

E

0.20

No.

Date 58.2.27

構造物の最小重量設計への試論

別所

概要

頁
(表)

1. 吸収系エネルギー

1

2. 静定構造の例

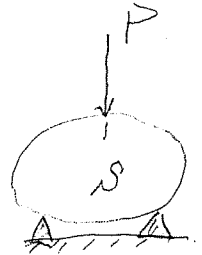
5

2. 不静定 " "

17~9

1. 吸収系エネルギー

構造物 S が荷重 P を受けている時
その点の変位を δ とすると荷重のなす
仕事 E_w は



$$E_w = \frac{1}{2} P \delta, \quad \dots \quad (1.1)$$

この仕事は構造物内に蓄エネルギーとして吸収
されているわけだ S の各部分材の体積要素を $d\tau$
とて

$$E_{ab} = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \sum \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right], \quad \dots \quad (1.2)$$

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ は応力と歪のテンソルとする。

今この蓄エネルギーの体積平均値を $\frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m$
とかければ

$$E_{ab} = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m V, \quad \dots \quad (1.3)$$

2.12 V は S の全体積とする。

したがって重量は比重率を γ とすると

$$W = \gamma V, \quad \dots \quad (1.4)$$

(1.1) と (1.3) を等置すると

$$\frac{1}{2} P \delta = \frac{1}{2} \sigma_m \varepsilon_m V = \frac{1}{2} \frac{\sigma_m \varepsilon_m}{\gamma} W, \quad (1.5)$$

さて構造物が弾性変形をしているものとする

変形は P に比例し

$$\frac{\delta}{L} = \frac{P}{C} \quad , \quad \dots \quad (1.6)$$

ここに L は P 全体の代表寸法, C は剛性率 (バネ定数) である。

一方 平均歪 ε_m は

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E^*} \quad , \quad \dots \quad (1.7)$$

と与えられるものとしておこう。(剪断歪も含むと E^* はヤング率 E とは異なる)

これを (1.5) に代入すると

$$\frac{P^2 L}{C} = \frac{\sigma_m^2}{E^*} W \quad , \quad \dots \quad (1.8)$$

よって 重量 W は 荷重 P の自乗に比例し,

剛性率 C と 平均応力 σ_m の自乗に逆比例する。

また一方 δ は 平均歪 ε_m に比例すると考えられる

$$\frac{\delta}{L} = K \varepsilon_m \quad , \quad \dots \quad (1.9)$$

とすると, (1.6) から K と C の間に

$$P = CK \varepsilon_m = \frac{CK}{E^*} \sigma_m \quad , \quad \dots \quad (1.10)$$

の關係があり, (1.10) を (1.5) に代入すると

$$PLK = \frac{\sigma_m}{\gamma} W, \quad (1.10)$$

となる。

さて、^{2.24}各部材は単純な引張、圧縮応力を受け
 ^{σ_p を許容応力とすると}
 ているものとし、^{2.24}吸収エネルギーの最大値は

$$\text{Max}[E_{ab}] = \frac{1}{2E} \sigma_p^2 V = \frac{\sigma_p^2}{2E\gamma} W; \quad (1.11)$$

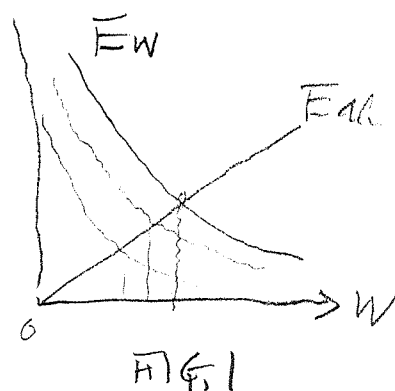
これから外力 P のなす仕事に等しいのであるから、
 与えられた荷重 P に対して重量の最も小さい
 構造は剛性率 C の最大なものである。

このような最小重量の構造が出来たとすると、
 (1.9)によつて (1.10)がなり立ち、この式の中には
 無次元値であるから P は無関係（関係が
 あるとすると P/W の関数）であるからこの式によつて
 W は P に比例する。

いづれにしても (1.6) による C の大きいものあるいは
 (1.9)による K の小さいもの即ち各部材の長さに比し
 荷重による変位の小さいものが構造物の重量を
 小さくする。

もう一度これらの関係を図示すると

E_{ab} は W に比例し E_w は
剛性率 C に逆比例するが
 C の次元は W に等しいから図の
ようになつてその交点が重量を
与える。



次に最小重量設計が出来るようにと

P と W は右図のように比例している。
少くとも
(部分的に直線で近似出来る)

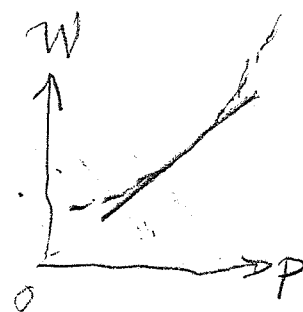
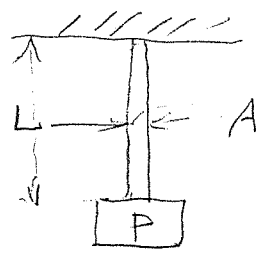


FIG. 2

2. 静定構造の例

i) 引張りのみを受ける一本の部材

右図のような場合で部材重量は無視出来るとする。各断面で応力が σ_P になるには



断面積 $A = \frac{P}{\sigma_P}$, (2.1)

変位 $\frac{\delta}{L} = \epsilon_P = \frac{\sigma_P}{E} = \frac{P}{EA}$, (2.2)

[(1.9)の $K=1$ の場合]

よって (1.5) より

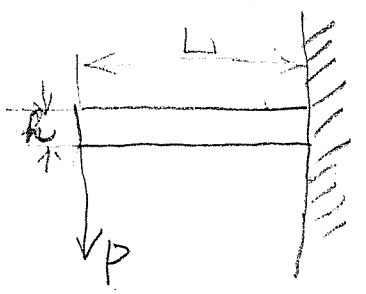
$P \epsilon_P L = \frac{\sigma_P \epsilon_P}{\gamma} W$ 故に $W = \frac{\gamma}{\sigma_P} PL$, (2.3)

よってこれは自明である。

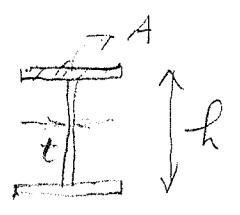
ii) 片持梁 (一様断面)

$I = A \frac{h^2}{4} + \frac{th^3}{12} = \frac{Ah^2}{4} \left(1 + \frac{th}{3A} \right)$, (2.4)

$\frac{\delta}{L} = \frac{PL^2}{3EI}$, (2.5)



$\sigma_P = \max \sigma_f \Big|_{\text{自由端}} = \frac{PL}{4I} = \frac{PL}{Ah \left(1 + \frac{th}{3A} \right)}$, (2.6)



よって $W = \gamma [2A + th] L$, (2.7)

よって $\frac{\delta}{L} = \frac{PL^2}{3EI} = \epsilon_P \left(\frac{4L}{3h} \right)$

この場合は各断面で応力に^{許容?}なるためには変断面と
なければならぬ。

今は未知数は A, h, t の3ヶで条件式は
(2.6)と(2.7)が最小の条件の2ヶとすると条件が
一ヶ足りない。

それ故 もう一ヶ条件式を与えなければならぬ。

今の場合明らかに h が大きい方がよい。

つまり 上式で $t=0$ とすると、

$$\sigma_p = \frac{PL}{Ah} \quad , \quad W = 2\delta AL = \frac{PL^2}{\sigma_p h} \quad (2.8)$$

となつて $h \rightarrow \infty$ で $W \rightarrow 0$ である。

それ故 もう一ヶの条件式としては ウェブの剪断力
の上限が適しているだろう。

3. 不静不定構造の例

2部の2例を図のように結合

したものを考えよう。

各部分の受ける荷重を P_1, P_2 とすると

(2.2) と (2.5) から変位は等しいとすると

$$\delta_1 = \frac{P_1 L_1}{EA_1} = \frac{P_2 L_2^3}{3EI} \quad (3.1)$$

$$P_1 + P_2 = P \quad (3.2)$$

$$\text{今 } P_1/A_1 = \sigma_P \quad (3.3)$$

$$\text{とすると } \frac{\delta}{L_1} = \frac{\sigma_P}{E} \quad (3.4)$$

$$P_2 = \frac{\sigma_P L_1}{E} \frac{3EI}{L_2^3} = \frac{3\sigma_P I L_1}{L_2^3}$$

$$\text{これを (3.2) に代入すると } \sigma_P = \frac{h P_2 L_2}{4I} = \frac{3\sigma_P L_1 L_2 h}{4 L_2^3}$$

$$\frac{L_1 h}{L_2^2} = \frac{4}{3} \quad (3.5)$$

荷重 P は (3.2) から

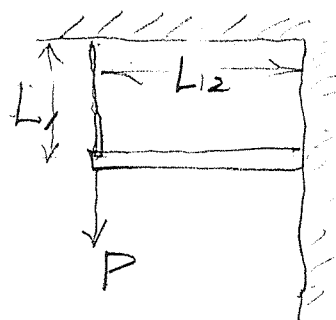
$$P = \sigma_P \left[A_1 + \frac{3IL_1}{L_2^3} \right] \quad (3.6)$$

重量は

$$W = \gamma [A_1 L_1 + (2A_2 + th)L_2] \quad (3.7)$$

未知数は A_1, A_2, t, h で条件式は (3.5), (3.6), (3.7)

の最小値を求めよう。やはり一つ不足であるが今は t が定まっているので $t \rightarrow 0$ としよう。



そうすると 今(3.5)を (3.6) に代入して

$$P = \sigma_p \left[A_1 + 3 A_2 \frac{h^2 L_1}{4 L_2^3} \right] = 1$$

$$= \sigma_p \left[A_1 + \frac{4 L_2}{3 L_1} A_2 \right], \quad \dots (3.8)$$

$$W = \gamma [A_1 L_1 + 2 A_2 L_2], \quad \dots (3.9)$$

(3.8)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{W}{\gamma} &= L_1 \left(\frac{P}{\sigma_p} - \frac{4 L_2}{3 L_1} A_2 \right) + 2 A_2 L_2 \\ &= \frac{P}{\sigma_p} L_1 + \frac{2}{3} A_2 L_2, \quad \dots (3.10) \end{aligned}$$

つまり $A_2 = 0$ が最小重量を与える。

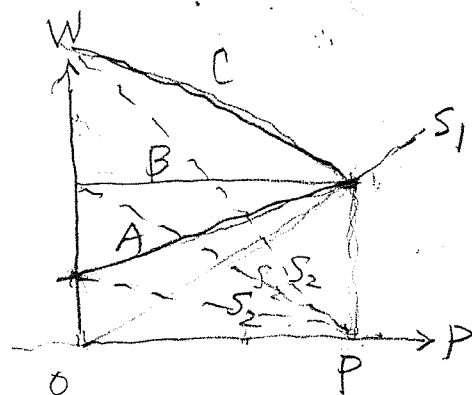
これは片持梁が荷重を支えるのに必要な重量が大きいからである。

一般に (2.3) または (2.8) に見るように荷重を支えるに必要な構造重量は

荷重に比例する。 したがってそれを2組の構造物で

分担する場合を考えると 図のように 2 組 S_1 のみでは S_1

の直線が得られ、 $S_1 + S_2$ では 図の A, B, C の 3 つの場合しかない。



つまり同じ荷重を支えるに必要な重量を $W(s_i)$ とすると

$$W(s_1) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} W(s_2)$$

の 3通りで不等号の場合は どちらか $W(s)$ の小さい
方のみがよく、等号の場合は どの割合でも
重量は 同じである。