

なる近似式があるので 附録 A の核関数に入れて計算すると 附録 B のように 静力学の式に一致する。

それ故に長が充分大きい時は 静的弾性論によって得られる境界変位, 力を 前節の F, G に代入して 発散波振幅が ^{近似的に} 求められる。

さて θ 方向から入射する単位振幅の縦波は

$$y_0 = iK e^{ik\tilde{\omega}(\theta)}, \quad \tilde{\omega} = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

であるが 原点近傍では

$$u_1^{(0)} = \cos \theta e^{ik\tilde{\omega}(\theta)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \{1 + ik\tilde{\omega}(\theta)\} \cos \theta,$$

$$u_2^{(0)} = \sin \theta e^{ik\tilde{\omega}(\theta)} \rightarrow \{1 + ik\tilde{\omega}(\theta)\} \sin \theta.$$

(4.2)

$$\gamma \doteq iK, \quad \omega \doteq 0,$$

$$\tau_1 \doteq iK \left[\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right],$$

$$\tau_2 \doteq iK \left[\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right]$$

同様にして 同様に

$$\omega_0 = ik e^{ik\omega(\theta)}$$

$$u_1 \doteq -(1+ik\omega)\sin\theta,$$

$$u_2 \doteq (1+ik\omega)\cos\theta,$$

$$\delta \doteq 0, \quad \omega \doteq ik$$

(4.3)

$$T_1 \doteq ik \left[\frac{\partial y}{\partial n} \cos 2\theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta \right],$$

$$T_2 \doteq ik \left[\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right],$$

したがって (3.11) に より

$$G(\theta) \doteq \frac{K^3}{ik^2} \int_C [T_1 \cos\theta + T_2 \sin\theta] ds.$$

$$+ \frac{K^4}{k^2} \int_C \left[\omega(\theta) (T_1 \cos\theta + T_2 \sin\theta) - u_1 \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ \left. - u_2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] ds,$$

$$H(\theta) = \frac{K}{i} \int_C [-T_1 \sin\theta + T_2 \cos\theta] ds.$$

(4.4)

$$+ k^2 \int_C \left[\omega(\theta) (-T_1 \sin\theta + T_2 \cos\theta) - u_1 \left(\frac{\partial y}{\partial n} \cos 2\theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ \left. - u_2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right] ds,$$

い、て 特 に C が x 軸 に 沿 っ て 対 称 だ け ば T と u は

同 じ く 対 称 性 を 持 つ と し

$$\left. \begin{aligned} \int T_2 ds &= \int x T_2 ds = \int y T_1 ds = 0 \\ \int u_1 \frac{\partial y}{\partial n} ds &= \int u_2 \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となつてゐるとすると上式は大分簡単になる。

$$G(\theta) \doteq \frac{k^3}{ik^2} \cos \theta \int_C T_1 ds$$

$$+ \frac{k^4}{k^2} \int_C \left[T_1 x \cos^2 \theta + T_2 y \sin^2 \theta - \frac{2}{1-\nu} u_1 \frac{\partial x}{\partial n} - u_2 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos^2 \theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right] \times ds,$$

$$H(\theta) \doteq ik \sin \theta \int_C T_1 ds$$

$$+ k^2 \sin \theta \int_C \left[\frac{1}{2} (T_2 y - T_1 x) + u_1 \frac{\partial x}{\partial n} - u_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds, \quad (4.6)$$

右辺の2項は1項として扱ふ(但し、 k に比例する)。

高次であるからさらに省略すると

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{k^3}{ik^2} \cos \theta \int_C T_1 ds, \\ H(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C T_1 ds, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

となり右辺の積分は境界に働く x -方向の力であるからそれがわかれば近似的にフッチの定理の
上のように与えられる事を示す。

散乱問題では必ず x の正方向から縦波が来る

場合は (4.2) で $\theta = 0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq 2G \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) iK, \\ \sigma_y &\doteq 2G \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) iK, \\ \tau_{xy} &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \dots (4.8)$$

のような2軸応力の問題となり、横波では同じ (4.3)

より

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq \sigma_y \doteq 0 \\ \tau_{xy} &\doteq i k G \end{aligned} \right\} \dots (4.9)$$

となつて、一様剪断力による静的弾性問題になる。
以下縦波の散乱について考えると
もし固定境界ならば (4.2) によつて

$$\int_C T_1^{(0)} ds = 0 \quad \dots (4.10)$$

であるから (4.7) はまた次のようにも書ける。

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{k^3}{i\pi^2} \cos \theta \int_C T_1^{(0)} ds \\ F(\theta) &\doteq i k \sin \theta \int_C T_1^{(0)} ds \end{aligned} \right\} \left(\begin{aligned} T &= T^{(0)} + T^{(s)} \\ &\dots (4.11) \end{aligned} \right)$$

となり、右辺の積分はは弾制力の x 成分である
から、ハスキントの関係によりこれは又 C から x
方向に振動する時のコーチン割割で与えられ
る。

一方空孔では $\tau^{(d)} = -\tau^{(c)}$ で (4.10) により,

(4.7) の項はすべて消えて

$$G \pm H \neq 0, \quad (4.12)$$

で (4.4) にかえて 右辺 2 項が残るがこの

部分は $(000, 110)$ の成分を含む (1, 000, 110)

の成分である。

5. 相反定理と変分原理

領域 D 内で正則な2つの変位場 $u^{(1)}, u^{(2)}$ に対して

次の積分を導入しよう (Modified Lagrangean と呼ぶ)

$$\tilde{L}(u_1, u_2) = \frac{G}{2} \iint_D [k^2 u_j^{(1)} u_j^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)}] dx dy, \quad (5.1)$$

($Gk^2 = p\omega^2$, 総和記号は略す)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{ij} = 2e_{ij} + \underbrace{\frac{2\gamma}{1-2\nu}}_{\text{trace}} \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

$$\gamma = e_{ii}$$

そうすると明らかに2次の相反性がある。

$$\tilde{L}(u^{(1)}, u^{(2)}) = \tilde{L}(u^{(2)}, u^{(1)}) \quad (5.2)$$

今 $u^{(1)}, u^{(2)}$ が D 内で弾性体中の微分方程式を満たすならば、部分積分によって

$$\frac{2}{G} \tilde{L}(u^{(1)}, u^{(2)}) = \int_C u_j^{(1)} T_j^{(2)} ds, \quad (5.3)$$

$$\text{すなわち} \quad T_j = \sigma_{ji} \frac{\partial x_i}{\partial n}, \quad (5.4)$$

(5.3) は2次の形式に表わされる。

$$\int_C u_j^{(1)} T_j^{(2)} ds = \int_C u_j^{(2)} T_j^{(1)} ds, \quad (5.5)$$

これを以下では相反定理と呼ぼう。

この応用については次節に述べる事とし

ここでは境界値問題の変分原理について述べる。

今 u が D 内で正則な弾性変位の方程式を満たす比較関数とし境界 C 上で与えられた値 v となるような境界値問題は二次の汎関数の極値問題と等価である。

$$I = \int_C u_j T_j ds - \int_C v_j T_j ds, \quad (5.7)$$

実際変分をとると

$$\delta I = \int_C (u_j - v_j) \delta T_j ds, \quad (5.8)$$

となるから

$$u_j = v_j \quad \text{on } C \quad (5.9)$$

C 上で境界力 T が与えられても同じである。

6. 可逆性とハスギントの関係

今物体が C_1, C_2 と 2 つあって 互いの振動によつて $u^{(1)}, u^{(2)}$ なる振動が起るとし, 境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} u_j^{(1)} \text{ is given on } C_1 \\ u_j^{(1)} = 0 \quad \text{on } C_2 \\ u_j^{(2)} = 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_j^{(2)} \text{ is given on } C_2 \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

とし 相反定理 (5.6) を適用すると

$$\int_{C_1} u_j^{(1)} T_j^{(2)} dS = \int_{C_2} u_j^{(2)} T_j^{(1)} dS, \quad (6.2)$$

これは可逆性を表わしていて, 例へば

$$\left. \begin{array}{l} u_1^{(1)} = 1, u_2^{(1)} = 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_1^{(2)} = 1, u_2^{(2)} = 0 \quad \text{on } C_2 \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

つまり C_1, C_2 共に x 軸に平行に振動していると

すると (6.2) から

$$\int_{C_1} T_1^{(2)} dS = \int_{C_2} T_1^{(1)} dS, \quad (6.4)$$

となつて C_1 の振動によつて C_2 に働く x 方向の力は C_2 の振動によつて C_1 に働く x 方向の力に等しいことを意味する。

この可逆性は基本的な関係で知らる

種々の可逆性を導く事が出来るが、特に便利なのは散乱問題の場合である。

即ち C_1 と C_2 が充分離れていれば、夫々相手の振動は平面波として到着するので散乱問題となる。

そこであらためて入射波の振幅を肩符(10)で表わし、 $u^{(d)}$ を C_1 による散乱場としよう。

境界条件は

$$u_j^{(d)} = -u_j^{(10)}, \quad j=1, 2, \quad (6.5)$$

となるものとして、もう一つの放射場 u を考え (5.6) を適用すると、

$$\int_C u_j T_j^{(d)} ds = \int_C u_j^{(d)} T_j ds \quad (6.6)$$

となるが (6.5) により

$$\int_C u_j T_j^{(d)} ds = - \int_C u_j^{(10)} T_j ds$$

よって

$$\int_C u_j (T_j^{(10)} + T_j^{(d)}) ds = \int_C (u_j T_j^{(10)} - u_j^{(10)} T_j) ds$$

(3.11) によって

結合するならば

$$\int_C u_j (T_j^{(0)} + T_j^{(1)}) ds = - \frac{i k^2}{k^3} G(\theta), \quad (6.7)$$

横波の場合

$$\int_C u_j (T_j^{(0)} + T_j^{(1)}) ds = - \frac{i}{k} F(\theta).$$

特に u が特に C の固体的運動の場合には左辺は
 力の強制力となり 水は理論では ハスケットの
 関係と近似されている。

今の場合 振動のモードは無限にあり、左辺は
 一般力と考えらるのでやはり力の強制力は
 放射問題、 G, F つまり コツク=定数によって
 与えられると云ってよく、この関係から振動
 振幅 u を決めるためには放射問題を解いて
 おけばよく 散乱問題の解は必要としない。

この関係でも種々の変形が考えられるがここでは
 最後に空孔による散乱の場合を考えてみる。

$$\text{その 時 } T_j^{(1)} = - T_j^{(0)} \quad \text{on } C, \quad \dots (6.8)$$

(6.6) に代入して 前と同様 (3.13) に等しく

$$\int_C (u_j^{(0)} + u_j^{(1)}) T_j ds = \begin{cases} \frac{i k^2}{k^3} G \\ \frac{i}{k} F \end{cases} \quad \dots (6.9)$$

したが、今度は境界条件に $\bar{u}$ を加えた強制振動
の解によって境界の変位が表わされることになる。

7. エネルギー一定定理

C の線素 ds を通る沿線方向に作る単位時間当りの仕事の時間平均は

$$\frac{\cos \theta}{4\pi} [u_j \bar{T}_j - \bar{u}_j T_j] ds, \quad \dots (7.1)$$

上様は複素共役値とする。

これは電磁波理論で Poynting Vector と呼ばれる。

よって C の作る仕事率は

$$W = \frac{\cos \theta}{4\pi} \int_C (u_j \bar{T}_j - \bar{u}_j T_j) ds, \quad \dots (7.2)$$

一方 (5.1) をまとめ一般に 2つの場を肩符 (1), (2) で表わせば

$$\frac{2}{G} L(u^{(1)}, u^{(2)}) = \iint_D [e_{ij}^{(1)} u_j^{(1)} \bar{u}_i^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}] dx dy, \quad (7.3)$$

を導入して部分積分すると境界積分に変形できるが今度は無限遠方の積分が消えないので今それを半径の充分大きい円周 R にとり直しよう。

そうすると

$$\int_C (u_j^{(1)} \bar{T}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} T_j^{(1)}) ds = \int_R (u_j^{(1)} \bar{T}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} T_j^{(1)}) ds, \quad (7.4)$$

R 上の積分は (3.1), (3.2), (3.5) によって

$zV?$

No.

Date

$$\text{impedance} = \text{resistance} + i[\text{reactance}]$$

$$\text{admittance} = \frac{1}{\text{impedance}}$$

$$= \text{conductance} + i[\text{suseptance}]$$

$$\text{compliance} = \text{capacitance}$$

$$= 1/[\text{stiffness}]$$

$$W_{1,2} = \frac{\omega G}{4i} \int_C (\bar{u}_i^{(1)} \bar{t}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \bar{t}_i^{(1)}) ds = \frac{\rho \omega^3}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{G(\theta) \bar{G}(\theta)}{k^4} + \frac{F(\theta) \bar{F}(\theta)}{k^4} \right] d\theta, \quad (7.5)$$

をうる。

一方 単位振幅の平面入射波が進行方向に
直角な単位面積当りに運ぶ動力は縦波は

$$\gamma = i k e^{i k x}, \quad u = e^{i k x}, \quad v = 0, \quad T_x = i \frac{k^2}{k} e^{i k x}, \quad T_y = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{\rho \omega^3}{2k} = \frac{\omega G}{2k} k^2 \\ \text{同様に横波は} \quad E_R &= \frac{\rho \omega^3}{2k} = \frac{\omega G k}{2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

これで(7.5)を割ると得られる

$$\begin{aligned} \frac{W}{E_K} &= \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|G|^2}{k^4} + \frac{|F|^2}{k^4} \right) d\theta, \\ \frac{W}{E_R} &= \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\quad \quad \quad \right] d\theta, \end{aligned} \quad (7.7)$$

8. 逆時間運動

今ある放射問題の解 u に対してその複素共役値 u^* を考えるとこれは時間を逆にした運動の解と考えるとよいからそれを逆時間運動と呼ぼう。

そこで C 上で

$$u_j^* = \overline{u_j}, \quad (8.1)$$

のような関係があるとしておこう。

無限遠方では u は発散波をもち、 u^* は収束波をもっているからこれは 各方向からの入射平面波 の集まりと考える事が出来る。

δ について考えると (3.5) は又 (2.7) に参照して

$$r(P) \Rightarrow \frac{1}{4\pi i} \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} e^{-ik[x\cos(\theta-\theta') + y\sin(\theta-\theta')]} G(\theta') d\theta' \quad (8.2)$$

($\delta \ll 1$)

と書く事が出来るから、今単位円上の θ' 方向から来る入射波は

$$r_0(P, \theta') = ik e^{ik\omega(\theta-\theta')}, \quad \omega_0 = ik e^{ik\omega(\theta-\theta')} \quad (8.3)$$

の散乱波 r_d, ω_d と合わせて

$$r(P, \theta') = r_0 + r_d, \quad \omega = \omega_0 + \omega_d, \quad (8.4)$$

とかくと r による C 上の変位は 0 とする。

そこで

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}(p) - \gamma(p) &+ \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(p, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta', \\ \bar{\omega} - \omega &+ \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Omega(p, \theta') \overline{H(\theta')} d\theta', \end{aligned} \right\} (8.5)$$

を考えるとこれらによる C 上の変位は (a) と 散乱場の定義より 0 である。

そこで解の唯一性を考慮すれば"上式は恒等的に 0 とならねば"ならないから

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}(p) - \gamma(p) &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(p, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta', \\ \bar{\omega}(p) - \omega(p) &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Omega(p, \theta') \overline{H(\theta')} d\theta', \end{aligned} \right\} (8.6)$$

となりこれから変位等も計算出来る。

すなわち

$$\begin{aligned} u_j - \overline{u_j} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} U_j^{(K)}(p, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \overline{U_j^{(K)}(p, \theta')} \overline{H(\theta')} d\theta', \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここで $U^{(K)}$, $\overline{U^{(K)}}$ は 未々 定めた 定常 変位 振動 による 変位 とする。

2枚板

$$\begin{aligned} T_j(p) - \overline{T_j(p)} &= \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \overline{T_j^{(k)}(p, \theta')} \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \overline{T_j^{(e)}(p, \theta')} \overline{H(\theta')} d\theta'. \quad (8.8) \end{aligned}$$

次に 散乱ポテンシャルでは (8.1) から成り立っている

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\theta) &= i k e^{i k \omega_0(\theta)}, \quad \omega_0(\theta) = i k e^{i k \bar{\omega}(\theta)} \\ \overline{\gamma_0(\theta+\pi)} &= -\gamma_0(\theta), \quad \overline{\omega_0(\theta+\pi)} = \omega_0(\theta) \\ \overline{u_j^{(0)}(\theta+\pi)} &= -u_j^{(0)}(\theta) \\ \overline{\overline{T_j^{(0)}}(\theta+\pi)} &= -\overline{T_j^{(0)}}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

等の関係があるから

$$\overline{u_j^{(0)}(\theta)} + u_j^{(0)}(\theta+\pi) = 0, \quad \text{on } L_j \quad (8.10)$$

となるので 前同様にして

$$\begin{aligned} \overline{\overline{u_j^{(0)}}(p, \theta)} + \overline{T_j^{(0)}(p, \theta+\pi)} &= \overline{\overline{T_j^{(0)}}(p, \theta)} + \overline{T_j^{(0)}(p, \theta+\pi)} \\ &= -\frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \overline{\overline{T_j^{(k)}}(p, \theta')} \overline{\overline{G(\theta', \theta)}} d\theta' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \overline{T_j^{(e)}(p, \theta')} \overline{H(\theta', \theta)} d\theta', \quad (8.11) \end{aligned}$$

9. 運動方程式、指向性利得

物体に平面波が当たって境界Cが変形する問題を考えて見よう。

§1の終りにあべたようにこれはまずCが変形しないとして散乱問題を解き、その強制力を求める。

これを $G T_j^{(n)}$ とするとこれは実は、ハスキントの関係 (6.7) により必ずしも散乱問題を解かなくても、その変形モードの放射問題の入射波の方向のフツテン関数からわかる。よい。

一方このモードでの放射問題を解くと境界Cがわかるからこれを次のように書く。

$$G T_j^{(out)} = -Z_{out}(i\omega) u_j, \quad \dots (9.1)$$

この Z_{out} はインピーダンス (外部系の) である。

これは一般にはマトリックスである。

同様に物体を u_j だけ変位させるもの

$$G T_j^{(in)} = -Z_{in}(i\omega) u_j, \quad \dots (9.2)$$

と書く事になる。

それ故平衡方程式は

$$Q_j(T_j^{(d)} + T_j^{(out)} + T_j^{(in)}) = 0$$

即ち

$$i\omega(Z_{out} + Z_{in})u_j = T_j^{(d)}, \quad \dots (9.3)$$

これより変位を定める式である。

これらの関係はかなり複雑であるので、仮に物体自身の固有振動のモードに分解して考えれば簡単になる。

今は簡単のためにある一つのモードの振動のみがある場合を考えよう。

そのモードを u_j とし 振動^(変位)振幅は $I u_j$ となるものとする。

$$Q_j \int_C T_j^{(out)} u_j ds = -i\omega Z^{(out)} \quad \dots (9.4)$$

振付けから入射する場合を考えると、
($Q_j = \frac{\rho c \omega^2}{k^2}$)

$$\int_C T_j^{(d)} u_j ds = \frac{1}{ik} F(\theta) \quad (9.5)$$

よって

$$-I(Z^{out} + Z^{in}) = \frac{Q}{ik} F(\theta), \quad (9.6)$$

$$\therefore I = \frac{i \frac{Q}{k} F(\theta)}{(Z^{out} + Z^{in})}, \quad (9.7)$$

で (9.4) の定義で u_j を実数値と定義すると

$$\operatorname{Re}\{Z^{\text{out}}\} = R = \frac{iQ}{\omega} \int T_j u_j ds = \frac{Q}{2\omega} \int_C (\bar{T}_j u_j - T_j \bar{u}_j) ds, \quad (9.8)$$

となる (7.5) より

$$R = \frac{\rho\omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G|^2}{k^4} + \frac{|F|^2}{R^4} \right] d\theta, \quad (9.9)$$

物体から受けとる動力は

$$\frac{Q}{4R^2} (I \overline{F(0)} + \bar{I} F(0)), \quad (9.10)$$

で与えられるからこれの最大となるのは (9.7) によつて

$$Z_{\text{out}} = \overline{Z_{\text{in}}}, \quad (9.11)$$

な時でありこの時物体から吸収するパワーは

$$W_a = \frac{Q^2 |F|^2}{8R^4 R} = \frac{\rho^2 \omega^4 |F|^2}{8R^6 R}, \quad (9.12)$$

従つて

$$A_{\text{ab}} = \frac{W_a}{E_0} = \frac{\rho\omega |F|^2}{4R^5 R} = \frac{|F/R|^2}{\frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G|^2}{k^4} + \frac{|F|^2}{R^4} \right] d\theta},$$

量子を定義すると

A_{ab} は ^{最大} 付動力吸収断面積である。 (9.13)

一方(9.7)は u_j の振動による発散波のもちこる動力

であるから その指向性利得 $G_{\theta}(\theta)$ は

$$G_{\theta}(\theta) = G_{\theta}^{(k)} + G_{\theta}^{(2k)} \quad (9.14)$$

$$G_{\theta}^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G|^2}{k^4} + \frac{|H|^2}{k^4} \right] d\theta$$

$$G_{\theta}^{(k)} = \frac{|G/k|^2}{11}$$

これを従うと (9.13) は

$$A_{\theta\theta}^{(k)} = -\frac{1}{k} G_{\theta}^{(k)}(\theta) \quad (9.16)$$

と整理する事が出来る。

同様にして 継波を受けるときは

$$A_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{k} G_{\theta}^{(k)}(\theta) \quad (9.17)$$

10. 散乱断面積

散乱波の持ちこるパワー W_s 入射はうどれだけ
入射波をなして物体が1はを散乱させている時の
の断面積が波のパワーに相当するかを示す量を
散乱断面積 A_s と呼ぶ。

(7.5) により、(和記号等省略略して)

$$W_s = \frac{P\omega^3}{4\pi R^2} \int_0 \left[(u + u^{(d)}) (\overline{T} + \overline{T}^{(d)}) - \overline{u + u^{(d)}} (\overline{T} + \overline{T}^{(d)}) \right] ds \quad (10.1)$$

(7.7) より、

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(E)} &= \frac{W_s}{E_R} = \frac{R}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{|G + G^{(d)}|^2}{K^4} + \frac{|H + H^{(d)}|^2}{R^4} \right) d\theta \\ A_s^{(K)} &= \frac{W_s}{E_K} = \frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

特に放射分 u, T がない時は 固定境界

では

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{(E)} &= \frac{W_{ss}}{E_R} = \frac{1}{2iR} \int_0 \left(u^{(d)} \overline{T^{(d)}} - \overline{u^{(d)}} T^{(d)} \right) ds \\ A_{ss}^{(K)} &= \frac{W_{ss}}{E_K} = \frac{K}{2iR^2} \int_0 \left(\dots \right) ds \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

となるから

$$\overline{u^{(d)}(\theta)} = -\overline{u^{(d)}(\theta)} = u^{(d)}(\theta + \pi)$$

$$-u^{(d)}(\theta + \pi) \overline{T^{(d)}(\theta)} = \overline{u^{(d)}(\theta)} \overline{T^{(d)}(\theta + \pi)} = \overline{u^{(d)}(\theta + \pi)} \overline{T^{(d)}(\theta)}$$

なるから

$$A_{ss}^{(-)} = \frac{1}{2ik} \int_C \left[\overline{u^0(\theta+\pi)} T^{(d)}(\theta) - u^0(\theta+\pi) \overline{T^{(d)}(\theta)} \right] ds$$

$$= -\frac{1}{2k^2} \left\{ \overline{F^{(d)}(\theta; \theta+\pi)} + \overline{F^{(d)}} \right\}$$

$$A_{ss}^{(k)} = -\frac{k^2}{2k^4} \left\{ \overline{G^{(d)}(\theta; \theta+\pi)} + \overline{G^{(d)}} \right\}$$

(10.4)

空孔散乱の場合も同様に 符号だけ変 式を得る。

一般の場合に戻って考えて (10.1), (10.2) を 3 つの部分に分けて考えよう。

$$A_s^{(-)} = I + II + III$$

$$III = A_{ss}^{(-)}$$

$$I = \frac{1}{2ik} \int_C (u \overline{\tau} - \overline{\tau} u) ds$$

$$II = \frac{1}{2ik} \int_C (u^d \overline{\tau} + u \overline{\tau^d} - \overline{u^d} \tau - \overline{u} \tau^d) ds$$

運動方程式は 15.17-の 42 が必要なら、

$$\tau = -\overline{T^{(d)}} \quad (10.6)$$

であるから I の右辺に代入すると

$$I = \frac{i}{2k} \int_C (u \overline{T^{(d)}} - \bar{u} T^{(d)}) ds$$

となるから、今(棒)は入射と考えるから)

$$\overline{H^*(\theta)} = i k \int_C \bar{u} T^{(d)} ds, \quad \dots (10.7)$$

のようなコッパ(2)関数を導入すれば

$$I = \frac{1}{2k^2} \{ \overline{H^*(\theta)} + \overline{H(\theta)} \}, \quad \dots (10.8)$$

II については、

$$\begin{aligned} & u^d \bar{T} + u \bar{T}^d - \bar{u}^d T - \bar{u} T^d \\ &= \overline{u^0(\theta+\pi) T} + u \overline{T^d(\theta)} - u \overline{T^0(\theta)} - \overline{u^0(\theta+\pi) T} \\ & \quad - \bar{u} T^d(\theta) + \bar{u} T^0(\theta) \\ &= u \overline{T^d(\theta)} - \bar{u} T^d(\theta) + \overline{T u^0(\theta+\pi)} - u T^0(\theta+\pi) \\ & \quad + u T^0(\theta+\pi) - \overline{T u^0(\theta+\pi)}, \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} I + II &= \frac{1}{2ik^2} \int_C [u T^0(\theta+\pi) - T u^0(\theta+\pi) - \overline{u T^0(\theta+\pi)} - \overline{T u^0(\theta+\pi)}] ds \\ &= - \frac{1}{2k^2} [H(\theta+\pi) + \overline{H(\theta+\pi)}], \quad \dots (10.9) \end{aligned}$$

(10.4) と仮定して

$$\begin{aligned} A_s^{(h)} &= - \frac{1}{k^2} \operatorname{Re} [F^{(d)}(\theta, \theta+\pi) + F(\theta, \theta+\pi)], \quad (10.10) \\ A_s^{(k)} &= - \frac{k^2}{K^4} \operatorname{Re} [G^{(d)}(\theta, \theta+\pi) + G(\theta, \theta+\pi)] \end{aligned}$$

となるから、これは (10.6) が成立する場合、つまり系外に
パワーが出て行かない場合である。

物体がパワー $\overbrace{=}$ ^{Waa} を吸収する場合は、この部分の
吸収パワーだけ変えるから (10.10) の右辺から吸収率
を差引いておけばよい。

11. 無限箇のリニア・アレイ

アンテナの場合指向特性を改善する事に
直線上に幾つかのアンテナを並べたものをリニア・アレイ
と呼ぶ。

無限箇並べた極限では指向特性はデルタ
関数^{放射}となって散乱は平面波となつて理解
し易いので以下少しく考察しよう。

図のように y 軸上に^等間隔 B で
無限箇の物体が並んでいるとしよう。

さて簡単の為、

$$B < \frac{1}{2}\lambda(\text{波}), \quad (11.1)$$

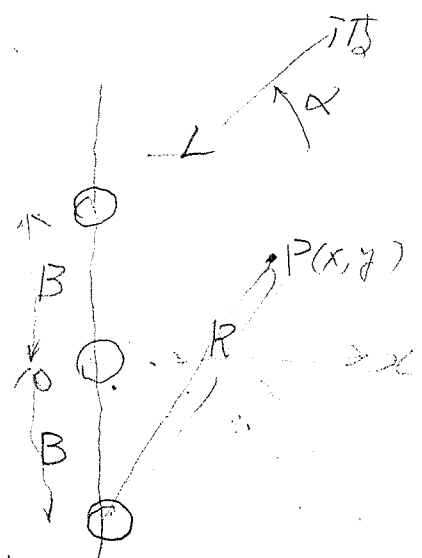
つまり間隔に波長の半は長より小さい

としておこう。

^{有限箇の場合}は
まず散乱は遠方で (3.5) のように表わされるが

今の場合はこれが集まつて平面波となる。

それを示す為には (2.7) (2.8) から出発する方が
易い。(以下経路についてのみ記す, 波動は全く同じ)



さて $KR \gg 1$ ならば

$$H_0^{(2)}(KR) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-iKR \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} e^{-iKR \cos(\varphi-\varphi')} d\varphi'$$

この積分で

「 ε は小さい量で $\theta=0$ の定常点の近くを含めば」
 積分である。

$$R \cos \varphi = x - x', \quad R \sin \varphi = y - y' \text{ とおくと}$$

$$H_0^{(2)}(KR) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} e^{-iK(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + iK(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} d\varphi, \quad (11.2)$$

を得る。

一方前(12)のように α 方向から入射波があるような場合を考えると 一方は $(R_N = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y'-R_N)^2})$

$$\sum_{n=-N}^N e^{inKB \sin \alpha} H_0^{(2)}(KR_N) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} e^{-iK\{\bar{\omega}(\varphi) - \bar{\omega}'(\varphi)\}} \times \sum_{n=-N}^N e^{inKB(\sin \varphi + \sin \alpha)} d\varphi$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\varphi-\varepsilon}^{\varphi+\varepsilon} e^{-iK\{\bar{\omega}(\varphi) - \bar{\omega}'(\varphi)\}} \times \frac{\sin [KB(N+\frac{1}{2})(\sin \varphi + \sin \alpha)]}{\sin \frac{KB}{2}(\sin \varphi + \sin \alpha)} d\varphi$$

$$= e^{-iK[x \cos \alpha - y \sin \alpha] + iK[x' \cos \alpha - y' \sin \alpha]}$$

$$= \begin{cases} e^{iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha) - iK(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)} & \text{for } x \gg x' \\ e^{-iK(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + iK(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)} & \text{for } x \ll x' \end{cases} \quad (11.3)$$

2.11.7 (2.7) より

$$\begin{aligned} \gamma(p) &\equiv \frac{1}{4i} e^{-iK(x \cos \alpha - y \sin \alpha)} \Gamma(-\alpha), \quad \text{for } x \gg 1 \\ &\equiv \frac{1}{4i} e^{iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \Gamma(\alpha + \pi), \quad \text{for } x \ll -1, \end{aligned} \quad (11.4)$$

となり, 正に平面波となる。

附録 A 核関数

(1.8), (1.10) の γ, ω を $\bar{z}$ のようにすると

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(p, q) &= \frac{i}{4} \frac{k^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \\ \omega_1(p, q) &= -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2(p, q) &= \frac{i}{4} \left(\frac{k}{R}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \\ \omega_2(p, q) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A.2)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad P = (x, y), \quad Q = (x', y').$$

変位は
$$u_{ij}(p, q) = \frac{(-1)^{i+j}}{R^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_{j+1}} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}, \quad (A.3)$$

境界力は
$$\left. \begin{aligned} \tau_{j1} &= -\omega_j \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{k^2} \gamma_j \frac{\partial x}{\partial n} - 2 \frac{\partial u_{j2}}{\partial s} \\ \tau_{j2} &= \omega_j \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2}{k^2} \gamma_j \frac{\partial y}{\partial n} + 2 \frac{\partial u_{j1}}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (A.4)$$

これから得られる

$$\begin{aligned} u_{11}(p, q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)] \\ u_{12}(p, q) &= u_{21}(p, q) = \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)] \\ u_{22}(p, q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(kR)] \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\bar{U}_1(p, Q) = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) \right] \\ - \frac{i}{2R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(12)}(KR) - H_0^{(12)}(KR)],$$

$$\bar{U}_2(p, Q) = -\frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) \right] \\ + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} [H_0^{(12)}(KR)] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(12)}(KR) - H_0^{(12)}(KR)],$$

$$\bar{U}_3(p, Q) = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR) \right] \\ - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} [H_0^{(12)}(KR)] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(12)}(KR) - H_0^{(12)}(KR)],$$

$$\bar{U}_{22}(p, Q) = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(12)}(KR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(12)}(KR) \right] \\ + \frac{i}{2R^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(12)}(KR) - H_0^{(12)}(KR)],$$

(A.6)

附録 B 核関数の長波極限値

$$\begin{aligned}
 u_{11} &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R^2 \log R) \\
 u_{12} = u_{21} &\doteq - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (R^2 \log R) \\
 u_{22} &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (R^2 \log R)
 \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{11} &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R) \\
 \tau_{12} &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x^2} (R^2 \log R) \\
 \tau_{21} &\doteq - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y^2} (R^2 \log R) \\
 \tau_{22} &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R)
 \end{aligned} \quad (13.2)$$

なお定数項は省略してある。

附録 C 円境界の放射散乱問題

半径を 1 とする.

1. 放射散乱問題.

a) 円周上 $r=1$ $u_r = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$, $u_\theta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= k^2 A_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \omega &= k^2 B_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

と $\gamma < \gamma$

$$u_r|_{r=1} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \{ n B_n H_n(k) - k A_n H_n'(k) \} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

$$u_\theta|_{r=1} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \{ -k B_n H_n'(k) - n A_n H_n(k) \} \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$$

と $\gamma < \gamma$

$$A_n = \frac{k H_n'(k)}{\Delta_n}$$

$$B_n = \frac{n H_n(k)}{\Delta_n}$$

$$\Delta_n = n^2 H_n^{(2)}(1) H_n^{(2)}(k) - k H_n'(1) H_n'(k)$$

(C.2)

$$G(\theta) = 4i^{n+1} k^2 A_n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} = 4i^{n+1} \frac{k^2 H_n'(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

$$H(\theta) = 4i^{n+1} k^2 B_n \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} = 4i^{n+1} \frac{n k^2 H_n(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

$$T_r = \frac{k^2}{k^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2 u_r = - \mathcal{J}_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$$

$$T_\theta = \omega + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - 2 u_\theta = - \mathcal{J}_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}_n^{(1,1)} &= 2 - k^2 A_n H_n(k) = 2 - \frac{k^3 H_n(k) H_n'(k)}{\Delta_n}, \\ \mathcal{J}_n^{(1,2)} &= 2n - k^2 B_n H_n(k) = n \left[2 - \frac{k^2 H_n(k) H_n'(k)}{\Delta_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (C.5)$$

$\Gamma = E^0$ - ジンズ は ± 2 の ± 1 の 定 義 を 与 へ る。

$$\left. \begin{aligned} G_{Tr} &= -i\omega \sum_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ \sinh\theta \end{pmatrix}, \\ G_{T\theta} &= -i\omega \sum_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ -\cosh\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.6)$$

$$\text{また} \quad Z_n^{(1,1)} = G \frac{\mathcal{J}_n^{(1,1)}}{i\omega}, \quad Z_n^{(1,2)} = G \frac{\mathcal{J}_n^{(1,2)}}{i\omega}, \quad (C.7)$$

$$b) \quad \Gamma \in \mathbb{R} \quad U_r = 0, \quad U_\theta = \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= k^2 C_n H_n(kr) \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ -\sinh\theta \end{pmatrix}, \\ \omega &= k^2 D_n H_n(kr) \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.8)$$

$$\left. \begin{aligned} U_r|_{r=1} &= \{-n D_n H_n(k) + k C_n H_n'(k)\} \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ -\sinh\theta \end{pmatrix} \\ U_\theta|_{r=1} &= \{-k D_n H_n'(k) + n C_n H_n(k)\} \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.9)$$

$$C_n = \frac{n H_n(k)}{\Delta_n}, \quad D_n = \frac{k H_n'(k)}{\Delta_n}, \quad (C.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}(\theta) &= 4i^{n+1} \frac{n k^2 H_n(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cosh\theta \\ -\sinh\theta \end{pmatrix}, \\ \bar{H}(\theta) &= 4i^{n+1} \frac{k^2 k H_n'(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sinh\theta \\ \cosh\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (C.11)$$

$$\left. \begin{aligned} T_r &= -z_n^{(2,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ T_\theta &= -z_n^{(2,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots (C.12)$$

$$\left. \begin{aligned} z_n^{(2,1)} &= z_n^{(1,2)} = n \left\{ 2 - \frac{k^2 H_n(k) H_n(k)}{\Delta n} \right\}, \\ z_n^{(2,2)} &= 2 - \frac{k^2 K H_n(k) H_n'(k)}{\Delta n}, \end{aligned} \right\} (C.13)$$

c) 円が剛体で x -軸に沿って運動する場合

$$u_r = \cos \theta, \quad u_\theta = -\sin \theta. \quad \dots (C.14)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} T_r &= -\left(z_1^{(1,1)} - z_1^{(2,1)}\right) \cos \theta, \\ T_\theta &= -\left(z_1^{(1,2)} - z_1^{(2,2)}\right) \sin \theta, \end{aligned} \right\} (C.15)$$

$$\frac{X}{4} \int_0^{2\pi} (T_r \cos \theta - T_\theta \sin \theta) d\theta = -\pi \left[z_1^{(1,1)} + z_1^{(2,2)} - 2 z_1^{(1,2)} \right],$$

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4}{\Delta_1} \left\{ K^2 k H_1'(k) - K^2 H_1(k) \right\} \cos \theta, \\ H(\theta) &= \frac{4}{\Delta_1} \left\{ k^2 H_1(k) - k^2 K H_1'(k) \right\} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \dots (C.16)$$

注意.

$$k H_1'(k) - H_1(k) = -k H_2(k)$$

運動方程式は C の位置を M とすると $M\ddot{x} = X + F$,
(F : 外力)

2. 背文散乱問題

a) 固定境界による縦波の散乱

単位振幅の縦波では x の正方向から来るものを考えれば充分であるから

$$\phi_0 = iK e^{iKx} = iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta, \quad \dots (C.17)$$

$$2.12 \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1,$$

これによる ϕ の変位境界力は

$$\left. \begin{aligned} U_r^{(0)} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n'(Kr) \cos n\theta \\ U_\theta^{(0)} &= \frac{i}{K} \sum_{n=0}^{\infty} n i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \sin n\theta \end{aligned} \right\} \dots (C.18)$$

$$\left. \begin{aligned} T_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{r^2}{K} J_n(Kr) + 2 J_n'(Kr) - \frac{2n^2}{K} J_n(Kr) \right] \cos n\theta, \\ T_\theta^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[n J_n'(Kr) - \frac{n}{K} J_n(Kr) \right] \sin n\theta, \end{aligned} \right\} (C.19)$$

境界条件は $U_r = -U_r^{(0)}, U_\theta = -U_\theta^{(0)}$ on C , (C.20)

であるから 前項の結果を適用して ϕ に $\phi^{(2)}$ を求める。

$$\begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n'(Kr) - \frac{n}{K} J_n(Kr) C_n \right] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} \varepsilon_n}{\Delta_n} \left[r J_n'(Kr) H_n(r) - \frac{n^2}{K} J_n(Kr) H_n(r) \right] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta, \\ \omega &= r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[J_n'(Kr) B_n - \frac{n}{K} J_n(Kr) D_n \right] H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta, \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{-2k^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)}(kr) \sin n\theta, \quad (C.21)$$

$$\begin{aligned} C.12 \quad J_n'(K) H_n(K) - J_n(K) H_n'(K) &= i [Y_n'(K) J_n(K) - J_n'(K) Y_n(K)] \\ &= i [J_{n+1}(K) Y_n(K) - J_n(K) Y_{n+1}(K)] = \frac{2i}{\pi K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \Big|_{r=1} = \gamma^{(0)} + \gamma \Big|_{r=1} &= K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i \varepsilon_n}{\Delta_n} \cos n\theta \left[J_n(K) \{ n^2 H_n(K) H_n(K) - k K H_n'(K) H_n'(K) \right. \\ &\quad \left. - H_n(K) \{ n^2 J_n(K) H_n(K) - k K H_n'(K) J_n'(K) \} \right] \\ &= \frac{2ik^2 K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \frac{H_n'(k)}{\Delta_n} \cos n\theta, \quad (C.22) \end{aligned}$$

境界力は

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{k^2}{K^2} P \Big|_{r=1} \\ T_\theta &= \omega \Big|_{r=1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T_r \\ T_\theta \end{aligned}} \right\} (C.23)$$

したがって x 方向の力は

$$\begin{aligned} \frac{X}{G} &= \int_0^{2\pi} (T_r \cos\theta - T_\theta \sin\theta) d\theta = 4 \frac{ik^3}{K} (-1) \frac{H_1'(k)}{\Delta_1} + \frac{4k^2 i}{K} \frac{H_1(k)}{\Delta_1} \\ &= \frac{4k^2}{iK \Delta_1} \{ k H_1'(k) - H_1(k) \} = \frac{4ik^3}{K \Delta_1} H_2(k), \quad (C.24) \end{aligned}$$

これは (C.16) の $G(0)$ に等しい。

又

$$G(\theta) = 4K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} [k K J_n'(K) H_n'(k) - n^2 J_n(K) H_n(k)] \cos n\theta$$

$$\bar{F}(\theta) = \frac{8ik^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta, \quad (C.25)$$

c) 固定境界による波動の分散
 電位振動の波動は 12 → 117

$$\omega_0 = i k e^{i k r} = k \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos n\theta, \quad (C.25)$$

$$\left. \begin{aligned} U_r^{(0)} &= -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} n i^n \varepsilon_n J_n(kr) \sin n\theta \\ U_\theta^{(0)} &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n J_n'(kr) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (C.27)$$

$$\left. \begin{aligned} T_r^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{n}{kr} J_n(kr) - n J_n'(kr) \right] \sin n\theta, \\ T_\theta^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n \left[k J_n(kr) - \frac{2n^2}{kr} J_n(kr) + 2 J_n'(kr) \right] \cos n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (C.28)$$

境界条件は $U_r = -U_r^{(0)}, U_\theta = -U_\theta^{(0)}$ であるから

$$\begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n(kr) \frac{n}{kr} - C_n J_n'(kr) \right] \sin n\theta \\ &= \frac{2K^2}{\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega &= k^2 \sum \varepsilon_n i^{n+1} \left[-\frac{n}{kr} B_n J_n(kr) + D_n J_n'(kr) \right] \cos n\theta \\ &= k^2 \sum \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{\Delta_n} \left[K H_n'(K) J_n(kr) - \frac{n^2}{k} H_n(K) J_n(kr) \right] \cos n\theta, \end{aligned} \quad (C.29)$$

$$\Omega = \omega^{(0)} + \omega \Big|_{r=1} = -\frac{2kK}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n'(K) \cos n\theta, \dots$$

$$T_r = \frac{1}{K^2} \gamma \Big|_{r=1}, T_\theta = \Omega \Big|_{r=1}, \quad (C.30)$$

$$G(\theta) = \frac{8K^2}{\pi k i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta,$$

$$H(\theta) = 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \left[k K H_n'(K) T_n'(k) - k^2 H_n(K) T_n(k) \right] \times \cos n\theta, \quad (C.31)$$

この場合

$$\frac{X}{G} = \int_0^{2\pi} (T_1 \cos \theta - T_0 \sin \theta) d\theta = 0$$

$$\frac{Y}{G} = \int_0^{2\pi} (T_1 \sin \theta + T_0 \cos \theta) d\theta$$

$$= 4k \frac{i}{\Delta_1} H_1(K) - \frac{4kK i}{\Delta_1} H_1'(K)$$

$$= 4kK \frac{H_2^{(1/2)}(K)}{\Delta_1},$$

(C.32)

c) 空孔に於ける縦波の散乱

境界上の変位が

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0} \varepsilon_n i^n M_n \cos n\theta \\ u_\theta &= \sum_n \varepsilon_n i^n N_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (C.33)$$

とすると (C.4), (C.12) より

$$\left. \begin{aligned} T_r &= - \sum_n \varepsilon_n i^n \cos n\theta \left[\tilde{f}_n^{(1,1)} M_n + \tilde{f}_n^{(2,1)} N_n \right], \\ T_\theta &= - \sum_n \varepsilon_n i^n \sin n\theta \left[\tilde{f}_n^{(1,2)} M_n + \tilde{f}_n^{(2,2)} N_n \right], \end{aligned} \right\} \quad (C.34)$$

これらの力から (C.23) によるいはの力と平衡になければならないから

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2k^2}{\pi K} A_n &= -\frac{2k^3}{\pi K} \frac{H'_n(k)}{\Delta_n} = \tilde{f}_n^{(1,1)} M_n + \tilde{f}_n^{(2,1)} N_n \\ -\frac{2k^2}{\pi K} C_n &= -\frac{2k^2}{\pi K} \frac{n H_n(k)}{\Delta_n} = \tilde{f}_n^{(1,2)} M_n + \tilde{f}_n^{(2,2)} N_n \end{aligned} \right\} \quad (C.35)$$

$$\therefore M_n = \frac{1}{\Delta_n D_n} \left(\frac{-2k^2}{\pi K} \right) \left[k H'_n(k) \tilde{f}_n^{(2,2)} - n H_n(k) \tilde{f}_n^{(1,2)} \right]$$

$$N_n = \frac{1}{\Delta_n D_n} \left(\frac{-2k^2}{\pi K} \right) \left[n H_n(k) \tilde{f}_n^{(1,1)} - k H'_n(k) \tilde{f}_n^{(1,2)} \right]$$

$$D_n = \tilde{f}_n^{(1,1)} \tilde{f}_n^{(2,2)} - \tilde{f}_n^{(1,2)} \tilde{f}_n^{(2,1)} \quad (C.36)$$

$$M_n = -\frac{2k^2}{\pi K \Delta_n D_n} \left[(k^2 - 2n^2) H_n(k) + 2k H'_n(k) \right], \quad (C.36)$$

$$N_n = -\frac{4n k^2}{\pi K \Delta_n D_n} \left[H_n(k) - k H'_n(k) \right]$$

3 3 3 3 3

$$\gamma = k^2 \sum i^n \varepsilon_n H_n(kr) \cos n\theta \left[A_n M_n + C_n N_n \right]$$

$$= -\frac{2k^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{H_n(kr)}{\Delta_n^2 D_n} \cos n\theta \left[k H'_n(k) \left\{ (k^2 - 2n^2) H_n(k) + 2k H'_n(k) \right\} + 2n^2 H_n(k) \left\{ H_n(k) - k H'_n(k) \right\} \right]$$

$$\omega = k^2 \sum i^n \varepsilon_n H_n(kr) \sin n\theta \left[B_n M_n + D_n N_n \right] \quad (C.37)$$

$$= -\frac{2k^2}{\pi K} \sum i^n \varepsilon_n \frac{H_n(kr)}{\Delta_n^2 D_n} \sin n\theta \left[-n H_n(k) \left\{ (k^2 - 2n^2) H_n(k) + 2k H'_n(k) \right\} + 2n k H'_n(k) \left\{ H_n(k) - k H'_n(k) \right\} \right]$$

$$G(\theta) = \frac{4k^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n \left[A_n M_n + C_n N_n \right] \cos n\theta \quad (C.38)$$

$$H(\theta) = \frac{4k^2}{i} \sum \varepsilon_n (-1)^n \left[B_n M_n + D_n N_n \right] \sin n\theta$$

d) 空孔に於ける散乱の散乱

$$\begin{aligned} u_r &= \sum \varepsilon_n i^n P_n \sin n\theta, \\ u_\theta &= \sum \varepsilon_n i^n Q_n \cos n\theta, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum \varepsilon_n i^n P_n \sin n\theta} \right\} \quad (C.39)$$

とおくと

(C.4), (C.12) より

$$\begin{aligned} T_r &= - \sum \varepsilon_n i^n \sin n\theta [P_n \zeta_n^{(1,1)} - Q_n \zeta_n^{(2,1)}] \\ T_\theta &= - \sum \varepsilon_n i^n \cos n\theta [-P_n \zeta_n^{(1,2)} + Q_n \zeta_n^{(2,2)}] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum \varepsilon_n i^n \sin n\theta} \right\} \quad (C.40)$$

平衡方程式は (C.29), (C.30) より

$$\begin{aligned} \frac{2k}{\pi} B_n &= \frac{2k}{\pi} \frac{n H_n(k)}{\Delta_n} = P_n \zeta_n^{(1,1)} - Q_n \zeta_n^{(2,1)}, \\ -\frac{2k}{\pi} D_n &= -\frac{2kK}{\pi} \frac{H_n'(k)}{\Delta_n} = -P_n \zeta_n^{(1,2)} + Q_n \zeta_n^{(2,2)}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{2k}{\pi} B_n} \right\} \quad (C.41)$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{\Delta_n D_n} \cdot \frac{2k}{\pi} \cdot [n H_n(k) \zeta_n^{(2,2)} - K H_n'(k) \zeta_n^{(1,2)}],$$

$$Q_n = \frac{2k}{\pi \Delta_n D_n} [n H_n(k) \zeta_n^{(1,2)} - K H_n'(k) \zeta_n^{(1,1)}],$$

$$P_n = \frac{2nk}{\pi \Delta_n D_n} [H_n(k) - K H_n'(k)],$$

$$Q_n = \frac{-2k}{\pi \Delta_n D_n} [(k^2 - 2n^2) H_n(k) + 2K H_n'(k)]. \quad \left. \vphantom{\frac{-2k}{\pi \Delta_n D_n}} \right\} \quad (C.42)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= k^2 \sum i^n \varepsilon_n H_n(kr) \sin n\theta [A_n P_n - C_n Q_n], \\ \omega &= k^2 \sum i^n \varepsilon_n H_n(kr) \cos n\theta [-B_n P_n + D_n Q_n] \end{aligned} \quad (C.43)$$

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum \varepsilon_n (-)^n (A_n P_n - C_n Q_n) \sin n\theta \\ \bar{H}(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum \varepsilon_n (-)^n (-B_n P_n + D_n Q_n) \cos n\theta \end{aligned} \quad (C.44)$$

e) 空孔による散乱の従来法との関連

従来の方は境界で力釣合せる方法である。

即ち継接法について考えれば (C.19) の $T^{(0)}$ について

$$T_r = -T_r^{(0)}, \quad T_o = -T_o^{(0)}, \quad \dots \quad (C.45)$$

前項の方法ではこの左辺を 2 つに別けて、一つは

固定境界の散乱による力 $T^{(0)}$ として もう一つを未知として

$$T_r^{(1)} = -(T_r^{(0)} + T_r^{(1)}), \quad T_o^{(1)} = -(T_o^{(0)} + T_o^{(1)}), \quad (C.46)$$

と書まかえてただけである。

それ故 (C.45) の T に対応する変位は (C.18) の $u^{(0)}$ ($= u^{(1)}$) を含みながら (C.46) の $T^{(1)}$ に対応する変位はそれを含む実際の変位になっている。

又 19 では (C.46) の方が式がまとまっている。

一般の場合 ^(任意形状) 会では 解くべき積分方程式の

最も簡単なのは (2.9), (2.10) であるからこれを

$$A\{\gamma, \omega\} = \{u_n, u_s\}, \quad \dots \quad (C.47)$$

$$\text{と書くと 解は } \{\gamma, \omega\} = A^{-1}\{u_n, u_s\}, \quad (C.48)$$

これから T を求めておいて

$$\{T_n, T_s\} = -B\{u_n, u_s\} \quad (C.49)$$

B はインヒーダンスマトリックスであり、
と書く。今の場合は

$$\{T_n^{(0)}, T_s^{(0)}\} = B\{u_n, u_s\}, \quad (C.50)$$

となるから、固定境界による散乱解は、

$$\{T_n^{(1)}, T_s^{(1)}\} = -B\{u_n^{(0)}, u_s^{(0)}\}, \quad \dots (C.51)$$

であるから、これを代入して、

$$\{T_n^{(1)}, T_s^{(1)}\} = B\{u_n^{(1)}, u_s^{(1)}\}, \quad (C.52)$$

$$u_n^{(1)} = u_n - u_n^{(0)}, \quad u_s^{(1)} = u_s - u_s^{(0)}$$

となり、 $u^{(1)}$ は実際の境界の変位を示す。

解は

$$\{u_n^{(1)}, u_s^{(1)}\} = B^{-1}\{T_n^{(1)}, T_s^{(1)}\}, \quad (C.53)$$

と与えられる。