

G

No.

Date 19.1.22

面積, 容積等の変分問題

内容

概要

1. 2次元

2. 3次元回転体

3. 附録

概要

粘性抵抗の最小値問題を考えゆく時に大変気になる事がある。

一つはレイノルズ数を合わせる事に長さ一定の条件を課する訳であるが、その為、に任意定数が一つ減り不安感がある。長さ一定の条件の変分を導入すれば救われるけれど、これは意味があるのだろうか。

もう一つは粘性抵抗は殆ど表面積に比例する故、それを小さくする事が実用上、抵抗を減らす良策である。与えられた容積に対し表面積または浸水面積（ガス長さの方向積分）の最も小さい形状は何か。

これは大変初歩的な設問であるが、著者の今知る範囲の成書等にこれについて觸れたものは見えない。

そこで、^{以下} 例2の問題を解いて見て例1の長さの変分条件がどうなっているかを考えて見る。

結果はまず面積が与えられた時周長の最
小のものは円であり、長さが制限されれば円弧
型である。

2.2 容積が与えられた時表面積の最も小さい

形状は^{断面が}円弧の紡錘体である。
_{回転体の}

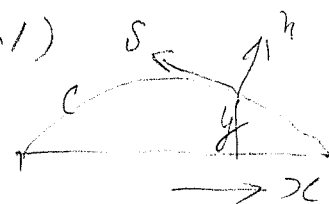
この結論は著者に少し々以外であつたので
附録で数値的に確認して見た。

これらの問題について長さの微分を考えて見た
所、問題の中で自然に満足されているようであり
それを初めから条件として与えると変分結論が
出るのであるので考えない方がよいだろう。

なお浸水表面積が最少の形状は円筒で
ある事も考えて見れば当然至極である。

1. 2次元問題

面積 $A = 2 \int_{-1}^1 y dx = 2 \int_c y \frac{\partial y}{\partial n} ds, (1.1)$



周長 $S = 2 \int_c ds, (1.2)$

[cは上半分だけとる]

長さ $L = \int_c dx = \int_c \frac{\partial x}{\partial s} ds, (1.3)$

δn だけ変形すると.

$$\delta A = 2 \int_c \delta n ds, \dots (1.4)$$

$$\delta S = 2 \int_c \delta n \frac{\partial \theta}{\partial s} ds, (1.5)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{\rho}, \quad \rho: \text{曲率半径}, (1.6)$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \theta, (1.7)$$

$$\delta L = \int_c \delta n \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} ds, (1.8)$$

変分問題 (1) 周長が与えられた時面積最大の
図形を求めよ。(所謂典型的等周問題)

解) $\delta s = 0$ の下に $\delta A = 0$ にすればよいから (1.4) (1.5)
から

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{\rho} = \text{const.} \quad \dots \quad (1.9)$$

が解である。

これは明らかに円であるから微分方程式として書くと、

$$y = y(x), \quad \frac{dy}{dx} = y' \quad \text{と書くと}$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{\rho} = \frac{-y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad \text{であるから (1.9) は}$$

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \lambda \quad \text{const.}, \quad \dots \quad (1.9')$$

両辺に y' を掛けると積分出来る。

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \lambda (y-a), \quad a \text{ const.}, \quad \dots \quad (1.10)$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda^2(y-a)^2} - 1}, \quad \frac{\lambda(y-a) dy}{\sqrt{1-\lambda^2(y-a)^2}} = dx,$$

$$\sqrt{1-\lambda^2(y-a)^2} = \lambda(x-b), \quad b \text{ const.}$$

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \dots \quad (1.11)$$

2.9 円周積分 (1.10) は

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \lambda(y-a), \quad (1.10')$$

と書く事も出来る。

さて長さが制限された時も解は (1.11) でないと思えるので、円弧型は ^{全弧長を一定にして} 面積の多い ^{面積の多い} 円弧型は円長が最少となる。

附録 12 円弧型と楕円の円長を比較している。

で、この時 (1.8) から $\delta L = 0$ の条件は (1.10'), (1.46),

$$\delta L = \int_c \frac{\partial x}{\partial s} \delta n ds = \lambda \int_c y \delta n ds \quad (1.12)$$

となり、(2.1), (2.5) からこれは 3-次元回転体で容積一定の条件となる。

次節で見るようにその解も円であるから $\delta L = 0$ は満たされていることになる。

2. 3次元 (の正易台)
(四角体)

容積 $V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_C y^2 \frac{\partial X}{\partial s} ds. \quad (2.1)$

表面積 $S = 2\pi \int y ds \quad (2.2)$

浸水表面積 $S_w = 2\pi \int y dx = 2\pi \int y \frac{\partial X}{\partial s} ds. \quad (2.3)$

長さ $L = \int dx = \int_C \frac{\partial X}{\partial s} ds, \quad (2.4)$

変分

$\delta V = 2\pi \int y \delta n ds, \quad (2.5)$

$\delta S = 2\pi \int \left(\frac{\partial y}{\partial n} + y \frac{\partial \theta}{\partial s} \right) \delta n ds, \quad (2.6)$

$\delta S_w = 2\pi \int \delta n ds, \quad (2.7)$

$\delta L = \int_C \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial V}{\partial s} \delta n ds. \quad (2.8)$

$$F = \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s}$$

$$F_s = \frac{y^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s}$$

$$\frac{dS}{ds} = \frac{y^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s}$$

$$\left(\frac{y^2}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial s} \right)$$

変分問題I) 与えられた長周の積を持つ容積最大の形状を求める。

解) (2.5), (2.6) から

$$\left. \begin{aligned} \lambda y &= \frac{2x}{25} + \frac{y}{\rho} \\ \lambda y &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

両辺に y' を乗けると

$$\lambda yy' = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \right)$$

$$\therefore \frac{\lambda}{2} y^2 = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} + \text{const} \rightarrow = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} \quad (2.10)$$

となるが、 $y=0$ の時これが成立つためには一定値は0でなければならぬ。

$$\therefore \frac{\lambda}{2} y = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad (2.10')$$

これは (2.10) と実質的に等しい故 解は円である。
よって長さが制限された時は円弧断面を持つ紡錘体である。^{*}

またこの時曲率は一定故 (2.5), (2.6) が0となる条件

* この時さらに $\int \delta u \, ds = 0$ の条件が必要のように見えるが、

から (2.8) の $\delta L = 0$ は成立っている。

附録に容積の等しい 楕円体の一例を計算してある。

問題 II) 与えられた容積を持ち、最小の浮水面積 S_w を持つ形状を求め。

解) (2.5) と (2.7) より

$$y = \lambda \quad , \quad \dots \quad (2.11)$$

つまり円筒である。

これは当然であろう。

この場合 $\delta L = 0$ は満たされている。

附録

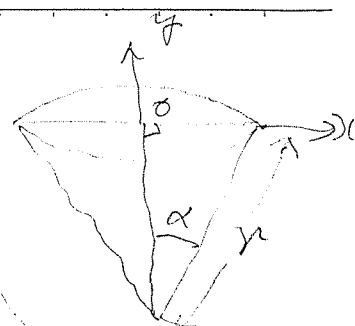
円弧正二型

方程式 $y = \sqrt{r^2 - x^2} - r \cos \alpha, (A.1)$

面積 $A = 2r^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)$

長さ $L = 2r \sin \alpha$

周長 $S = 4\alpha r$



$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{L^2} &= \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ \frac{S}{L} &= \frac{2\alpha}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} (A.2)$$

円弧正の時

容積 $\frac{V}{L^3} = \frac{\pi}{8r^2 \sin^3 \alpha} \int [\sqrt{r^2 - x^2} - r \cos \alpha]^2 dx$ $\lambda = r \sin \alpha$

$$= \frac{\pi}{8 \sin^3 \alpha} \int_0^\alpha (\cos \theta - \cos \alpha)^2 \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4 \sin^3 \alpha} \left[1 - \frac{\sin^2 \alpha}{3} - \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right],$$

浸水表面積

$$\frac{S_w}{L^2} = \frac{4\pi}{4r^2 \sin^2 \alpha} \int_0^{\sin \alpha} (\sqrt{r^2 - x^2} - r \cos \alpha) dx$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin^2 \alpha} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha),$$

乾表面積

$$\frac{S_d}{L^2} = \frac{\pi}{r^2 \sin^2 \alpha} \int_0^{\sin \alpha} \left(1 - \frac{r^2 \cos \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

(A.3)

橢圓

面積

$$A = \pi ab$$

$$\frac{A}{L^2} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{\pi}{4} \beta$$



長

$$L = 2a$$

周長

$$\frac{S}{L^2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$$

四葉體

$$\frac{V}{L^3} = \frac{\frac{4}{3} \pi a b^2}{8 a^3} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

浸水表面積

$$\frac{S_w}{L^2} = \frac{2\pi}{4a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dx = \frac{\pi b}{2a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi^2}{4} \frac{b}{a}$$

表面積

$$\begin{aligned} \frac{S}{L^2} &= \frac{\pi}{2a^2} \int_C y ds = \pi \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \pi \beta \int_0^1 \sqrt{1 - k^2 x^2} dx \quad \sqrt{1 - k^2 x^2} = \sqrt{1 - (1 - \beta^2) \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\pi \beta}{2\sqrt{1 - \beta^2}} \left(\sin^{-1} \sqrt{1 - \beta^2} + \sqrt{1 - \beta^2} \right) \end{aligned}$$

以下 具体的 数値例 をあげ る 為 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ と する。

1) 面積 が 等しい と する 時 は どう なる か。

$$\frac{A}{L^2} \Big|_{\text{circle}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = .2854, \quad \left(\frac{B}{L} = \frac{\int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta}{\# \Delta \alpha} = \sqrt{2} - 1 = .4142 \right)$$

$$\frac{A}{L^2} \Big|_{\text{ellipse}} = \frac{\pi}{4} \beta = .2854 \quad \text{故に} \quad \underline{\beta = .3634}$$

$$\frac{S}{2L} \Big|_C = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.1107$$

$$\frac{S}{2L} \Big|_E = 1.1367$$

($\approx 47^\circ$ の $\sin$ は $12/13$ 程度)

$$\underline{\underline{S|_C < S|_E}}$$

2) 浸水 表面積 が 等しい ($\therefore$ 面積 が 等しい 事 と 同じ) と 容積 は どう なる か

$$\frac{V}{L^3} \Big|_C = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{6} - \frac{\pi}{4} \right] = .07529$$

上記 の 条件 から 楕円の $\beta = .3634$ 故に

$$\frac{V}{L^3} \Big|_E = \frac{\pi}{6} \beta^2 = .06915$$

よって $V|_C > V|_E$

3) 容積 の 等しい 時 表面積 は どう なる か

$$\frac{V}{L^3} \Big|_C = .07529 \quad (\text{for } \alpha = \frac{\pi}{4})$$

$$\therefore \frac{V}{L^3} \Big|_E = .07529 = \frac{\pi}{6} \beta^2, \quad \beta = .3792$$

$$(\beta^2 = .1438)$$

$$1 - \beta^2 = .8562$$

$$\frac{S}{L^2} \Big|_c = \sqrt{2\pi} \left(1 \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \right) = .9534 \quad \therefore \pm 1.194$$

$$\frac{S}{L^2} \Big|_E = \frac{\pi \times .3792}{2 \times .9253} \left[.9253 - .3792 \times .9253 \right]$$

$$= .6437 \left[.769 - .3509 \right] \pm .5429$$

$$\therefore S_E > S_c \quad \text{///}$$