

昭和49年12月25日

細長翼，細長体理論に関する覚書

別所 弘利

内容

1. 序	(頁) 1
2. アスペクト比大なる場合 (巻)	2
3. 細長翼	5
4. 細長体	8-10.

附録 A	特異積分	A-1-3
" B	回転楕円体	B-1-2
" C	矩形翼	C-1~3

1. 序

所謂 slender wing or body theory を導くには 全く直観的ないわば heuristic な方法と それとは 全く科学的な 所謂 singular perturbation に よる方法 とがある。

前者による時は 極限移行に伴う数学的厳密さの点に不安があり、又 後者による時は 普通微分方程式に一度立ち帰って論ぜられるので 近似した元々の速度ポテンシャルとの関係が直接的でない うちみがある。

つまり逐次近似的に解を求めて行くに当って 前者の方法では 特異点の処理について困難が生じ 後者の方法では 厳密に過ぎるので 式が大変複雑になる。

以下に述べる方法は これらの中程を収らったものであるが 成書には見あたらないので 記す次第である。

もう一つの焦点は 細長翼における 横渦の誘導速度の見積りの問題である。

従来は 揚力面理論による以外 見積る方法がなかった筈であるが 特異積分を近似的に積分する事により 特別な場合以外はよい近似値を得られる事を示す。

なおこのように 揚力線理論と 揚力面理論と並行的に論じて見ると 誘導速度は 片方は $O(\epsilon)$ 他方は $O(\epsilon^{1/2})$ となるので 揚力線理論と同程度の 細長翼理論は やはり 横渦による影響を何らかの形で含めるべきではなからうか。

又これによつて始めて Kutta の条件が満たされる事になる。

昭和 年 月 日

2. アスペクト比 大なる場合

先づ揚力線理論を導出しよう。

速度ポテンシャルは、圧力分布を $P U^2 p(\xi, \eta)$ とし ($U=1$ とす。

$$\phi(x, y, z) = \iint_H p(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) dH, \quad (1)$$

$$w = -\phi_z(x, y, 0) = -\iint_H p(\xi, \eta) S_z(x-\xi, y-\eta, 0) dH, \quad (2)$$

と書こう。

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi p^2} \left(\frac{x}{p} - 1 \right), \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ p = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \quad (3)$$

$$S_z(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

翼半幅を b , 半弦長を $l(\eta)$ とおき。

$$b \gg l(\eta) \quad (5)$$

とする。

ここで今 β と η の量を考え。

$$b \gg \beta, \quad \beta \gg l(\eta)$$

$$\text{or } 1 \gg \frac{\beta}{b}, \quad 1 \gg \frac{l(\eta)}{\beta} \quad (6)$$

となつてゐるとする。

すなわち $p(\xi, \eta)$ が $y+\beta > \eta > y-\beta$ の間で略々一定と仮定しよう。そうすると積分区間を 2β に割りけて。

$$w(x, y) = - \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] d\eta \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} P(\xi, \eta) S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi \\ - \int_{-l(y)}^{l(y)} P(\xi, y) d\xi \int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \quad (7)$$

そこで $1/\pi b$ の積分分では

$$S_2(x-\xi, y-\eta, 0) \xrightarrow[y-\eta \gg (x-\xi)]{} S_2(0, y-\eta, 0) = -\frac{1}{2\pi(y-\eta)^2} \quad (8)$$

となり $b \gg \beta$ であるから

$$= \lim_{b \gg \beta} \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] d\eta \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} P(\xi, \eta) S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] \frac{\pi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2}, \quad (9)$$

$$\pi(\eta) = \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} P(\xi, \eta) d\xi, \quad (10)$$

よって $2/\pi b$ は

$$\int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x, y-\eta, 0) d\eta = \int_{-\beta}^{\beta} S_2(x, u, 0) du \\ = -\frac{2}{2\pi x} \left[\frac{\sqrt{x^2 + \beta^2} - x}{\sqrt{x^2 + \beta^2} + x} \right] \xrightarrow{\beta \gg x} -\frac{1}{\pi x}, \quad (11)$$

よって

$$\lim_{\beta \gg l(z)} \int_{-l(y)}^{l(y)} P(z, y) dz \int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x-z, y-\eta, 0) d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l(y)}^{l(y)} \frac{P(z, y) dz}{x-z}, \quad (12)$$

(9) と (12) を合せて

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-l(y)}^{l(y)} \frac{P(z, y) dz}{x-z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\pi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2}, \quad (13)$$

と成って揚力線理論が得られる。^{*}

このように積分区間を分割する方法は数値計算上も特異点を処理するために必要な手段であつて、又函数解析的に無理の少ないやり方であつた。

* H. Ashley & M. Landahl "Aerodynamics of Wings & Bodies" Addison-Wesley, 1965.

3. 細長翼

前節と同じ方法を適用する為には λ なる長さを考えて.

$$\ell \gg \lambda \gg b(x),$$

$$\text{or } 1 \gg \frac{\lambda}{\ell}, \quad 1 \gg \frac{b(x)}{\lambda}$$

(1).

と (2)(1), (2) の積分を $[-\ell, -\lambda+x], [x+\lambda, \ell]$ の区間と $[x-\lambda, x+\lambda]$ の区間に別けて積分するのであるが, その儘では x をはさむ区間の積分が無限大となるので (1) により 部分積分して

$$\phi(x, y, z) = + \iint_{F'} \mu(\xi, \eta) S_x(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$w = -\phi_z(x, y, 0) = - \iint_{F'} \mu(\xi, \eta) S_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$\mu(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, \eta) d\xi, \quad (4)$$

と置く。

ここに F' は F を含む 1 箇の様に無限遠方まで細く画とする。

前同様 $\mu(\xi)$ は $\lambda+x > \xi > \lambda-x$ の間で一定として

$$w(x, y) = w^{(s)}(x, y) + w^{(h)}(x, y),$$

$$w^{(s)}(x, y) = - \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} d\xi \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \mu(\xi, \eta) S_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \quad (5)$$

$$w^{(h)}(x, y) = \left[\int_{-\infty}^{x-\lambda} + \int_{x+\lambda}^{\ell} \right] d\xi \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \mu(\xi, \eta) S_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta$$

と見做すと

$$\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} S_{zx}(x-z, y, 0) dz = + S_z(x, y, 0) - S_z(-\lambda, y, 0) \\ = \frac{1}{2\pi y^2} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} \right) \xrightarrow{\lambda \gg y} \frac{1}{\pi y^2}, \quad (6)$$

$$S_{zx}(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right] = \frac{1}{2\pi r^3} \\ \xrightarrow{r \gg |x|} \frac{1}{2\pi |x|^3}, \quad (7)$$

と見做す

$$w^{(s)}(x, y) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-b(x)}^{b(x)} \frac{\mu(x, \eta) d\eta}{(y-\eta)^2}, \quad (8)$$

$$w^{(i)}(x, y) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-b(x)}^{b(x)} \frac{M(\xi) d\xi}{|x-\xi|^3}, \quad (9)$$

$$M(\xi) = \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \mu(\xi, \eta) d\eta, \quad (10)$$

所謂相対論理論では $w^{(i)}$ は無視し (8) のみを採用しているが 極広帯の場合と比較すると $w^{(s)}$ を考慮する方がよいと思われる。

この時その積分が存在しないという難点がある、工夫がいる (Laurence 次郎註)。

今の方法では (9) の積分は本来 $\lambda \rightarrow 0$ の極限となっているので $x=\xi$ の所は積分しないでもよい

昭和 年 月 日

から適当な極限值で置換えてよい。

(9) の積分は下限がある (下限 ∞) から部分積分して

$$w^{(1)}(x, y) = \frac{+1}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\pi(\xi) \operatorname{sgn}(x-\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi, \quad (11)$$

$$\pi(\xi) = \int_{-\ell(\xi)}^{\ell(\xi)} p(\xi, \eta) d\eta, \quad (12)$$

とする方がよからう。

(8), (11) による表示は又 前節(2) から、

$$-S_2(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\xrightarrow{|y| \ll |x|} \frac{1}{2\pi y^2} \left\{ 1 - \operatorname{sgn}(x) \right\} + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\pi x^2}, \quad (13)$$

とすれば "全く同じもの" が得られる。

即ち

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_x^{\ell} p(\xi, \eta) d\xi + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{p(\xi, \eta)}{(x-\xi)^2} \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi d\eta \quad (14)$$

つまり (13) の近似をするには Lawrence^{*} の方法を極端に単純化した事になる。

4. 細長体

次の分布で表わされる物体を考えよう。

この場合 長軸方向の流れとそれに直角方向の流れとに分解出来るが 速度ポテンシャルはどちらとも同じで境界条件が変わるだけである。

さて 速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \int_{-l}^l \int_C \frac{\sigma(s, \xi)}{r} ds d\xi, \quad (1)$$

ここに S は 断面に沿う巨体, ξ は 長軸とする。
境界条件は 長軸方向の単位速度流れに対しては

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_S = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_C \doteq \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_C, \quad (2)$$

ここに ν は 物体表面 S に立てた外向法線,
 n は C に立てた ξ に垂直な法線とする。

長軸に垂直な方向からの流れ (今 y 方向とす)
に対しては (単位速度として)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_S \doteq \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_C \doteq -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (3)$$

さて

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \doteq - \int_{-l}^l \int_C \frac{\sigma(s, \xi)}{r^3} ds d\xi \left\{ (x-\xi) \frac{\partial x}{\partial \nu} + (y-1) \frac{\partial y}{\partial n} + (z-5) \frac{\partial z}{\partial n} \right\},$$

とあるが 前節同様 σ が $x+\lambda > \xi > x-\lambda$ の内では一定とし その間の物体も筒状であるとして近似計算をしよう。 (4)

昭和 年 月 日

$$\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{d\tilde{z}}{r^3} = \left[\frac{-1}{\rho \sqrt{r}} \right]_{x-\lambda}^{x+\lambda} = \frac{2}{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}} \xrightarrow{\lambda \gg \rho} \frac{2}{\rho^2}, \quad (5)$$

$$\rho^2 = (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

7" 近似から

$$\phi_L = \phi_L^{(s)} + \phi_L^{(i)}, \quad (6)$$

$$\phi_L^{(s)} \doteq -2 \int_C \frac{\sigma(s, \tilde{z})}{\rho^2} ds \left[(y-\eta) \frac{\partial y}{\partial n} + (z-\zeta) \frac{\partial z}{\partial n} \right], \quad (7)$$

$$\phi_L^{(i)} \doteq - \int_{-l}^l \int_C \frac{\sigma(s, \tilde{z}) ds d\tilde{z}}{|x-\tilde{z}|^3} \left\{ (x-\tilde{z}) \frac{\partial x}{\partial n} + (y-\eta) \frac{\partial y}{\partial n} + (z-\zeta) \frac{\partial z}{\partial n} \right\}, \quad (8)$$

7" 近似の式は

$$\mu_0(\tilde{z}) = \int_C \sigma(s, \tilde{z}) ds,$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(\tilde{z}) &= \int_C \sigma(s, \tilde{z}) y ds \\ \mu_2(\tilde{z}) &= \int_C \sigma(s, \tilde{z}) z ds \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\mu_3(\tilde{z}) = \int_C \sigma(s, \tilde{z}) \frac{\partial x}{\partial n}(\tilde{z}) ds,$$

とおくと

$$\begin{aligned} \phi_L^{(i)} &\doteq - \int_{-l}^l \frac{\mu_0(\tilde{z})}{|x-\tilde{z}|^3} \left\{ y \frac{\partial y}{\partial n} + z \frac{\partial z}{\partial n} \right\} d\tilde{z} \\ &\quad + \int_{-l}^l \frac{1}{|x-\tilde{z}|^3} \left\{ \mu_1(\tilde{z}) \frac{\partial y}{\partial n} + \mu_2(\tilde{z}) \frac{\partial z}{\partial n} \right\} d\tilde{z} \\ &\quad - \int_{-l}^l \frac{\mu_3(\tilde{z}) \operatorname{sgn}(x-\tilde{z})}{|x-\tilde{z}|^2} d\tilde{z}, \quad (10) \end{aligned}$$

y, z 是 (10),

昭和 年 月 日

細長体理論では $\phi^{(1)}$ は高次項として $\phi^{(1)}$ のみを採用して ϕ を定めるのであるが誘導速度を考へる立場をとるとこれは捨て難いものがある。特に (8) 又は (10) の積分は対数項を含んでゐるので一層残念である。

附録 B には回転楕円体の長軸方向の運動について誘導速度の影響を求めて見た。

この場合特異積分の近似的取扱いはは全く難がなく結果も正しい近似値を与える。

横方向運動についても全く同様な方法が適用されてよく所謂三次元影響の見積りが可能になる。

なおここで注意すべき事はこのように特異点分布の近似を求める事は結局誘導速度を見積る事と同等であると言う事である。

従つて肉題によつては特異点分布の積分方程式を解く事なくより近似値をうる事が出来る。(例 Tucke 前出)

昭和 年 月 日

附録 A 特異積分

$$\varphi(x) = \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{|x-\xi|} d\xi, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = - \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2} \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = 2 \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{|x-\xi|^3} d\xi, \quad (3)$$

のように解釈する事にしよう。

$\varphi(x)$ は $(-1, 1)$ の区間に分布する $f(x)$ なる質量分布の Newton potential の軸上における値である。

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-l}^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}, \quad (4)$$

$y \rightarrow 0$ の極限では 対数的に無限大となるので普通の意味では有限確定とならない。

今回我々円座標を導入しよう。

$$\begin{cases} x = l \cos \eta \cos \theta \\ y = l \sin \eta \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

$\eta \rightarrow 0$ の時は

$$\begin{cases} x \doteq l \cos \theta \\ y \doteq l \eta \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{故} \quad \eta \doteq \frac{|y|}{l \sin \theta}, \quad (7)$$

となる。

昭和 年 月 日

ルジャンドル関数を使うと.

$$\frac{1}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(z) P_n(s') P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (8)$$

for $z > z' = 1$.

$$z = \cosh \eta, \quad \mu = \cos \theta,$$

$$z' = \cosh \eta' \quad \mu' = \cos \theta', \quad \begin{cases} z = \cosh \eta' \cos \theta' \\ y = \sinh \eta' \end{cases}$$

$$P_n(1) = 1$$

なる展開があり

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

であるから.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu') \quad (9)$$

と展開出来るならば (4) は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f(z) dz}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2n+1) Q_n(z) P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_n(\mu') d\mu' \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) P_n(\mu) \quad (10) \end{aligned}$$

さて η が $\cosh \eta = 1$ と

$$Q_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \log \frac{2}{\eta} - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}), \quad (11)$$

となる。

η は (7) に よって与えられるから (10) の右辺は計算出来るが $\eta \rightarrow 0$ の極限では右辺が無限大となり (4) の極限值は有限確定でない。

もし物体が楕円体であるならば

$$y = b\sqrt{1-x^2} \quad (12)$$

昭和 年 月 日

(17)により

$$\gamma \Rightarrow \frac{b}{\ell}$$

(13)

となるので (11) により (10) は P_n の $2n$ の定数となり
 簡単になる。

slender body theory で " 楕円体 に近い場合 " *
 は γ をこのように採るの - 一つの近似法である。

slender wing theory では $g(x)$ に対して $\gamma(x)$ のとり方
 にたいして 楕円体 となるものがなく (4) は 本来 不定と
 なり、元に戻って考えなければならぬ。

今は (13) を考えて、そのような時にも

$$\gamma \neq \gamma$$

(14)

と採ることにすれば (4) は - 不定となる。

$$\varphi(x) = 2\log\left(\frac{z}{\alpha}\right) f(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) a_n P_n\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad (15)$$

$f(x)$ は (9) で与えられるものとする。

Tuck, E. O.; "Some method for flows past blunt
 slender bodies", J. F. M. vol 18, 1964.

昭和 年 月 日

附録 B 円板電荷分布

5.4 より円板電荷分布では半径 R は

$$R(x) = \frac{b}{l} \sqrt{l^2 - x^2} \quad (1)$$

$$y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad s = R \theta, \quad \bar{y} = R \cos \theta', \quad \bar{z} = R \sin \theta'$$

と表わす。(1)より

$$\begin{aligned} \frac{(y - \bar{y}) \frac{\partial \psi}{\partial y} + (z - \bar{z}) \frac{\partial \psi}{\partial z}}{r^2} &= \frac{(r - R \cos(\theta - \theta'))}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta')} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n(\theta - \theta') \quad (2) \end{aligned}$$

(2) $\bar{y}, \bar{z} \leq R$

42

$$\begin{aligned} \phi_z^{(1)} &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta', x) \cos n(\theta - \theta') d\theta' \\ &= -2 \left[\frac{\mu_0(x)}{R(x)} + \frac{\mu_1(x) \cos \theta + \mu_2(x) \sin \theta}{R'(x)} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

軸方向の運動では対称性が成り立つから $\mu_1 = \mu_2 = 0$ かつ $\mu_2 = \frac{\partial \mu_0}{\partial x} R_0$

$$\phi_z^{(1)} = - \frac{2\mu_0(x)}{R(x)} \quad (4)$$

$$\phi_z^{(1)} = -R(x) \int_{-l}^l \frac{\mu_0(z) dz}{|x-z|^3} + R'(x) \int_{-l}^l \frac{\mu_0(z) x(z-z)}{|x-z|^2} dz \quad (5)$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{\partial R(x)}{\partial x} = \frac{l}{l \sqrt{l^2 - x^2}} \quad (6)$$

積分方程式は

$$R'(x) = -2 \frac{\mu_0(x)}{R(x)} - \frac{d}{dx} \left[R(x) \frac{d}{dx} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \right\} \right], \quad (7)$$

右辺の2項は小さいので逐次近似解に解そう。

1 近似は

$$\mu_0(x) \doteq -\frac{1}{2} R(x) R'(x) = \frac{\beta^2}{2} x, \quad (8)$$

$$\beta = b/l,$$

又前節の結果よりこの近似値を代入すると

$$\int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi = x \beta^2 \left(\log \frac{2}{\beta} - 1 \right), \quad \dots (9)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[R(x) \frac{d}{dx} \int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \right] = -\beta^2 \left(\log \frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

よって2近似は

$$\begin{aligned} \mu_0(x) &= -\frac{1}{2} R(x) R'(x) - \frac{R(x)}{2} \frac{d}{dx} \left[R \frac{d}{dx} \int_{-l}^l \frac{\mu_0}{|x-\xi|} d\xi \right] \\ &= \frac{\beta^2}{2} x \left[1 + \beta^2 \left(\log \frac{2}{\beta} - 1 \right) \right], \quad \dots (10) \end{aligned}$$

右辺の2項は線型近似に対する修正項で、
長軸方向の附加質量係数に一致する。

Lamé 2 級関数 α は

$$k = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{2(1-e^2)}{e^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1-e} - e \right),$$

$$e = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

$$\text{故} \quad k \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \beta^2 \left[\log \frac{2}{\beta} - 1 \right], \quad \dots (11)$$

と前式に一致する。

附録 C 矩形変換

$$\mu(x, y) = f(x) \sqrt{a^2 - y^2} \quad (1)$$

と仮定して (8) より

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{a^2 - y^2} dy}{(y-x)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} d\eta}{(\frac{y}{b}-\eta)^2} = -\frac{b}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} d\eta}{(\frac{y}{b}-\eta)}$$

$$y = b \cos \theta$$

$$= \frac{d}{\pi b^2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta)^2} = \frac{1}{\pi b^2} \frac{d}{d \cos \theta} (\cos \theta) = -1$$

$$w^{(3)}(x, y) = + f(x) \quad (2)$$

又

$$p(x, y) = + \frac{d}{dx} \mu(x, y) = + f'(x) \sqrt{a^2 - y^2} \quad (3)$$

$$\pi(x) = \int_{-b}^b p(x, y) dy = + f'(x) \frac{b^2}{2} \pi \quad (4)$$

よって (4) より

$$w^{(4)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{\pi(\xi)}{|x-\xi|} d\xi = -\frac{b^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{f'(\xi) d\xi}{|x-\xi|} \quad (5)$$

よって積分方程式は、迎角を単位として、

$$-1 = f(x) - \frac{b^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{f'(\xi) d\xi}{|x-\xi|} \quad (6)$$

となる。

すなわち 附録 A より 右辺 の 積分 は 確定 しないけれど

$$Q_n(\xi) \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{\eta = \frac{b}{n}} \frac{b^2}{8} \left(\frac{b}{\eta} \right) \quad (7)$$

と近似すると (6) は

$$f(x) - \frac{\beta^2 l^2}{4} f''(x) = -1. \quad (8)$$

$$f(x) - \frac{1}{\alpha^2} f''(x) = -1, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2 l^2} \quad (8')$$

となり境界条件も考慮して次の解をうる。

$$f(x) = -1 + \frac{\cosh \alpha(l+x)}{\cosh(2l\alpha)}, \quad (9)$$

$$f(l) = 0, \quad f'(-l) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi \beta^2} \pi(x) = \alpha \frac{\sinh \alpha(l+x)}{\cosh(2l\alpha)}, \quad (10)$$

揚力は

$$L = \int_{-l}^l \pi(x) dx = \frac{\pi}{2} \beta^2 [f(-l)] = \frac{\pi}{2} \beta^2 \left[1 - \frac{1}{\cosh(2l\alpha)} \right],$$

$$C_L = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{l} \right) \left[1 - \operatorname{sech} \left(\frac{4l}{\beta \sqrt{\rho \frac{z}{\rho}}} \right) \right], \quad (11)$$

モーメントは

$$M = \int_{-l}^l x \pi(x) dx = \frac{\pi \alpha \beta^2}{2 \cosh 2l\alpha} \int_{-l}^l x \sinh \alpha(l+x) dx.$$

$$\int_{-l}^l x \sinh \alpha(l+x) dx = \frac{x}{\alpha} \cosh \alpha(l+x) \Big|_{-l}^l - \frac{1}{\alpha} \int \cosh \alpha(l+x) dx$$

$$= \frac{l}{\alpha} (\cosh 2\alpha l - 1) - \frac{1}{\alpha^2} \sinh 2\alpha l$$

$$M = \frac{\pi}{2} \beta^2 l \left[1 - \frac{1}{\cosh 2\alpha l} - \frac{\tanh 2\alpha l}{\alpha l} \right], \quad (12)$$

$$\frac{M}{2lL} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\alpha l} \frac{\sinh 2\alpha l}{\cosh 2\alpha l - 1} \right]$$

昭和 年 月 日

これらを計算すると

a/l	0	0.5	1	1.5
$CL/(仰角)$	0	.785	1.459	1.29
圧力中心の前端 からの距離 (a)	0	.106	.323	1.14
$(2\alpha l)$	∞	9.42	3.33	1.43

となり H. R. Lawrence^(前出) の計算と比較すると揚力
は アスペクト比 1 まではよく合っており、揚力中心は 0.5
までよく合っている。

三角翼についても同じ方法を試みたが (8) に対応
する積分方程式の解が特異性が強くて前端で
積分不可能となるのでこれ以上の当量量は
止める事にした。

これは先端がとがっている為の困難と考えられ
るのでこのような方法は先端がとがっていない
アスペクト比の大変小さいものには有効である
と考えられる。

実際 (5) の積分の不定さは以下に表われる
対数項の大きさとして表われるわけであるが結果
からみるとこの対数項の引数を少し変えても
アスペクト比が充分小さい時はそれによる変化
はアスペクト比の自乗に比例するので無視しうる
程小さくなり結局この方法はアスペクト比
が充分小さい極限において略々一定の
周数値になって行くと言える。

昭和 49 年 12 月 25 日

細長翼，細長体理論に関する覚書

別所 正利

内容

1. 序

(頁)

1

2. アスハクトヒ大なる場合 (翼)

2

3. 細長翼

5

4. 細長体

8-10.

附録 A 特異積分

A-1-3

" B 回転楕円体

B-1-2

" C 矩形翼

C-1~3

1. 序

所謂 slender wing or body theory を導くには全く直観的ないわば heuristic な方法とそれとは全く計算的、所謂 singular perturbation による方法とがある。

前者による時は極限移行に伴う数学的厳密さの点に不安があり、又後者による時は普通微分方程式に一度立ち帰って論ぜられるので近似した元の速度ポテンシャルとの関与が直接的でないうらみがある。

つまり逐次近似的に解を求めて行くに当って前者の方法では特異点の處理について困難が生じ後者の方法では厳格に廻るので式が大変複雑になってくる。

以下に述べる方法はこれらの中程をぬらったものであるが成書には見あたらないので記す次第である。

もう一つの焦点は組立翼における横渦の誘導速度の見積りの問題である。

従来は揚力面理論による以外見積る方法がなかった筈であるが特異積分を近似的に積分する事により特別な場合以外はよい近似値を得られる事を示す。

なおこのように揚力線理論と揚力面理論と並行的に論じて見ると誘導速度は片方は $O(\epsilon)$ 他方は $O(\epsilon^{1/2})$ となるので揚力線理論と同程度の組立翼理論はやはり横渦による影響を何らかの形で含めるべきではなからうか。

又それによつて始めて Kutta の条件を満たされる事になる。

昭和 年 月 日

2. アスペクト比 大なる場合

先づ 揚力線理論を導出しよう。

速度ポテンシャルは、圧力分布を $p U^2 p(\xi, \eta)$ とし $(U=1)$ とおき

$$\phi(x, y, z) = \iint_H p(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) dH, \quad (1)$$

$$w = -\phi_z(x, y, 0) = -\iint_H p(\xi, \eta) S_z(x-\xi, y-\eta, 0) dH, \quad (2)$$

と書こう。

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi \rho^2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right), \quad \left. \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \rho = \sqrt{y^2 + z^2} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$S_z(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

翼半幅を b , 半弦長を $l(\eta)$ とおき,

$$b \gg l(\eta), \quad (5)$$

とする。

そこで今 β と η を考え,

$$\left. \begin{array}{l} b \gg \beta, \quad \beta \gg l(\eta) \\ \text{or } 1 \gg \frac{\beta}{b}, \quad 1 \gg \frac{l(\eta)}{\beta} \end{array} \right\} \quad (6)$$

となつてゐるとする。

そして $p(\xi, \eta)$ が $y+\beta > \eta > y-\beta$ の間で略に一定と仮定しよう。そうすると積分区間を 2β に割りけて

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & - \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] d\eta \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} p(\xi, \eta) S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi \\
 & - \int_{-l(y)}^{l(y)} p(\xi, y) d\xi \int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \quad (7)
 \end{aligned}$$

右辺の1項の積分については

$$\begin{aligned}
 S_2(x-\xi, y-\eta, 0) & \xrightarrow[|y-\eta| \gg |x-\xi|]{} S_2(0, y-\eta, 0) = -\frac{1}{2\pi(y-\eta)} \\
 & = -\frac{1}{2\pi(y-\eta)^2}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

となり、かつ $b \gg \beta$ であるから、

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{b \gg \beta} \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] d\eta \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} p(\xi, \eta) S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi \\
 & = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\int_{-b}^{y-\beta} + \int_{y+\beta}^b \right] \frac{\pi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\pi(\eta) = \int_{-l(\eta)}^{l(\eta)} p(\xi, \eta) d\xi, \quad (10)$$

よって右辺は、

$$\begin{aligned}
 \int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x, y-\eta, 0) d\eta & = \int_{-\beta}^{\beta} S_2(x, u, 0) du \\
 & = -\frac{2}{2\pi x} \left[\frac{\sqrt{x^2 + \beta^2} - x}{\sqrt{x^2 + \beta^2} + x} \right] \xrightarrow{\beta \gg x} -\frac{1}{\pi x}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

よって

$$- \lim_{\beta \gg l(z)} \int_{l(y)}^{l(y)} P(z, y) dz \int_{y-\beta}^{y+\beta} S_2(x-z, y-\eta, 0) d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-l(y)}^{l(y)} \frac{P(z, y) dz}{x-z}, \quad (12)$$

(9) と (12) を合せて

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-l(y)}^{l(y)} \frac{P(z, y) dz}{x-z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\pi(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2}, \quad (13)$$

となり揚力線理論が得られる。^{*}

このように積分区間を分割する方法は数値計算にも特異点を処理するために必要な手段であつて、又函数解析的に無理の少ないやり方であらう。

* H. Ashley & M. Landahl "Aerodynamics of Wings & Bodies" Addison-Wesley, 1965.

3. 細長管

前節と同じ方法を適用する為にななる長さを考えて.

$$\begin{aligned} l &\gg \lambda \gg b(x) \\ \text{or } 1 &\gg \frac{\lambda}{l}, \quad 1 \gg \frac{b(x)}{\lambda} \end{aligned} \quad (1)$$

とし(1), (2)の積分を $[-l, -l+x]$, $[x+l, l]$ の区間と $[x-l, x+l]$ の区間に別けて積分するのであるが, その儘では x をはさむ区間の積分が無限大となるので (1) 及び (2) について部分積分して

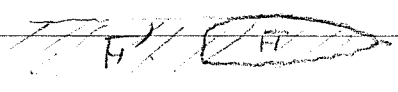
$$\phi(x, y, z) = + \iint_{H'} \mu(\xi, \eta) \nabla_x(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta, \quad (2)$$

$$w = -\phi_z(x, y, 0) = - \iint_{H'} \mu(\xi, \eta) \nabla_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (3)$$

$$\mu(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, \eta) d\zeta, \quad (4)$$

と置こう。

ここに H' は H を含む 1 箇の Γ 上に無限遠方まで長く (画) とする。



前同様 $\mu(\xi)$ は $\lambda+x > \xi > \lambda-x$ の間で一定として

$$w(x, y) = w^{(s)}(x, y) + w^{(h)}(x, y),$$

$$w^{(s)}(x, y) = - \int_{x-l}^{x+l} d\xi \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \mu(\xi, \eta) \nabla_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \quad (5)$$

$$w^{(h)}(x, y) = \left[\int_{-\infty}^{x-l} + \int_{x+l}^{\infty} \right] d\xi \int_{-b(\xi)}^{b(\xi)} \mu(\xi, \eta) \nabla_{zx}(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta$$

と別けると

 $x \rightarrow$

$$\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} S_{zx}(x-z, y, 0) dz = + S_z(x, y, 0) - S_z(-\lambda, y, 0) \\ = \frac{1}{2\pi y^2} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} \right) \xrightarrow{\lambda \gg y} \frac{1}{\pi y^2}, \quad (6)$$

$$S_{zx}(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left[\frac{1}{r} - \frac{x^2}{y^3} \right] = \frac{1}{2\pi y^3}$$

$$\xrightarrow{|x| \gg y} \frac{1}{2\pi |x|^3}, \quad \dots \quad (7)$$

と仮定

$$w^{(s)}(x, y) \doteq \frac{1}{\pi} \int_{-b(x)}^{b(x)} \frac{\mu(x, z) dz}{(y-z)^2}, \quad (8)$$

$$w^{(i)}(x, y) \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(z) dz}{(x-z)^3}, \quad (9)$$

$$M(z) = \int_{-b(z)}^{b(z)} \mu(z, y) dy, \quad (10)$$

所謂微分積分理論では $w^{(i)}$ は無視し
(8) のみ を 採 用 して いる が 幅 広 帯 の 工 界 合
と 比 較 すると $w^{(i)}$ を 考 慮 する 方 が よ い と
思 わ れ る。

この時 その積分が存在しないという難点がある、工夫がいる (Laurence 次々注)。

今の方法では (9) の積分は本来 $\lambda \rightarrow 0$ の極限
となっているので $x=3$ の付近は積分しないでもよい

昭和 年 月 日

から 適当な極限值で置換えてよい。

(9) の積分は 不便である (下限 ∞) から 部分積分して

$$w^{(1)}(x, y) = \frac{+1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi(z) \operatorname{sgn}(x-z)}{(x-z)^2} dz, \quad (11)$$

$$\pi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z, \eta) d\eta, \quad (12)$$

とすると かわかろう。

(8), (11) による表示は又 前節(2) から。

$$-S_2(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi y^2} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\xrightarrow{|y| \ll |x|} \frac{1}{2\pi y^2} \left\{ 1 - \operatorname{sgn}(x) \right\} + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{4\pi x^2}, \quad (13)$$

とすれば 全く同じものか得られる。

即ち

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_x^{\infty} p(z, \eta) dz + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{p(z, \eta)}{(x-z)^2} \operatorname{sgn}(x-z) dz d\eta \quad (14)$$

つまり (13) の近似をする所は Lawrence の方法を 極端に単純化した事になる。

4. 紐長体

吹出し分布で表わされる物体を考えよう。

この場合長軸方向の流れとそれに直角方向の流れとに分解出来るが、速度ポテンシャルはどちらとも同じで境界条件が変わるだけである。

さて速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \int_{-l}^l \int_C \frac{\sigma(s, \xi)}{r} ds d\xi, \quad (1)$$

ここに s は 相同 C に沿う距離, ξ は 長軸 とする。

境界条件は 長軸方向の単位速度流れに対しては

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_S = -\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_C \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_C, \quad (2)$$

ここに ν は 物体表面 S に立てた外向き法線, ν は C に立てた ξ に垂直な法線とする。

長軸に垂直な方向からの流れ(今 y 方向とす)に対しては (単位速度として)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \Big|_S \doteq \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_C \doteq -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (3)$$

さて

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \doteq - \int_{-l}^l \int_C \sigma(s, \xi) \frac{ds d\xi}{r^3} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial x}{\partial \nu} + (y-1) \frac{\partial y}{\partial \nu} + (z-1) \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\}, \quad (4)$$

とあるが 前節同様 σ が $x+\lambda > \xi > x-\lambda$ の間で

一定とし その間 物体も筒状であるとして近似計算をしよう。

昭和 年 月 日

$$\int_{x-1}^{x+1} \frac{d\zeta}{r^3} = \left[\frac{-1}{\rho^2 \sqrt{\lambda}} \right]_{\zeta=x-1}^{x+1} = \frac{2}{\rho^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2}} \xrightarrow{\lambda \gg \rho} \frac{2}{\rho^2}, \quad (5)$$

$$\rho^2 = (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

ここから

$$\phi_L = \phi_L^{(5)} + \phi_L^{(L)}, \quad (6)$$

$$\phi_L^{(5)} = -2 \int_C \frac{\sigma(s, \vec{z})}{\rho^2} ds \left[(y-\eta) \frac{\partial y}{\partial n} + (z-\zeta) \frac{\partial z}{\partial n} \right], \quad (7)$$

$$\phi_L^{(L)} = - \int_{-L}^L \int_C \frac{\sigma(s, \vec{z}) ds d\vec{z}}{|\vec{x} - \vec{z}|^3} \left\{ (x-\zeta) \frac{\partial x}{\partial n} + (y-\eta) \frac{\partial y}{\partial n} + (z-\zeta) \frac{\partial z}{\partial n} \right\}, \quad (8)$$

最後の式は

$$\mu_0(\vec{z}) = \int_C \sigma(s, \vec{z}) ds,$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(\vec{z}) &= \int_C \sigma(s, \vec{z}) y ds \\ \mu_2(\vec{z}) &= \int_C \sigma(s, \vec{z}) z ds \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\mu_3(\vec{z}) = \int_C \sigma(s, \vec{z}) \frac{\partial x}{\partial n}(\vec{z}) ds,$$

と書く

$$\begin{aligned} \phi_L^{(L)} &= - \int_{-L}^L \frac{\mu_0(\vec{z})}{|\vec{x} - \vec{z}|^3} \left\{ y \frac{\partial y}{\partial n} + z \frac{\partial z}{\partial n} \right\} d\vec{z} \\ &+ \int_{-L}^L \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|^3} \left\{ \mu_1(\vec{z}) \frac{\partial y}{\partial n} + \mu_2(\vec{z}) \frac{\partial z}{\partial n} \right\} d\vec{z} \\ &- \int_{-L}^L \frac{\mu_3(\vec{z}) \operatorname{sgn}(x-\zeta)}{|\vec{x} - \vec{z}|^2} d\vec{z}, \quad (10) \end{aligned}$$

4.2 on (10)

昭和 年 月 日

組長評理會では $\phi^{(1)}$ は高次な⁽¹⁾として $\phi^{(2)}$ のみを採用して ϕ を定めるのであるが誘導速度を考へる立場をとるとこれは捨て難いものがある。特に (8) 又は (10) の積分は対数項を含んでゐるので一層残念である。

附録 B には回転楕円体の長軸方向の運動について誘導速度の影響を求めて見た。

この場合特異積分の近似的取扱いはは全く難がなく結果も正しい近似値を与える。

横方向運動についても全く同様な方法が適用されてよく所謂三次元影響の見積りが可能になる。

なおここで注意すべき事はこのように特異点分布の近似を求める事は結局誘導速度を見積る事と同等であるという事である。

従つて内題によつては特異点分布の積分方程式を解く事なくより近似値をうる事が出来る。(例 Tucke 前出)

附録 A 特異積分

$$\varphi(x) = \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = - \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2} \operatorname{sgn}(x-\xi) d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = 2 \int_{-l}^l \frac{f(\xi)}{|x-\xi|^3} d\xi, \quad (3)$$

のように解釋する事にしよう。

$\varphi(x)$ は $(-l, l)$ の区間に分布する $f(x)$ なる質量分布の Newton potential の軸上における値である。

$$\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \varphi(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-l}^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}}, \quad (4)$$

$y \rightarrow 0$ の極限では対数的に無限大となるので普通の意味では有限確定とならない。

今回特異積分座標を導入しよう。

$$\begin{cases} x = l \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ y = l \operatorname{sh} \eta \sin \theta \end{cases} \quad (5)$$

$\eta \rightarrow 0$ の時は

$$\begin{cases} x \doteq l \cos \theta \\ y \doteq l \eta \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{故} \quad \eta \doteq \frac{|y|}{l \sin \theta}, \quad (7)$$

となる。

昭和 年 月 日

ルジャンドル多項式を使うと.

$$\frac{1}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Q_n(z) P_n(s') P_n(\mu) P_n(\mu'), \quad (8)$$

for $s \geq s' = 1$.

$$z = \cosh \eta, \quad \mu = \cos \theta,$$

$$z' = \cosh \eta' \quad \mu' = \cos \theta', \quad \begin{cases} z = \cosh \eta' \cosh \theta' \approx \cosh \theta' \\ y = \sinh \eta' \end{cases}$$

$$P_n(1) = 1$$

なる展開があり

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

であるから.

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu'), \quad \dots (9)$$

と展開出来るならば (4) は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f\left(\frac{z}{2}\right) dz}{\sqrt{(x-z)^2 + y^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n (2n+1) Q_n(z) P_n(\mu) \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu') d\mu' \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z) P_n(\mu), \quad \dots (10) \end{aligned}$$

ここで η が $\cosh \eta = z$ と

$$Q_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \log \frac{2}{\eta} = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right), \quad (11)$$

となる。

η は (7) に よって z から 決まるから (10) の右辺は 計算出来たが $\eta \rightarrow 0$ の極限では 右辺が 無限大となり (4) の 極限値は 有限確定 でない。

もし 物体が 楕円体 であるならば

$$y = b\sqrt{1-x^2}, \quad \dots (12)$$

昭和 年 月 日

(17)により.

$$\eta \Rightarrow \frac{b}{\ell}$$

(13)

となるので (11) により (10) は P_n の2つの定数となる。
 簡単になる。

slender body theory で " 楕円体に近い場合 " *
 は η をこのように採るのも一つの近似法である。

slender wing theory では $q(x)$ 従って $\eta(x)$ のとり方
 にたいし指摘となるものがなく (4) は本来不定と
 なり、元に戻って考えればなるまい。

今は (13) を考えて、そのような時にも

$$\eta = \lambda,$$

(14)

と採り直せば (4) は一定定数で、

$$\varphi(x) = 2 \log\left(\frac{2}{\pi}\right) f(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) a_n P_n\left(\frac{x}{\ell}\right), \quad (15)$$

$f(x)$ は (9) で与えられるものとする。

Tuck, E. O.; "Some method for flows past blunt slender bodies", J.F.M. vol 18, 1964.

附録 B 回転楕円体

§4 より回転楕円体では半径 R は

$$R(x) = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - x^2} \quad (1)$$

$$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta, s = R \theta, \beta = R \cos \theta', \gamma = R \sin \theta'$$

と表す。(1)より

$$\begin{aligned} \frac{(y-r) \frac{\partial y}{\partial r} + (z-s) \frac{\partial z}{\partial s}}{r^2} &= \frac{(r - R \cos(\theta - \theta'))}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta')} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n(\theta - \theta') \quad (2) \end{aligned}$$

$b/r \geq R$

#2

$$\begin{aligned} \phi_{\perp}^{(5)} &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta', x) \cos n(\theta - \theta') d\theta' \\ &= -2 \left[\frac{\mu_0(x)}{R(x)} + \frac{\mu_1(x) \cos \theta + \mu_2(x) \sin \theta}{R^2(x)} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

軸方向の運動では対称性から $\mu_1 = \mu_2 = 0$ かつ $\mu_3 = \frac{\partial x}{\partial s} \mu_0$

$$\phi_{\perp}^{(5)} = - \frac{2\mu_0(x)}{R(x)} \quad (4)$$

$$\phi_{\perp}^{(4)} = -R(x) \int_{-l}^l \frac{\mu_0(z) dz}{(x-z)^3} + R(x) \int_{-l}^l \frac{\mu_0(x) \log(x-z)}{(x-z)^2} dz \quad (5)$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial s} = -2R(x) = \frac{b}{c} \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}} \quad (6)$$

昭和 年 月 日

積分方程式は

$$R'(x) = -2 \frac{\mu_0(x)}{R(x)} - \frac{d}{dx} \left[R(x) \frac{d}{dx} \left\{ \int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \right\} \right], \quad (7)$$

右辺の2項は小さいので逐次近似的に解こう。

第1近似は

$$\mu_0(x) \doteq -\frac{1}{2} R(x) R'(x) = \frac{\beta^2}{2} x, \quad (8)$$

$$\beta = -R/l,$$

又前節の結果よりこの近似値を代入すると

$$\int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi = x \beta^2 \left[\log \frac{2}{\beta} - 1 \right], \quad \dots (9)$$

$$\text{よって} \quad \frac{d}{dx} \left[R(x) \frac{d}{dx} \int_{-l}^l \frac{\mu_0(\xi)}{|x-\xi|} d\xi \right] = -\beta^2 \left(\log \frac{2}{\beta} - 1 \right) \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

よって第2近似は

$$\begin{aligned} \mu_0(x) &= -\frac{1}{2} R(x) R'(x) - \frac{R(x)}{2} \frac{d}{dx} \left[R \frac{d}{dx} \int_{-l}^l \frac{\mu_0}{|x-\xi|} d\xi \right] \\ &= \frac{\beta^2}{2} x \left[1 + \beta^2 \left(\log \frac{2}{\beta} - 1 \right) \right], \quad \dots (10) \end{aligned}$$

右辺の2項は線型近似に対する修正項で、長軸方向の附加質量係数に一致する。

Lambに示すのは

$$k = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{2(1-e^2)}{e^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1-e} - e \right),$$

$$e = \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\text{故} \quad k \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \beta^2 \left[\log \frac{2}{\beta} - 1 \right], \quad \dots (11)$$

となつて上式に一致する。

昭和 年 月 日

附録 C 矩形翼

$$\mu(x, y) = f(x) \sqrt{b^2 - y^2} \quad (1)$$

と仮定して (8) より

$$\frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \frac{\sqrt{b^2 - \eta^2} d\eta}{(y - \eta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} d\eta}{(\frac{y}{b} - \eta)^2} = -\frac{b}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \eta^2} d\eta}{(\frac{y}{b} - \eta)}$$

$$y = b \cos \theta$$

$$= -\frac{b}{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d\theta}{(\cos \theta - \cos \theta)} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta) = 1$$

$$w^{(5)}(x, y) = + f(x) \quad (2)$$

$$p(x, y) = + \frac{d}{dx} \mu(x, y) = + f'(x) \sqrt{b^2 - y^2} \quad (3)$$

$$\pi(x) = \int_{-b}^b p(x, y) dy = + f'(x) b^2 \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

よって (1) (2) より

$$w^{(4)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{\pi(\xi)}{|x - \xi|} d\xi = -\frac{b^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{f(\xi) d\xi}{|x - \xi|} \quad (5)$$

よって積分方程式は 迎角を単位として

$$-1 = f(x) - \frac{b^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-l}^l \frac{f(\xi) d\xi}{|x - \xi|} \quad (6)$$

となる。

そこで 附録 A より 右辺が 2 項の積分は 確定しないけれど

$$Q_n(\xi) \xrightarrow[\eta \rightarrow 0]{\eta = \frac{b}{n}} b \left(\frac{2\eta}{b} \right) \quad (7)$$

と近似すると (6) は

昭和 年 月 日

$$f(x) - \frac{\beta^2}{2} \ln\left(\frac{2l}{\beta}\right) f''(x) = -1. \quad (8)$$

$$f(x) - \frac{1}{\alpha^2} f''(x) = -1, \quad \alpha^2 = \frac{4}{\beta^2 \ln\left(\frac{2l}{\beta}\right)}, \quad (8')$$

と仮定し境界条件を考慮して次の解をうる。

$$f(x) = -1 + \frac{\cosh \alpha(l+x)}{\cosh(2l\alpha)}, \quad (9)$$

$$f(l) = 0, \quad f'(-l) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi \beta^2} \pi(x) = \alpha \frac{\sinh \alpha(l+x)}{\cosh(2l\alpha)}, \quad (10)$$

揚力は

$$L = \int_{-l}^l \pi(x) dx = \frac{\pi}{2} \beta^2 [f(l) - f(-l)] = \frac{\pi}{2} \beta^2 \left[1 - \frac{1}{\cosh(2l\alpha)} \right],$$

$$C_L = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{l} \right) \left[1 - \operatorname{sech} \left(\frac{4l}{\beta \sqrt{\ln\left(\frac{2l}{\beta}\right)}} \right) \right], \quad (11)$$

 $\pi - x$ については

$$\frac{\beta}{l} \ll 2$$

$$M = \int_{-l}^l x \pi(x) dx = \frac{\pi \alpha \beta^2}{2 \cosh 2l\alpha} \int_{-l}^l x \sinh \alpha(l+x) dx.$$

$$\int_{-l}^l x \sinh \alpha(l+x) dx = \left. \frac{x}{\alpha} \cosh \alpha(l+x) \right|_{-l}^l - \frac{1}{\alpha} \int_{-l}^l \cosh \alpha(l+x) dx$$

$$= \frac{l}{\alpha} (\cosh 2\alpha l - 1) - \frac{1}{\alpha^2} \sinh 2\alpha l$$

$$M = \frac{\pi}{2} \beta^2 l \left[1 - \frac{1}{\cosh 2\alpha l} - \frac{\tanh 2\alpha l}{\alpha l} \right], \quad (12)$$

$$\frac{M}{2lL} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\alpha l} \frac{\sinh 2\alpha l}{\cosh 2\alpha l - 1} \right]$$

昭和 年 月 日

これらを計算すると

b/l	0	0.5	1	1.5
$CL/(仰角)$	0	.785	1.459	1.29
圧力中心の前端 からの距離 (b/l)	0	.106	.323	1.14
$(2\alpha l)$	∞	9.42	3.33	1.43

となり H. R. Lawrence ^(前出) の計算と比較すると揚力
は アスペクト比 1 までよく合ひ、揚力中心は 0.5
までよく合っている。

三角翼についても同じ方法を試みたが (8) に対応
する積分方程式の解が特異性が強くて前端で
積分不可能となるのでこれ以上の当量星は
止める事にした。

これは先端がとがっている為の困難と考えられ
るのでこのような方法は先端がとがっていない
アスペクト比の大変小さいものには有効であると
考えられる。

実際 (15) の積分の不定さは以下に表われる
対数項の大きさとして表われるわけであるが結果
からみるとこの対数項の引数を少し変えても
アスペクト比が充分小さい時はそれによる変化
はアスペクト比の自乗に比例するので無視する
程小さくなり、結局この方法はアスペクト比
が充分小さい極限において略々一定の
定数値になつて行くと言える。