

昭和50年2月4日

水力学の理論に関する2題

別添紙

内容

I. 長い管路における断面内流れ
(組立体理論の応用)

頁

1~4

II. ポンプの理論について

1. 円形翼列を直線翼列に変換する事

1

2. 最も簡単な遠心ポンプ複型

3

3. 軸流ポンプにおける翼列理論の誘導

8

I. 長い管路における断面内流れ

飛翔体、船等の細長い物体が流体中を運動する場合の流体力、流れ模様等については所謂細長体理論がよく使われる。

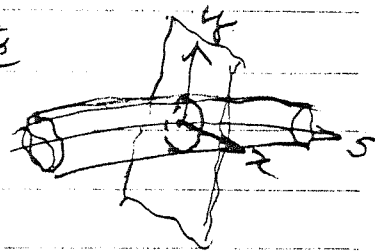
その理論と言うのは物体が非常に細長いとするとその軸に垂直な面内では流体運動は二次元運動となると言う事で直観的に理解しやすいものである。

一方流体力学的実験設備において種々の管路を設計しなければならないが特にそれを曲げる事、又断面形状を変える事については資料も伊々見当らず又計算するとしても大変な手間を要する。

そこで上述の理論をそのような場合に適用して見よう。

なお簡潔の爲に粘性は無視するものとする。

さて、管路の中心線に沿って距離 s を測る事としその曲率半径は充分大きいものとし断面形状も緩やかに変るものとする。軸方向の流速は断面内で略々一様となる。 $\{U(s)\}$ と言う。速度ポテンシャルを $\phi(x, y, s)$ とすると



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right) \phi(x, y, s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = U(s), \quad (2)$$

となる。

軸方向の速度 $U(s)$ の変化は連続の定理により

$$\frac{d}{ds} U(s) = - \frac{U(s)}{A(s)} \frac{d}{ds} A(s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi(x, y, s), \quad (3)$$

昭和 年 月 日

$A(s)$ は s における管路断面積とする。

これを (1) に代入すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \phi(x, y, s) = -\frac{\partial}{\partial s} U(s) = \frac{U}{A} A', \quad (4)$$

となり右辺は断面内で定数であるから、上式は断面内でポアソンの偏微分方程式となる。

よって解は特解、今の場合は簡単で

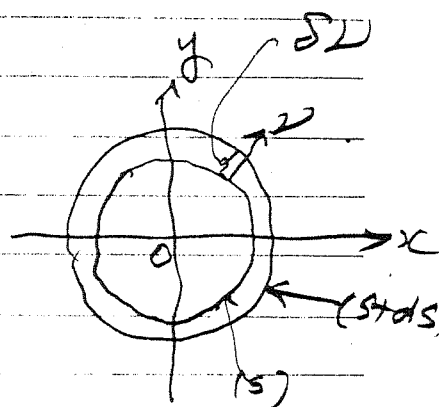
$$\phi_p(x, y) = \left\{ \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}, \frac{x^2 + y^2}{4} \right\} \times \frac{U A'}{A}, \quad (5)$$

と調和関数の和として表わされる。

そこで ϕ に対する境界条件は、

法線速度について指定される。

今 s における管路断面周曲線に対して外向き法線 δn を立て、これが $(s + ds)$ における周曲線と同一にはさまれた長さを δs とすると、



$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y, s) = U \frac{\delta n}{\delta s}, \quad \dots (6)$$

で与えられる。

従ってまず

$$\oint \frac{\partial \phi}{\partial n} d\tau = U \oint \frac{\delta n}{\delta s} d\tau = U \frac{\delta A}{\delta s}, \quad (7)$$

なる条件があり、これは上の特解に適用する。

以下簡単事例によって考えてゆこう。

i) 拡大管

円管が拡大(又は縮小)する場合、
(円管)

$$\phi(x, y; s) = \frac{r^2}{4} \frac{U}{A} A', \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (8)$$

とおくと $A = \pi a^2$, $A' = 2\pi a a'$ 故.

$$\phi = U \frac{r^2}{4} \frac{a'}{a}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = U r \frac{a'}{a} \Big|_{r=a} = U a' = U \frac{\delta a}{\delta s}, \quad (9)$$

ii) 円管が扁平化する場合

$$\text{今 } \frac{\delta \psi}{\delta s} = b \cos 2\theta, \quad \dots (10)$$

とすると

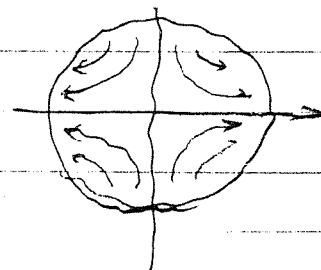
$$\int_0^{2\pi} \frac{\delta \psi}{\delta s} d\theta = 0, \quad (11)$$

であるから断面積の変化はなく、特解を用いる必要はない。

視察によつて

$$\phi(x, y) = \frac{U b}{2 a^2} (x^2 - y^2), \quad \dots (12)$$

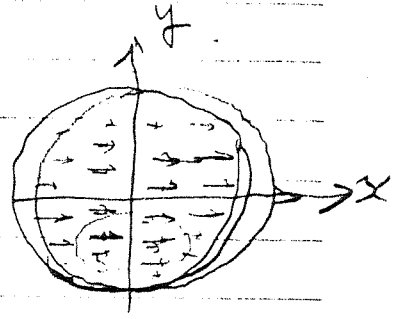
となる故流れは右図のようになる。



昭和 年 月 日

iii) 曲管 (円管)

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = b \cos \theta, \quad (13)$$



さおくと曲がり管の場合で (11) から
なり立つ故やはり断面積は不変で

$$\phi(x, y) = U \frac{b}{a} x, \quad \dots (14)$$

でよい。

$$\text{よって } \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = U \frac{b}{a}, \quad (15)$$

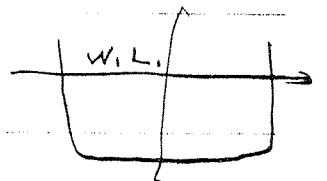
となって粘性を考慮しなければ x 方向分速度に一定
になる。

実際の流れでは渦ができて複雑になるがこ
のようにして出来るのはポテンシャル流れによる
2次元流れである。

iv) 自由表面のある場合.

この場合は水面の境界条件は

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \dots (16)$$



つまり固体壁と同じである。

水面位置についても第4章に求められる。

この点は造波桁柱理論におけると同様である
かその後には少々準備を必要とするのでここでは
述べるまい。

以上.

水力学 2 題

I. 管路内の断面内流れ (相長体理論の適用) 23

II. 遠心ポンプの理論について.

カ

1. 数学的模型.

2. トルク, 水頭, 効率.

3. 境界値問題.

円形管列の寫像.

II. $\alpha = \pi$ の理論

昭和 年 月 日

1. 円形翼列を直線翼列に変換する事

z -面の円形翼列を

$$S = \log z, \quad \dots (1)$$

なる関数で z -面に写像
すると円根が対数螺旋で
意味なしとすると z -面の直線
に写像される。

従って円形翼列問題は
直線翼列のそれに変換される。^{*}

今静止座標系に与える速度
速度ポテンシャルを $f(z) = \phi + i\psi$ としよう。
 z -面の原点には流量 Q の吹き出しと P の
circulation があるとするとそのポテンシャルは

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi} (Q - iP) \log z$$

$$= \frac{g}{2\pi} e^{i\alpha} \log z, \quad (2)$$

$$\text{但し } g = \sqrt{Q^2 + P^2}, \quad \tan \alpha = P/Q,$$

となる故 z -面では f_0 は、一様流れとなる故
固定円根の場合は境界条件が円根上で

$$\psi = \text{const.}, \quad (3)$$

故全く直線翼列と変わらない。

^{*}大空司, 機論集 Vol. 32, No. 233 (昭和41年1月)

昭和 年 月 日

しかし円形羽根では境界条件は少しく違って
2-面羽根に比

$$\psi = \frac{\omega}{2} \underbrace{z \bar{z}}_{(+\text{const})} = \frac{\omega}{2} \underbrace{r^2}_{(+\text{const})} = \frac{\omega}{2} r^{2+s} + \text{const}, \quad (4)$$

となる点が変わる。

しかし5-面を更に単位円に写像すると*
Poissonの公式を用いて容易にポテンシャルを
求める事が出来る。

なおポテンシャルは

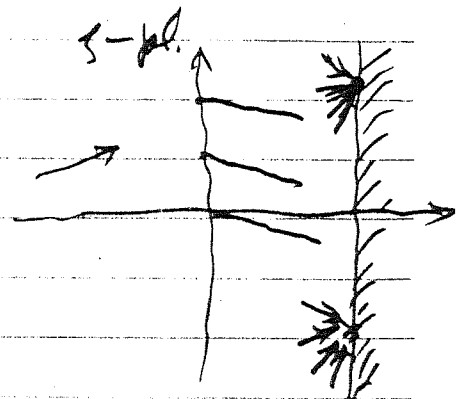
$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z), \quad (5)$$

のように分けられて f_0 は (2) によるもの f_1 は circulation
のない f_2 は circulation によるものとするが他し
その総和 2-面の原点にあるものに等しいとする。

Γ は任意であるが最終的に Kutta の条件によって
定まる。

円形

最終に上の考察をケーニクのある場合に適用すると
右図のように (2) の写像で円形
ケーニクは直線壁となり
口上にはその上の流れ込み
として表現される。



2. 最も簡単な遠心ホニフ模型

前節最後の考察から考えてもケーシングの影響を考えた理論は大抵であると思われる。

しかしその時は吐出が円形に成つて羽根と相対運動をするので非定常運動となり大変難しくなる。

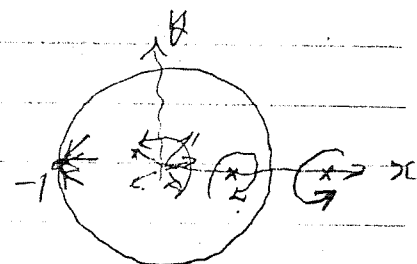
又ケーシングは円形ではないので等角速度による方法は不便であり、又厚みの影響まで考えると直接境界値問題をサークルで考えるのか計算機の使用の点でも便利であろう。*

こゝでは最も簡単な場合として円形ケーシングの中に n 本の circulation がある場合について考えて見る。

中心に流量 Q の吐出しと

P の circulation を置き、 $x=1$ に

吐出しを置く。



羽根の circulation は P/n である。

遠心速度ポテンシャルは

$$f(z) = f_q(z) + f_p(z), \dots (1)$$

$$f_q(z) = \frac{-Q}{2\pi} \log z + \frac{Q}{\pi} \log(z+1), \quad (2)$$

$$f_p(z) = \frac{iP}{2\pi} \log z + \frac{iP}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left\{ \frac{z - \frac{1}{n} e^{i(\frac{2\pi k}{n} + \omega t)}}{z - \frac{1}{n} e^{i(\frac{2\pi k}{n} + \omega t)}} \right\}, \quad (3)$$

ω は角速度、 t は時間とする。

* 神元他；機軸流 vol. 30, No. 216 (昭39) 他

圧力は ベルヌーイの定理より

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right|^2 + \text{const.} \quad (4)$$

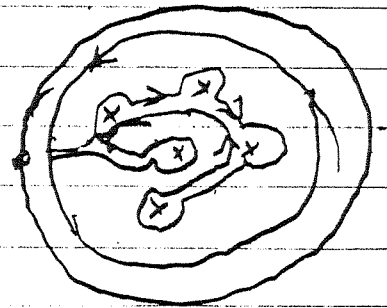
である。

揚程は 吐出口と 1/2 出口の圧力の差であるが
両者における流速が等しいとすると上式右辺第1
項の差であるが、時間的に変動するので平均を
とると

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{P}{\rho} dt = gH = - \frac{1}{T} [\Delta \phi]^T \quad (5)$$

のように書ける。ここで $\Delta \phi$ は $x=0$ と -1 における
中の差であるが ϕ は多価関数となつてゐるので
そのとり方を指定しないと決まらない。

そこで円周根と原点とを -1 と 1 の
間に1回のような cut を作つて置く。
こうすると $\Delta \phi$ は時間 t において
一定せられる。



(か) 円周根が一回転すると
円周根は原点と $x=-1$ の間の cut を
一度通つてしまふので結局全体で ρ だけ
 ϕ が変化するばかりである。

$$gH = \frac{cU}{2\pi} \rho \quad (6)$$

を得るがこれは従来の結果に一致する。(前出諸本等)
次に円周根に働く力は Milne-Thomson^{*}
Blasius の公式を拡張して。

今はトルクだけあればよいから

$$M = M_t + M_B, \quad (7)$$

$$M_t = P \frac{d}{dz} \oint z F dz, \quad (8)$$

$$M_B = Qe - \frac{P}{2} \int z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz, \quad (9)$$

とあらわれる。

M_t は時間変動項であるから定回転の時
平均すると 0 となると考えられるので M_B (今は
ブリュース・トルクと名づけよう) だけ考えればよい。

さて

$$\frac{df_0}{dz} = \frac{-Q}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{Q}{\pi(z+1)}, \quad (10)$$

$$\frac{df_0}{dz} = \frac{iP}{2\pi z} + \frac{iP}{2\pi n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \frac{z_0}{p^k}} - \frac{1}{z - z_0} \right)$$

$$z_0 = p e^{i(\frac{2\pi}{n} \alpha + \omega t)}$$

今 z_0 の n 個の可逆根を考慮して又簡単のため $n=1$ とし、
 $z = \zeta + z_0$ とおく

$$\begin{aligned} z \left(\frac{df}{dz} \right)^2 &= \frac{(\zeta + z_0)}{4\pi^2} \left(\frac{2Q}{\zeta + z_0 + 1} - \frac{Q}{\zeta + z_0} + \frac{iP}{\zeta + z_0} + \frac{P}{\zeta z_0 - \frac{z_0}{p^2}} - \frac{P}{\zeta} \right)^2 \\ &= \frac{(\zeta + z_0)}{4\pi^2} \left(-\frac{P}{\zeta} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \zeta^n \right)^2 \\ &= \frac{P^2}{\zeta^2} - \frac{2AP}{\zeta} + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{P^2 - 2AP}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^n \right], \quad (11)$$

$$A_1 = \frac{2Q}{1+z_0} - \frac{Q - iP}{z_0} + \frac{P}{z_0 - \frac{z_0}{p^2}}, \quad (12)$$

図12

$$M_B = \operatorname{Re} \left\{ \frac{P}{4\pi i} (1 - 2A) \right\} \quad \dots (13)$$

この時間平均をとると

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\overline{M} = \frac{1}{T} \int_0^T M_B dt = \frac{\omega P}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^T i A dt \quad (14)$$

今 $u = e^{i\omega t}$ とおくと $du = i\omega e^{i\omega t} dt$, $i\omega dt = \frac{du}{u}$

$$\int_0^T \frac{i\omega dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{u} \right] = 0$$

$$i\omega \int_0^T \frac{dt}{1 + 2\pi i} = \int_0^{2\pi i} \frac{du}{(1 + pu)u} = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{p}{1 + pu} \right) du = 2\pi$$

と仮定すると

$$\overline{M} = \frac{PQ}{2\pi} \quad \dots (15)$$

この効率率は

$$\eta = \frac{\frac{\omega P Q}{2\pi}}{\frac{P \omega Q}{\pi}} = \frac{1}{2} \quad \dots (16)$$

円形翼列で $\gamma - z = 0$ かなければトルクは*

$$M = \frac{PQ}{2\pi} \quad \dots (17)$$

故に効率は (16) を使って

$$\eta = 1 \quad \dots (18)$$

昭和 年 月 日

今の場合 極矢は考えられないので (16) は 1/2 違っている。
 この原因は (6) であろう。

と云うのは、ケーエングの外側の鏡像偏のもの
 まじり合めて考えれば

$$gH = \frac{\omega}{\pi} T \quad (6')$$

となり (15) と合せて $\eta = 1$ となるからである。

結局 ケーエングを考えると 揚程もトルクも
 なり場合の 1/2 になる事になり、なり場合に
 2/3 ほど大変な事になる。

昭和 年 月 日

3. 軸流ポンプにおける螺旋理論の誘導

フロペラ理論では
現在渦理論による。

計算が一般化して

且つ 良し精度を得ると言われている。^{*}



軸流ポンプの渦理論がどのような段階にあるのか 今午許に適當な参考書がないのでよくわからなから、以下螺旋理論との関係を検討しよう。

軸方向に x 軸をとり 円筒座標 (x, r, θ) を導入し 速度ポテンシャルを ϕ とすると、ラプラスの方程式は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \phi(x, r, \theta) = 0, \quad (1)$$

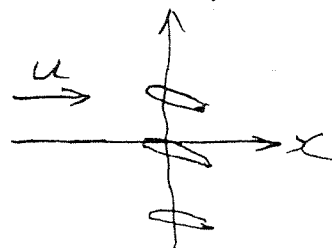
であるが r 一定の円筒面を考え

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\phi) = 0, \quad (2)$$

と仮定すると、 $r\theta = y$ とおいて

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, r, \frac{y}{r}) = 0, \quad (3)$$

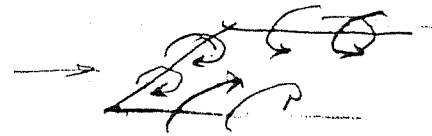
となる故 ϕ は $x-y$ 面における 2次元ポテンシャルとなり、これを展開すると右図のように螺旋が得られる。



こゝで揚力線理論を思い出し 比較しよう。

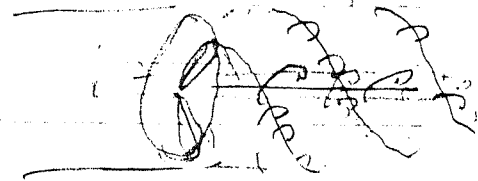
^{*}造船学会「カ2回船用フロペラモデル」1971

その時は上の発散性能に
対応するのは発散面の
二次元性能である。



発散理論においてはこれに対して
主流に平行な渦の誘導速度の補正を
する必要がある。

今の場合はそれはハブの周
りの渦とケーシング面の渦
(螺旋状)となる。



これらの渦の誘導速度を考え
ればよいのであるが、プロペラの土着合と
違ってケーシング面で渦線速度
が消える条件が必要であり、今その解析表示
を思い浮かべないのでこれ以上は考えない事にする。

只無限後方で考えると、 $\phi = 0$ の値で
あるから、これと(2)を仮定すると(1)の解は

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi(x, r, \theta) = 0 \quad (4)$$

故 $\phi(x, r, \theta) = \Gamma \theta$, Γ は定数、(5)

となり、これは軸上にある circulation による
断面二次元ポテンシャルである。

この事から考えると無限後方では上述の
誘導速度はこの値に近づくであろう。

勿論この Γ は翼面上の束縛渦の総和で
なければならぬ。

それ故プロペラ理論における類似からこの渦による
翼面上の θ 方向の誘導速度は(5)によるものの半分にな
るであろう。

もう一つの成分は x -方向の誘導速度を与える筈である
が流量一定の条件からこれは又 r -方向の速度を誘起する。