

## 応力拡大係数について

別所

## 概要

頁  
0-1~3

1. 遠土場の漸近展開 1
2. 歪エネルギー 3
3. 応力拡大係数の定義 6
4. 空孔の僅かな変形 10
5. 空孔の周りの小さい割れ目 15
6. 動的問題における応力拡大係数  
の考え方 19  
~25

## 附録 A

A-1

" B

B-1~2

" C

C-1~2

## 参考文献

1. A.S. テルマン, A.J. マッテビリ "構造材料の強度と破壊 I"  
電報増刊

2,

## 概要

弾性学の一つの重要な役割は、応力集中度の見積りである。しかし応力集中度は、応力分布の計算と特定の位置の値を示す示すだけで全体としての応力分布の状態を示すには「歪エネルギー」のような量が必要である。

破壊力学では、割れ目の拡大による歪エネルギーの増分として応力拡大係数が定義されて、破壊の指標となっているが、その元になる歪エネルギーに関する記述が従来あまりないで、唐突の感をもつ。

本報では無限に広がり平板の中の空孔が、一方向に引っ張る場合に限って、応力場の遠方での漸近展開の係数が歪エネルギーに比例する事をまず指摘し、次に応力拡大係数の定義に觸れ、従来の定義では割れ目が伸びる事だけを考えているが、もしこれを幾何学的に相似性を保たせ、割れ目が拡大するとすれば、次元の考察から容易に応力拡大係数は歪エネルギーによって表わされる事を示す。

また所謂 J 積分は半無限割れ目の場合に

のみ有効であつて、有限な長さの場合は具合が悪いが、上述のように幾何学的相似を保つて拡大する場合は同じような役割を果たす積分がある本を創示する。

そこで応力拡大係数の導入は全く直観的に行われているが、これを解析的に考えて空孔の僅かな変形による歪エネルギーの変化を与える式を導出し、それが従来の定義に一致する事を示す。

この式は空孔辺の応力が一定ならば面積を一定に保った僅かな変形に対して、歪エネルギーが停留値を保つ事を示している。

従つてこの式を利用して空孔の指定された部分で応力が一定となる形を求める事が出来、既に試みたが実際上はこの式では不便で直接僅かな変形による応力変化を計算してそれを一定とする方が早い。そこでこの場合の境界条件を示すに止めた。

さて上述の変形は滑らかである事を前提としており、大きい穴の周辺に小さい割れ目が生じる

ような時には適用出来ない。

そこでそのような時の近似的見極め法として変分原理が適用出来る事を述べる。

最後に動的弾性問題の場合、応力拡大係数をどうとればよいかについて考察する。

ある波長の平面波が入射する問題を考え、静的な場合同様穿孔表面で入射波のなす仕事を考えるとそれは所謂コッチェン関数となるが、これは散乱波の振幅を表す定数である。

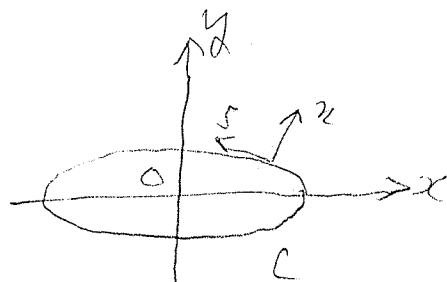
一方静的な場合のポテンシャルエネルギーに対して、動的な場合にはこれから運動エネルギーを差引いたもの(運動ポテンシャル又はラグランジヤンの符号をかえたもの)を考えれば、静的な場合と同様な式が得られる事を示す。

# 1. 遠場の漸近展開

無限に広い平板の中に空孔  $C$  があり

遠方では一様な応力を受けるとしよう。

そのような問題はさつあつて応力関数は



$$F_i(x, y) = a_i(x, y) + f_i(x, y), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$$a_1 = \frac{y^2}{2}, \quad a_2 = xy, \quad a_3 = \frac{x^2}{2}, \quad (1.2)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial y} F_i \Big|_C = \left. \frac{\partial a_i}{\partial s} \right|_C + \frac{\partial^2 a_i}{\partial s \partial y} = 0, \quad p_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial y}, \\ q_i &= \frac{-\partial^2 F_i}{\partial s \partial x} \Big|_C = \left. \frac{\partial a_i}{\partial s} \right|_C \frac{\partial^2 a_i}{\partial s \partial x} = 0, \quad q_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

充分遠方では

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow -C_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} S - C_2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} - C_3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \\ S &= \frac{E r^2}{8\pi} \log r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \int_C U \frac{\partial y}{\partial s} ds, \quad C_2 = \int_C \left( U \frac{\partial x}{\partial s} - V \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds, \\ C_3 &= - \int_C V \frac{\partial x}{\partial s} ds, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$U, V$  は一様な応力場の場合も含む全変位である。

(1.4) を書きかえと

$$f \longrightarrow -\frac{E}{4\pi} \left[ A \log r + \frac{B}{2} \cos 2\theta + \frac{C}{2} \sin 2\theta \right], \quad (1.6)$$

$$EA = C_1 + C_3, EB = C_3 - C_1, EC = C_2, \quad \dots (1.7)$$

これ以降も方向に単位引張応力をうける場合に限り事にしよう。

円孔の場合は(半径  $a$ )

$$\begin{aligned} EA &= 2\pi a^2, EB = 4\pi a^2, EC = 0 \\ C_1 &= -\pi a^2, C_3 = 3\pi a^2, C_2 = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \dots (1.8)$$

楕円孔の場合は(長半径  $a$ , 短半径  $b$ )

$$\begin{aligned} EA &= 2\pi a^2, EB = \pi(a+b)^2, EC = 0 \\ C_1 &= \pi a^2 - \frac{\pi}{2}(a+b)^2, C_2 = 0, C_3 = \pi a^2 + \frac{\pi}{2}(a+b)^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (1.9)$$

すなわち楕円孔の場合の最大応力集中率は

$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right) \quad \dots (1.10)$$

である。

また  $EA$  は 空孔の面積の広がる量である。

## 2. 歪エネルギー

2.1では前節の  $F_3$  のみ (y軸方向引張) を考えて suffix を省略する。

単位厚さ, 単位面積あたりの歪エネルギー密度は

$$V(F, F) = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x (u_x - \frac{v}{E}) + (1 + \sigma_y) (\frac{1}{E} + v_y) + \tau_{xy} (u_y + v_x) \right], \quad (2.1)$$

$$V(f, f) = \frac{1}{2} [\sigma_x u_x + \sigma_y v_y + \tau_{xy} (u_y + v_x)], \quad (2.2)$$

$$V(F, F) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{E} + 2v_y + V(f, f) \right], \quad (2.3)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v, u, v$  は  $f$  による応力と変位で,  $u, v$  の下添字は偏微分を示す。

したがって歪エネルギーは

$$W(F) = \iint_D V(F, F) dx dy, \quad (2.4)$$

増乱場のは

$$W(f) = \iint_D V(f, f) dx dy = -\frac{1}{2} \int_C (u p + v q) ds, \quad (2.5)$$

(1.5) に (2.3) を代入すると

$$W(F) = W_0 + \int_C v \frac{\partial x}{\partial s} ds - \frac{1}{2} \int_C (u p + v q) ds, \quad (2.6)$$

$$2.12 \quad W_0 = \frac{1}{2E} \iint_{D+\bar{D}} dx dy, \quad (2.7)$$

で空孔がない時の系エネルギーである。(DはCの内部領域)

境界条件

$$p=0, \quad q = + \frac{\partial x}{\partial s}$$

を(2.7)に代入すると (DをCの補領域として)

$$W(F) = W_0 - W(f) - \dots, \quad (2.8)$$

$$W(f) = -\frac{1}{2} \int_C v \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{D}{2E} = -\frac{1}{2} \int_C V \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad (2.9)$$

$W(f)$ は空孔がある事による解放エネルギーである

が、(1.6)によれば、擾乱場の系エネルギーである。

(1.9)によれば、空孔周りで又一様子/張り力に依る。

ひたけ変位させるための仕事であるから表面のポテンシャルエネルギーでもある。

(1.5)と(2.9)を較べて

$$W(f) = \frac{C_3}{2E}, \quad (2.10)$$

このようにfの漸近展開(1.4)の係数は、表面系エネルギーに比例している事がわかる。

### 3. 応力拡大係数の定義

応力拡大係数は Griffith, Irwin の理論によつて

エネルギー解放率によつて定義される。

(今の場合は)

即ち割れ目先端が  $a$  だけ進行した時の

$$\frac{\Delta W(a)}{\Delta a} = K_I^2/E, \quad (3.1)$$

もしも割れ目が幾何学的に相似に拡大するものとするならば,  $W(a)$  に面積の二乗をもちいて

大きさを測り,  $W(a)/L^2$  ( $L$  は代表的な長さ)

は一定で従つて,

$$\frac{\partial W(a)}{\partial a} = 2L \left[ \frac{W(a)}{L^2} \right] = 2 \frac{W(a)}{L}, \quad (3.2)$$

となつて  $W(a)$  から直ちに計算出来, 薄い板状

割れ目での結果に一致する。

次に応力集中率との関係において

応力拡大率の計算式として所謂 J 積分が

与えられる

$$J = \frac{\partial W}{\partial a} = \int_C V(F, H) \frac{\partial x}{\partial \eta} ds, \quad (3.3)$$

と与えらるが、これは半無限割れ目での定義式で有限な割れ目では両端が打ち消合つて0になるので都合が悪い。

この式の便利なところは境界条件をばつて

$$J = \int_C \left[ V(F, F) \frac{\partial X}{\partial n} - \left( P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] ds, \quad (3.4)$$

とかけ、この形ならば積分路はどこに選んでもよいとされている。

幾何学的相似を保つて、穴の広がるならば積分が0にならずかつ積分路を任意に変更する事のできる積分は次のように与える事が出来る。

$$I = \int_C \left[ V(F, F) \left( x \frac{\partial x}{\partial n} + y \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] ds, \quad (3.5)$$

$$J = \int_C \left[ V(F, F) \left( x \frac{\partial x}{\partial n} + y \frac{\partial y}{\partial n} \right) - \left\{ P(xu_x + yu_y) + Q(xv_x + yv_y) \right\} \right] ds, \quad (3.6)$$

割れ目の巾が充分小さければ、先端附近でJに略等しい事は容易にわかる。

(3.6)が積分路に関係しない事の言ひ明は (3.4)の場合と同じで

$$V(F, F) = \frac{1}{2} [F_{yy} U_x + F_{xx} V_y - F_{xy} (U_y + V_x)] \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{から} \quad \frac{\partial V(F, F)}{\partial x} &= F_{yy} U_{xx} + F_{xx} V_{yx} - F_{xy} (U_{yx} + V_{xx}) \\ \frac{\partial V(F, F)}{\partial y} &= F_{yy} U_{xy} + F_{xx} V_{yy} - F_{xy} (U_{yy} + V_{xy}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる事を利用して、線積分を面積分に変換すれば、容易にわかる。

さて、これを次の場合に適用して見よう。

$$F = \frac{x^2}{2} + f, \quad U = -\frac{y^2}{E} + u, \quad V = \frac{y}{E} + v, \quad (3.9)$$

これを (3.6) に代入して積分路を無限に大きい可周  $R$  にとると 攪乱項の自乗成分はすべて消えて

$$\begin{aligned} I = \int_R & \left[ \frac{xy_s + yx_s}{2E} + \frac{1}{2} \left( v_y + \frac{f_{xx} - 2f_{yy}}{E} \right) (x(x_h + y y_h)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{E} (y f_{xs} + v x f_{ys}) + x_s (x v_x + y v_y) \right] ds, \quad (3.10) \end{aligned}$$

となるが  $xy_s + yx_s = r \cos 2\theta$ ,  $x(x_h + y y_h) = r$ , であるので  
附録 A から この3つの項はすべて消えて

$$I = - \int_R \left[ \frac{r}{E} (f_x \cos \theta + 2f_y \sin \theta) + r v_r \sin \theta \right] d\theta, \quad (3.10')$$

$$-\frac{r}{E} \int_R (f_x \cos \theta - r f_y \sin \theta) d\theta = \frac{A+B/2}{4} - \nu \left( \frac{A-B/2}{4} \right) = \frac{1-\nu}{4} A + \frac{(1+\nu)}{8} B,$$

$$-r^2 \int_R \nu r \sin \theta d\theta = \frac{B}{2} + \frac{1+\nu}{4} \left( A - \frac{B}{2} \right),$$

$$\therefore \bar{I} = \frac{1}{2} (A+B) = \frac{C_3}{E}, \quad (3.11)$$

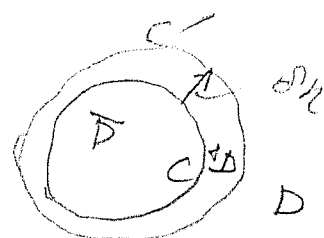
これは (1.7), (2.10) から (3.2) に一致している。

#### 4. 空孔の僅かな変形

(3.3) が解放歪エネルギー率である事は従来の文献では物理的考察から導いている。

一般的に、<sup>一般的</sup> 2.1 ではもっと解析的に空孔の形が僅かに変形する時の歪エネルギーの変分を求めて見よう。

図のように  $C$  が僅かに変形した  $C'$  になったとしよう。



$C'$  の時の擾乱流体力学量を  $f'$  とすると (3.9) の  $W(f)$  の変分は

$$\delta W(f) = W_{C'}(f') - W_C(f), \quad (4.1)$$

とかける。

$$\begin{aligned} \text{所で} \quad W_{C'}(f') &= \frac{1}{2} \int_{C'} V' \frac{\partial X}{\partial s} ds = + \frac{1}{2} \int_{C'} (U' p_0 + V' q_0 - u_0 P' - v_0 Q') ds, \\ p_0 &= 0, \quad q_0 = - \frac{\partial X}{\partial s}, \quad u_0 = - \frac{v X}{E}, \quad v_0 = \frac{u}{E}, \\ P' &= 0, \quad Q' = 0, \quad \text{on } C', \end{aligned} \quad (4.2)$$

この形の積分は積分路を変えてもよいので、今  $C'$  を  $C$  へ変形  $C'$  が滑らかで  $f'$  は  $C'$  の内側に解析接続出来ると仮定すれば

$$W_{C'}(f') = \frac{1}{2} \int_C (U' p_0 + V' q_0 - u_0 P' - v_0 Q') ds, \quad (4.3)$$

となる。

$W_c(f)$  により  $\neq$

$$W_c(f) = \frac{1}{2} \int_c (U p_0 + V g_0 - u_0 P - v_0 Q) ds, \quad (4.4)$$

となるから

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_c [p_0 \delta U + g_0 \delta V - u_0 \delta P - v_0 \delta Q] ds, \quad (4.5)$$

を得る。  $2.12$

$$\begin{aligned} \delta U &= U' - U = u' - u \pm \delta u, \quad \delta V = V' - V = v' - v \pm \delta v, \\ \delta P|_c &= P' - P|_c = P', \quad \delta Q|_c = Q' - Q|_c = Q' \quad (4.6) \\ &\because P = Q = 0 \text{ on } C \end{aligned}$$

また  $p_0 = -p$ ,  $g_0 = -g$  であり,  $\delta u, \delta v$  は無限遠で 0 になる

$$\begin{aligned} \int_c (p_0 \delta U + g_0 \delta V) ds &= - \int_c (p \delta u + g \delta v) ds \\ &= - \int_c (u \delta p + v \delta g) ds, \quad (4.7) \end{aligned}$$

よって

$$\delta W = - \frac{1}{2} \int_c (U P' + V Q') ds, \quad (4.8)$$

となるが, (4.2) の条件があるのでこれは  $C'$  と  $C$  の間の領域の積分に変換出来,

$$\delta W = - \iint_{\Delta D} V(F, F') dx dy, \quad \dots (4.9)$$

となるが 2 次の微少量を無視すると最終的に

$$\delta W(F) = \int_C V(F, H) \delta h \, ds, \quad (4.10)$$

となる。

この式で  $\delta h = \Delta C \frac{\partial X}{\partial h}$  (4.11)

とかけば、J 条件分 (3.3) に - 取れ

$$\delta h = \Delta E \left( X \frac{\partial X}{\partial h} + Y \frac{\partial Y}{\partial h} \right), \quad (4.12)$$

$$\Delta E = \frac{\Delta C}{C}$$

とかけば (3.5) に - 取れる。

(4.10) は (4.11) および (4.12) が「滑らか」であるという仮定で導いたもので、C に小さなずれがあるときのような場合は適用出来ず、更にためて考えなければならぬ。  
後述のように

所で (4.10) にあって C 上での境界条件を考えると

$$\begin{aligned} V(F, H) &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{T_{xy}^2}{2G} \\ &= \frac{1}{2E} \sigma_s^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

こゝでは  $\sigma_x, \sigma_y, T_{xy}$  は全応力とし、 $\sigma_s$  は s に沿う全応力とする。

それ故 (4.10)は

$$\delta W(f) = \frac{1}{2E} \int_C \sigma_s^2 \delta n ds, \quad (4.14)$$

と書く事も出来る。

この式からもし  $C$  上のある部分  $\Delta C$

$$\sigma_s : \text{const. on } \Delta C, \quad (4.15)$$

ならば、その部分で

$$\int_{\Delta C} \delta n ds = 0, \quad (4.16)$$

なる条件の下に  $\delta n$  をいくらがえても

$$\delta W = 0, \quad (4.17)$$

となり、逆に (4.16) の条件の下に  $\delta W = 0$  となる

ならば  $\sigma_s$  は一定となる。

つまり 周上の応力が一定である <sup>空孔</sup> 形状を  
求めるには  $W$  が停留値をとるように変形  
させればよい事になる。

しかし  $\delta n$  をがえても  $W$  は 形状の変化には  
大抵鈍い積分なので あまりよい結果は  
得られない。

この問題を解くには  $\delta n$  だけ変形した事による  
応力関数の変分  $\delta f$  を (4.6) の境界条件によつて  
求め、それによる応力の変分を求めて直接 (4.15)  
から  $\delta r$  を求めるのが早道である。

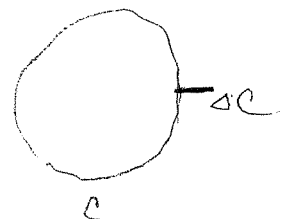
その境界条件は

$$F_y|_c \doteq -f_{yn} \delta n, \quad F_x|_c \doteq -(X_n + f_{xn}) \delta n, \quad (4.18)$$

# 5. 空孔の周上に小さい空孔がある場合

この場合は (4.10) または (4.14) は使えないので

次の変分原理を用いて見よう。



$$I = \frac{1}{2} \int_{C+\Delta C} (p u + q v + 2 v q_0) ds, \quad (5.1)$$

なる汎関数の変分をとると

$$\delta I = \int_{C+\Delta C} [p \delta u + (q_0 + q) \delta v] ds, \quad (5.2)$$

となるので

$$\left. \begin{array}{l} \delta I = 0 \text{ ならば} \\ p = 0, \quad q = -q_0 \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

その極値は

$$\text{extremum}[I] = \frac{1}{2} \int_{C+\Delta C} v q_0 ds = w(f), \quad (5.4)$$

ただし (1.9) に より

$$w(f) = W(f) \sim \frac{D}{2E}, \quad (5.5)$$

さて 比較関数として

$$\left. \begin{array}{l} u \rightarrow u + \alpha u_c \\ v \rightarrow v + \alpha v_c \\ p \rightarrow p + \alpha p_c \\ q \rightarrow q + \alpha q_c \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

ととり,  $(u, v)$  は  $C$  の解, 即ち

$$p=0, \quad q=-q_0 x_3 \text{ on } C, \quad (5.7)$$

$(u_c, v_c)$  は  $\Delta C$  とその鏡像の割れ目の解

$$p_c=0, \quad q=-q_0=x_3 \text{ on } \Delta C, \quad (5.8)$$

としよう。

(5.1) に代入すると

$$I = A + 2\alpha B + \alpha^2 C, \quad (5.9)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_{C+\Delta C} (p u + q v + 2v q_0) ds,$$

$$B = \frac{1}{4} \int_{C+\Delta C} [p u_c + q v_c + u p_c + v q_c + 2v_c q_0] ds, \quad (5.10)$$

$$C = \frac{1}{2} \int_{C+\Delta C} (p_c u_c + q_c v_c) ds,$$

$\alpha$  について微分して 0 とおくと

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 2(B + \alpha C) = 0, \quad \alpha = -\frac{B}{C}, \quad (5.11)$$

$$w' = A - \frac{B^2}{C}, \quad (5.12)$$

$\Delta C$  は面積を持たない線分としておこう。

また積分  $A$  において  $\Delta C$  上では  $u, v, p, q$  は連続  
 凸則であるから明らかにその上の積分は往復で  
 打消し合って

$$A = \frac{1}{2} \int_C \mathcal{W} g_0 ds = W \quad (5.13)$$

次に  $C$  に對しては (1.6) により

$$C = - \iint_{D-\Delta C} V(f_c, f_c) dx dy, \quad (5.14)$$

で“あるが”， $\Delta C$  が充分小さいとすると，近似的に

$$C \doteq \frac{1}{4} \int_{\Delta C + \overline{\Delta C}} (p_c u_c + q_c v_c) ds = -\frac{W_c}{2} \quad (5.15)$$

$\overline{\Delta C}$  は  $\Delta C$  の  $C$  に對する鏡像とする。

最後に  $B$  についてはいさす相反定理より

$$B = \frac{1}{2} \int_{C+\Delta C} [p u_c + q v_c + v_c q_0] ds, \quad (5.16)$$

$C$  上では (5.17) により 被積分関数は消えるから

$$B = \frac{1}{2} \int_{\Delta C} [p u_c + (q + q_0) v_c] ds, \quad (5.17)$$

$\Delta C$  の重さの差を考えると右辺第1項は消える。

また <sup>（結果のため）</sup>  $\Delta C$  は  $x$  軸上にありとすると

$$g + g_0 = -F_{xs} = \pm F_{xx}, \quad \left\{ \begin{array}{l} + \text{ for } y=+0 \\ - \text{ for } y=-0 \end{array} \right\}, \quad (5.18)$$

$$= \pm \sigma_y,$$

となり,  $\sigma_y$  が  $\Delta C$  の上で略々同じ ( $\Delta C$  が非常に小さい) とすれば

$$B \div \frac{\sigma_y}{2} w_c, \quad (5.19)$$

2. に  $\sigma_y$  は  $\Delta C$  上の  $C$  による  $y$  方向 <sup>全</sup> 応力の代表値とする。

これらを (5.12) に代入すると

$$w \div w - \frac{\frac{\sigma_y^2}{4} w_c^2}{-\frac{w_c}{2}} = w + \sigma_y^2 \left( \frac{w_c}{2} \right), \quad (5.20)$$

となり直観的な考えに一致する。

(5.10) の式から数値計算をすればもう少し正確な値が得られるであろう。

## 6. 動的向題における応力拡大係数の考え方

無限に広い平板面内に平面波が入射する場合を考えよう。

現象はすべて円周波数  $\omega$  で起るものとし、時間因子  $e^{i\omega t}$  を省略し、応力等々は複素表示する。

動的な場合も応力拡大係数の定義として (3.1) を使うのは自然であると考えられるが、

$W(t)$  は時間的に変動するので、先ずは時間平均をとる事にしよう。

$W(t)$  は (1.9) 同様入射波によって空孔周を"変位させる仕事"として定義し、その時間平均をとる事にすれば、(単位時間になす仕事(パワー)の平均値)

$$\bar{W}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_C \left[ \operatorname{Re}(\vec{U} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\vec{p}_0 e^{i\omega t}) + \operatorname{Re}(\vec{V} e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(\vec{q}_0 e^{i\omega t}) \right] dS, \quad (6.1)$$

となり、 $t$  について積分すると

$$\bar{W}(f) = \frac{\omega}{4\pi} \int_C [\overline{U p_0} + \overline{V q_0} - \overline{U p_0} - \overline{V q_0}] dS, \quad (6.2)$$

附録 C の 2.14 の (3) 式の定義 (C.3) から、

$$W(f) = \frac{c\omega}{4\pi K^2} [H(\theta - \pi) - \overline{H(\theta - \pi)}], \quad (6.3)$$

あるいは又

$$\int_C [u_0 \bar{p}_0 + v_0 \bar{q}_0 - \bar{u}_0 p_0 - \bar{v}_0 q_0] ds$$

なる積分は  $C$  を充分大きい円周上にとる事が出来、  
その上で積分すると 附録 B の式から明らかに 0 となるので、

$$W(f) = -\frac{i\omega}{4\pi} \int_C [u \bar{p} + v \bar{q} - \bar{u} p - \bar{v} q] ds, \quad (6.4)$$

と書く事も出来る。

又附録 (7.5) 式によつて

$$W(f) = \frac{c\omega^3}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|H(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta, \quad (6.5)$$

2.12

$$F(\theta) = \frac{k^3}{K} G \int_C [p u_0 + q v_0 - u p_0 - v q_0] ds, \quad (6.6)$$

であるが、さらに同 10 節の散乱断面積  $A_s$   
(今は 層の伝えをもつので 幅と呼ぶべきだろう)

をばうと

$$W(f) = E_K A_s, \quad (6.7)$$

2.12

$$E_K = \frac{c\omega G}{2K} k^2 = \frac{c\omega^3}{2K} \quad (6.8)$$

で、入射波が単位面積当りに運ぶパワーである。  
(単位振巾の)

次に (3.3), (4.14) に対称形式を作るために  $C$  を  $5n$  点で等分し  $C'$  にするとして  $H$  が  $H'$  になるようにする。

$$H'(\theta) = -GK^2 \int_C [U'(\theta)p_0(\theta) + V'(\theta)q_0(\theta)] ds, \quad (6.9)$$

$$P' = p_0 + p' \big|_C = 0, \quad Q' = q_0 + q' \big|_C = 0, \quad (6.10)$$

であるから

$$H' = -GK^2 \int_C [U'p_0 + V'q_0 - u_0p' - v_0q'] ds, \quad (6.9')$$

$$H(\theta) = -GK^2 \int_C [Up_0 + Vq_0] ds, \quad (6.11)$$

であるから

$$\delta H = H' - H = -GK^2 \int_C [\tilde{p}_0 \delta u + \tilde{q}_0 \delta v - u_0 p' - v_0 q'] ds, \quad (6.12)$$

$$\delta u = U' - U, \quad \delta v = V' - V$$

また

$$\int_C (\tilde{p}_0 \delta u + \tilde{q}_0 \delta v) ds = - \int_C (p \delta u + q \delta v) ds$$

$$= - \int_C (u \delta p + v \delta q) ds,$$

$$\delta p = p' - p = P' - P \big|_C = P' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

$$\delta q = q' - q = Q' - Q \big|_C = Q'$$

であるから (6.12) に代入すると

$$\delta H = GK^2 \int_C (UP' + VQ') ds, \quad (6.13)$$

これを面積分に变换すると

$$\tilde{L} = \frac{L}{2} [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - k^2 u_j u_j], \quad \dots (6.14)$$

つまり Modified Lagrangean を導入して

$$\delta H = 2K^2 \int_C \tilde{L} \delta n ds, \quad \dots (6.15)$$

以上では

$$G\tilde{L}|_C = \frac{\sigma_s^2}{2E} - \frac{\rho\omega^2}{2}(U^2 + V^2), \quad \dots (6.16)$$

(4.13)と同じく  $\sigma_s$  は (4) に沿う応力で、(4.10)

と等なる点、(6.16)で (4.10) の運動エネルギー

が差別されている点である。

(6.3) に代入すると、

$$\delta W(f) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \int_C \tilde{L} \delta n ds \right\}, \quad (6.17)$$

この形を (4.14) と比較してみると大変簡単でして

に式において  $\omega \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow 0$ ) とすると (4.14) に

一致しないので 0 になる。

そこでもう一度 (1.9) は表面のポテンシャルエネルギー  
と等しいことに注目し、今の場合はその平均値をとる事  
にすれば

例えば  $p(t) = |p| \cos(\omega t + \delta), u(t) = |u| \cos(\omega t + \varepsilon)$

とすると

$$p(t)u(t) = \frac{1}{2}|p||u|\{\cos(\delta - \varepsilon) + \cos(2\omega t + \delta + \varepsilon)\}$$

であるからその平均値は

$$\begin{aligned} \text{mean}\{p(t)u(t)\} &= \frac{1}{2}|p||u|\cos(\delta - \varepsilon) \\ &= \frac{1}{4}(p\bar{u} + \bar{p}u), \end{aligned}$$

であるから

$$W(t) = +\frac{1}{4} \int_C [U\bar{p}_0 + V\bar{q}_0 + \bar{U}p_0 + \bar{V}q_0] ds_x \quad (6.18)$$

のように定義しよう。

(6.3), (6.6) の定義により

$$W(t) = \frac{1}{4GK^2} [H(\theta - \pi) + \overline{H(\theta - \pi)}], \quad (6.19)$$

となる。

:(6.3) と比較すれば  $H$  の  
互に実部と虚部の関係  
にある事がわかるので  $H$  の変分等は同じになり  
(6.17) に 対して、直ちに

$$\delta W(f) = -\frac{1}{4} \operatorname{Re} \left\{ \int_c \bar{z} \delta z ds \right\}, \quad (6.20)$$

を得る。

しかしこの式では  $\bar{z}$  が複素数である点から不便であるのでこの点をもう一度考えて見よう。

今更替して

$$H(\bar{z}) = -GK^2 \int_c [\bar{U} p_0 + \bar{V} \bar{q}_0] ds. \quad (6.21)$$

なる関数を定義し、(6.9)以下に於いて境界を  $\delta z$  だけ微少変形させよう。

その前に (6.19) は

$$W(f) = \frac{1}{4GK^2} [H^*(\theta) + \overline{H^*(\theta)}], \quad (6.22)$$

すると全く同様にして (6.13) の替りに

$$\delta H^* = GK^2 \int_c (\bar{U} p' + \bar{V} q') ds, \quad (6.23)$$

となる事がわかる。

但し、今は

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \int_c (p_0 \delta u + \bar{q}_0 \delta v) ds \right] &= \int_c (p \delta u + \bar{q} \delta v) ds \\ &= - \int_c (\bar{U} \delta p + \bar{V} \delta \bar{q}) ds, \end{aligned}$$

である。(無限円周上の積分に注意)

は純虚数である事

これを「ラグランジアン」として、(普通の場合には符号が反っている)

$$L = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}) - k^2 u_i \bar{u}_i \right], \quad (6.24)$$

を代入すれば

$$\Re \left\{ \delta H^* \right\} = 2Gk^2 \int_c L \, \delta n \, ds, \quad (6.25)$$

$$\text{で} \quad GL|_c = \frac{|\sigma_s|^2}{2E} - \frac{\rho \omega^2}{2} (|U|^2 + |V|^2), \quad (6.26)$$

となり

$$\delta W = \dots \int_c L|_c \, \delta n \, ds, \quad (6.27)$$

とよつて  $\omega \rightarrow 0$  の場合、静的な場合 (4.14) に一致する。

## 附錄 A 漸近展開等

$$S = \frac{E}{8\pi} r^2 \log r,$$

$$S_{xx} = \frac{E}{4\pi} \left[ \log r + \frac{\cos 2\theta}{2} + 1 \right]$$

$$S_{xy} = \frac{E xy}{4\pi r^2}, \quad S_{yy} = \frac{E}{4\pi} \left[ \log r - \frac{\cos 2\theta}{2} + 1 \right],$$

(A.1)

$$f = \frac{-E}{4\pi} \left[ A \log r + \frac{B}{2} \cos 2\theta + \frac{C}{2} \sin 2\theta \right], \quad (A.2)$$

$$\frac{\Delta f}{E} = \xi_x = \frac{1}{2\pi r^2} [B \cos 2\theta + C \sin 2\theta],$$

$$\eta_x = \frac{1}{2\pi r^2} [-B \sin 2\theta + C \cos 2\theta],$$

$$\xi = \frac{1}{2\pi r} [B \cos \theta + C \sin \theta],$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi r} [B \sin \theta - C \cos \theta].$$

(A.3)

(A.4)

$$f_r = -\frac{E}{4\pi r} A, \quad f_\theta = \frac{E}{4\pi} (B \sin 2\theta - C \cos 2\theta), \quad (A.5)$$

$$f_{rr} = \frac{E A}{4\pi r^2}, \quad f_{r\theta} = 0, \quad f_{\theta\theta} = \frac{E}{2\pi} (B \cos 2\theta + C \sin 2\theta),$$

$$\frac{4\pi}{E} f_x = -\frac{A}{r} \cos \theta + \frac{B}{2r} (\cos 3\theta - \cos \theta) + \frac{C}{2r} (\sin 3\theta - \sin \theta), \quad (A.6)$$

$$\frac{4\pi}{E} f_y = -\frac{A}{r} \sin \theta + \frac{B}{2r} (\sin 3\theta + \sin \theta) - \frac{C}{2r} (\cos 3\theta + \cos \theta),$$

$$\frac{4\pi}{E} f_{xx} = \frac{A}{r^2} \cos 2\theta + \frac{B}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + \frac{C}{r^2} (\sin 2\theta - \sin 4\theta),$$

$$\frac{4\pi}{E} f_{xy} = \frac{A}{r^2} \sin 2\theta - \frac{B}{r^2} \sin 4\theta + \frac{C}{r^2} \cos 4\theta,$$

$$\frac{4\pi}{E} f_{yy} = -\frac{A}{r^2} \cos 2\theta + \frac{B}{r^2} (\cos 2\theta + \cos 4\theta) + \frac{C}{r^2} (\sin 2\theta + \sin 4\theta),$$

$$\frac{4\pi}{E} \Delta f = \frac{2}{r^2} (B \cos 2\theta + C \sin 2\theta),$$

(A.7)

# 付録 B × 射流

θ方向から入射する縦波を

$$\phi_0 = A e^{ik\tilde{\omega}(r)}, \quad \tilde{\omega}(r) = x \cos\theta + y \sin\theta, \quad (B.1)$$

と表わす

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{k_2} \phi_x + \frac{1}{k_2} \omega_y = -\frac{i}{k} A e^{ik\tilde{\omega}} \cos\theta \\ v &= -\frac{1}{k_2} \phi_y - \frac{1}{k_2} \omega_x = -\frac{i}{k} A \sin\theta e^{ik\tilde{\omega}} \end{aligned} \right\} \quad (B.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2GA e^{ik\tilde{\omega}} \left[ \cos^2\theta + \frac{\nu}{1-\nu} \right] \\ \sigma_y &= 2GA e^{ik\tilde{\omega}} \left[ \sin^2\theta + \frac{\nu}{1-\nu} \right] \\ \tau_{xy} &= GA \sin 2\theta e^{ik\tilde{\omega}} \end{aligned} \right\} \quad (B.3)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \sigma_x y_s - \tau_{xy} x_s = GA e^{ik\tilde{\omega}} \left[ 2 \left( \cos^2\theta + \frac{\nu}{1-\nu} \right) y_s - x_s \sin 2\theta \right] \\ q &= \tau_{xy} y_s - \sigma_y x_s = GA e^{ik\tilde{\omega}} \left[ y_s \sin 2\theta - 2 \left( \sin^2\theta + \frac{\nu}{1-\nu} \right) x_s \right] \end{aligned} \right\} \quad (B.4)$$

特に  $\theta = \frac{\pi}{2}$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2GA \frac{\nu}{1-\nu} e^{iky} \\ \sigma_y &= 2GA \frac{1}{1-\nu} e^{iky} \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (B.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{したがって} \quad A &= \frac{1-\nu}{2G} \\ \text{よって} \quad \sigma_y &= e^{iky}, \quad \sigma_x = \nu e^{iky}, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (B.6)$$

極限  $\theta \rightarrow \pi/2$

$$w_0 = B e^{i k_0 \vec{r}} \quad (B.7)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{iB}{k} \sin \theta e^{i k \vec{r}} \\ v &= -\frac{i}{k} B \cos \theta e^{i k \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (B.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2GB \sin^2 \theta e^{i k \vec{r}} \\ \sigma_y &= 2GB \sin^2 \theta e^{i k \vec{r}} \\ \tau_{xy} &= GB \cos 2\theta e^{i k \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (B.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -GB (+y_s \sin 2\theta + x_s \cos 2\theta) e^{i k \vec{r}} \\ q &= GB (y_s \cos 2\theta - x_s \sin 2\theta) e^{i k \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (B.10)$$

$\theta = 0$  の時

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} &= GB e^{i k \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (B.11)$$

したがって  $B = \frac{1}{G}$  とすれば、 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = e^{i k \vec{r}}$ , (B.12)

付録 C (2-142) 関数

経路のものを考える。

2-142関数は 2-142の (B.11) に合せて定義すると、

$$H(\theta) = GK^2 \int_C [U(\theta)p + V(\theta)q - Up - Vq] ds, \quad (C.1)$$

suffix 0 の置は (B.1) ~ (B.4) の関数とする。

つまり <sup>θ方向からの</sup> 入射経路の変位が境界力にて

特に  $\theta = \frac{\pi}{2}$  で  $K \rightarrow 0$  の時  $\sigma_y = 1$ ,  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$

となるように (B.1) の定数  $A$  は (B.6) のようにとてある。

(C.1)  $U, V$  は 2-142 関数の散乱分での境界条件は

$$\left. \begin{aligned} p &= -p_0 \\ q &= -q_0 \end{aligned} \right\} \text{ on } C, \quad (C.2)$$

これは 空孔の場合 (C.1) に

$$H(\theta) = GK^2 \int_C [U(\theta)p + V(\theta)q] ds, \quad (C.3)$$

$$\left. \begin{aligned} U(\theta) &= u_0(\theta) + u \\ V(\theta) &= v_0(\theta) + v \end{aligned} \right\} \quad (C.4)$$

のようにも書ける。

そこで (B.1) ~ (B.4) から

$$\begin{aligned} \overline{u_0(\theta)} &= u_0(\theta \pm \pi), \quad \overline{v_0(\theta)} = v_0(\theta \pm \pi) \\ \overline{p_0(\theta)} &= p_0(\theta \pm \pi), \quad \overline{q_0(\theta)} = q_0(\theta \pm \pi) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \overline{u_0(\theta)} &= u_0(\theta \pm \pi), \quad \overline{v_0(\theta)} = v_0(\theta \pm \pi) \\ \overline{p_0(\theta)} &= p_0(\theta \pm \pi), \quad \overline{q_0(\theta)} = q_0(\theta \pm \pi) \end{aligned}} \right\} \dots (C.5)$$

であるから

$$H(\theta \pm \pi) = \frac{1}{4} K^2 \int_C \left[ p \overline{u_0(\theta)} + q \overline{v_0(\theta)} - u \overline{p_0(\theta)} - v \overline{q_0(\theta)} \right] ds, \quad (C.6)$$

である。