

翼理論における非線形可逆定理

運性書

別所正利

概要

翼理論における H_{max} の変分原理は線形理論に立脚しているので所謂非線形問題には対応しない。本報はその非線形への拡張定理について述べその応用例を示す。

なお粘性を含む一般的な誘導法は今年度の造船学会にて講演予定であるので、ここでは粘性はないが渦のある流れについての別記を記す。

1. 定理の誘導

攪乱速度を $W = (1+u, v, w)$ 、渦度を $\omega = (\xi, \eta, \zeta)$ 、全圧を p とすると運動方程式は

$$\nabla p = (1+W) \times \omega = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1+u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$p = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} [(1+u)^2 + v^2 + w^2] \quad (2)$$

$$\xi = w_y - u_z, \quad \eta = u_z - w_x, \quad \zeta = v_x - u_y, \quad (3)$$

後流渦面を除けば"速度ポテンシャルは存在する"

今逆流渦のポテンシャルを ϕ としよう。

$$\nabla \phi = \vec{u}, \quad \nabla \phi = \vec{u}, \quad (4)$$

以下 (4) 式を 逆流渦量を示すものとする。

これを (1) 式にかけて 異なる後流渦面の外側の領域 D で積分すると。

$$\int_D \nabla \phi \cdot \nabla G \, d\tau = J - I, \quad d\tau = dx \, dy \, dz, \quad (5)$$

$$I = \int_D (\xi \vec{v} - \eta \vec{w}) \, d\tau, \quad (6)$$

$$J = \int_D (\vec{u} \times \vec{\omega}) \, d\tau, \quad (7)$$

となるが (5) 式左辺の積分において 速度ポテンシャルは粘性による散逸はないとしているので一定であるからこれはゼロである。

したがって

$$I = J, \quad (8)$$

同様に

$$\tilde{I} = \int_D (\tilde{\xi} \vec{v} - \tilde{\eta} \vec{w}) \, d\tau, \quad (9)$$

$$\tilde{J} = \int_D (\tilde{\vec{u}} \times \tilde{\vec{\omega}}) \, d\tau, \quad (10)$$

とすると

$$\tilde{I} = \tilde{J} \quad (11)$$

が成りつかず、 $-\bar{\sigma}$

$$\begin{aligned} I + \bar{I} &= \int_D (\bar{\sigma} v^2 - \eta \bar{\sigma} + \bar{\sigma} v - \bar{\sigma} w) d\tau \\ &= \int_D [(-u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w})_x - (u\bar{v} + \bar{u}v)_y - (u\bar{w} + \bar{u}w)_z] d\tau \\ &= \int_{S+W} \left(u \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} + \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \nabla \bar{\phi} \cdot x_n \right) dS, \quad (12) \end{aligned}$$

よって (8) と (11) を辺々加えると次の定理を得る。

$$\int_{S+W} \left(u \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} + \bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \nabla \bar{\phi} \cdot x_n \right) dS = J + \bar{J}, \quad (13)$$

薄翼では左辺の第3項は右辺と同じく高次の量であるから無視すると

$$\int_{S+W} (u \bar{\phi}_n + \bar{u} \phi_n) dS = 0, \quad (14)$$

となり、Max の定理となる。

よって (13) はその拡張となり種形方程式は入っているのび非線形性の見極めが出来る事になる。

2. 薄翼の揚力

図・6-23に後縁力面をとり、後縁渦面では

$$\Gamma = \oint \vec{\zeta} \cdot d\vec{r} = d\Gamma(y, z), \quad (15)$$

となるから、対称性を考慮に入れると、(15)は近似的に

$$2 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} (\rho w + \bar{\rho} \bar{w}) dx dy = - \rho \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \gamma(y, z) [\rho w + \bar{\rho} \bar{w}] dx dy, \quad (16)$$

$$\text{但し } \rho = -\rho u, \quad \bar{\rho} = -\rho \bar{u}$$

仰角を α とし、後縁翼を考えると

$$\gamma(y) = \alpha \sqrt{\frac{4}{\lambda} - y^2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (17)$$

$$C_{L0} = \frac{\pi}{2} \alpha \lambda, \quad \lambda = b/L$$

より

$$v - i w = i \alpha \left[1 - \frac{y + i z}{\sqrt{(y + i z)^2 - \frac{4}{\lambda}}} \right],$$

であるから、(13)に代入すると

$$v = -\frac{\alpha y}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4}{\lambda} - y^2}}, \quad w = \frac{\alpha z}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4}{\lambda} - y^2}} \quad (18)$$

となるので、これを (13) に代入すると

$$C_L = \frac{\pi \lambda \alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4}{\lambda} - y^2}} \right), \quad (19)$$

15) に準じて、図(16)の揚力係数模型で計算すれば、

$$C_L = \frac{\pi \lambda \alpha'}{1 + \lambda} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\frac{4}{\lambda} - y^2}} \right), \quad (20)$$

この式で $\lambda \gg \alpha$ とすると

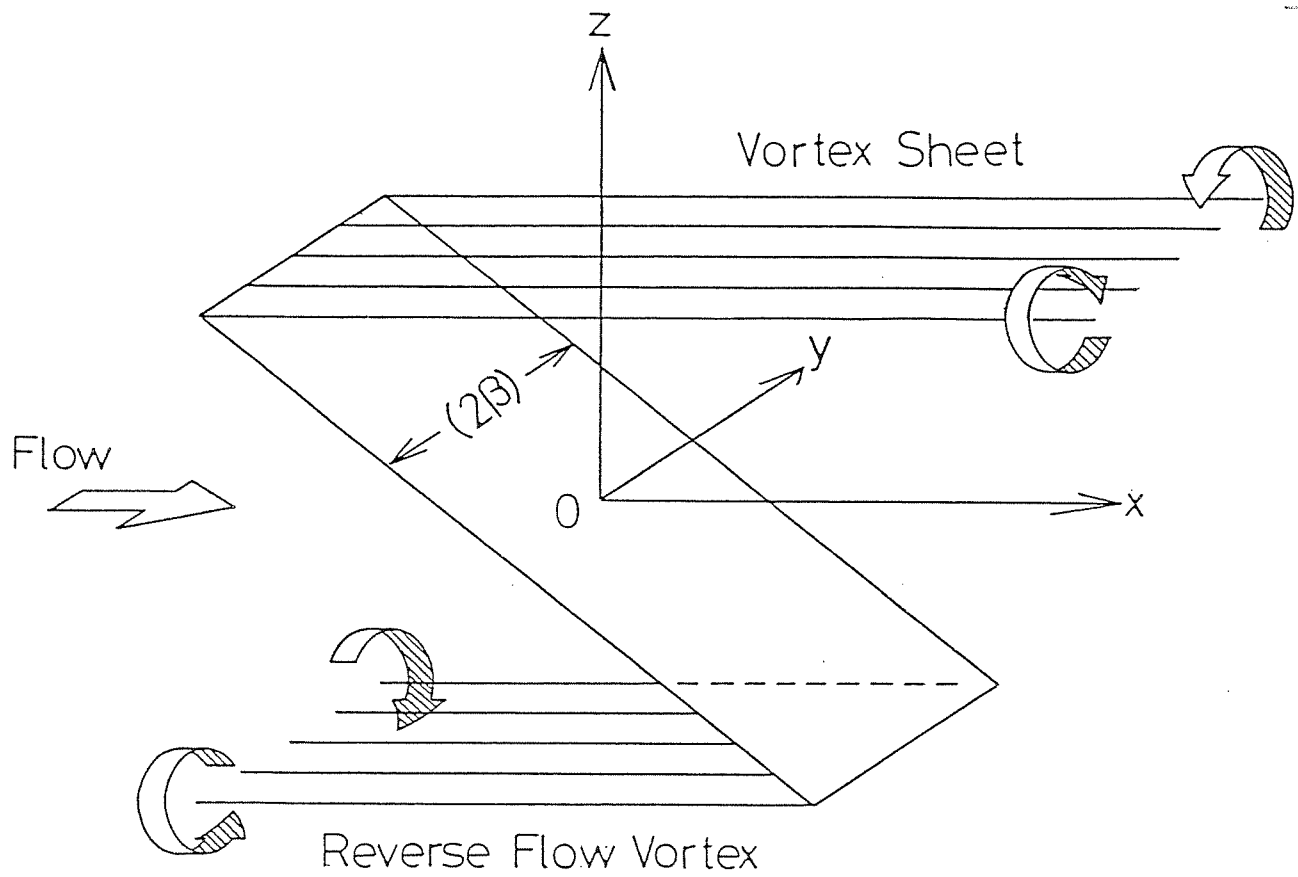
$$C_L = \pi \lambda \alpha, \quad (21)$$

となり、えんううきだて近似式に一致する。

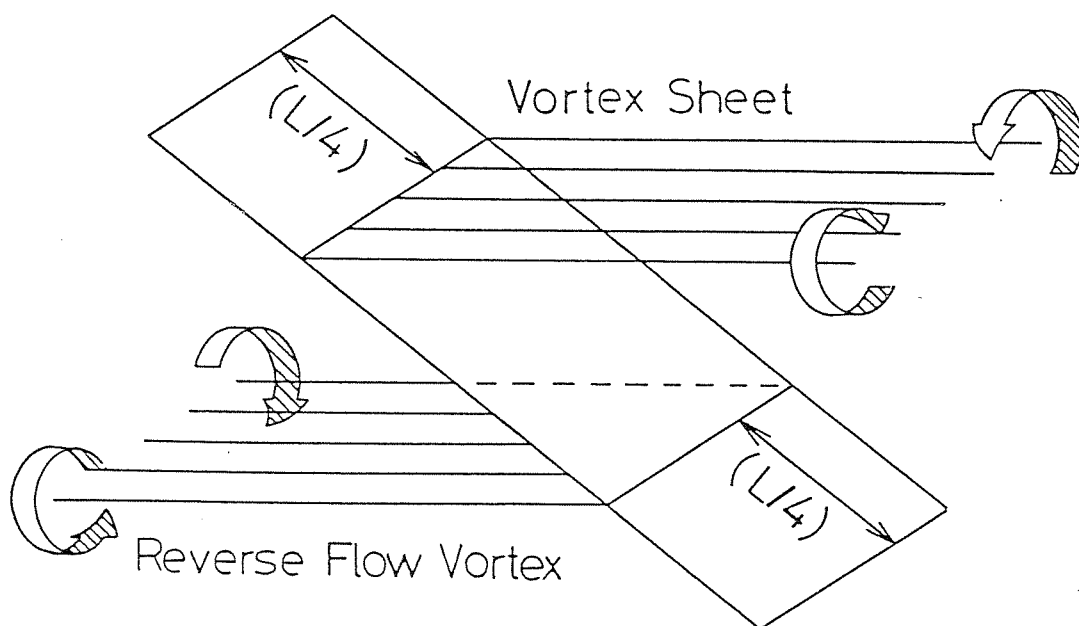
また(19)は井上の式によく似ているをいって、又数値的にも殆ど等しく、菅井氏の新しい式ともよく一致する。

また不破の実験値、洞舞丸の実験値等と比較すると(19)も程々近いものがあり、特に回転楕円体ではその右辺の15項を無視したものの方が良く一致する。

以上、



(a) Slender Wing Theory



(b) Lifting Line Theory

Fig.2 Flat Plate Wing