

G

11-35

No.

Date

53.10.17

翼理論に関する覚書

別冊21

内容

概要

	頁
1. 速度ポテンシャルと漸近展開	0
2. 境界値問題の積分方程式	1
3. 運動ポテンシャルと相反定理	3
4. 帆 (2次元)	6
5. 張力について	10
6. 帆の揚力面理論	15
7. 帆の揚力線理論	21
	23~28

概要

初めの2節では薄翼理論の積分方程式の解法に
関するもので、その方程式は特異性が強く、その取扱
特に数値積分については充分注意しなければならぬが、
その特異性を弱くして数値計算に無理のない
方法を示したが、そのかわり余分な未知関数が
表われてくる。

これは本来渦あり流れの渦のパターンは全く任意
である事に対応して、クッタの条件によって定まる
事を示している。

3章では従来の翼理論で使われる相互関係
と少し異なるものの存在をしめし、その積分の
力学的意味はラグランジアンである事、又
渦のまわりの流れでそれが有限である事を
2次元流れで証明した。

4節以下は、帆の翼理論的取扱いを討めた。
理論構成のためには、帆の張力に関する知識の
必要であるけれど、全く不明であり又実験的
に測る事も大変と思われるので、とりあえずは
2次元理論、揚力線理論をつくって見た。

略算の結果を見ても張力がこの現象を
支配している事は明らかである。

理論的問題としては自由辺の扱いとか
バウテッの影響のようなものが今後研究され
る課題となる。

1. 速度ポテンシヤルと 漸近展開

速度ポテンシヤルは 圧力分布を $\rho U^2 p(x, y)$, $U=1$ とし

$$\phi(x, y, z) = \iint_F p(x', y') S(x-x', y-y', z) dF, \quad (1.1)$$

$$dF = dx' dy'$$

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi \rho^2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right), \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} S = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{\rho^3}, \quad r^2 = x^2 + \rho^2,$$

充分遠方では

$$S(x-x', y-y', z) \rightarrow S(x, y-y', z)$$

$$-x' \frac{\partial S}{\partial x}(x, y-y', z)$$

$$= \frac{z}{2\pi [(y-y')^2 + z^2]} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-y')^2 + z^2}} - 1 \right)$$

$$- \frac{x'}{2\pi} \frac{z}{[x^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \dots, \quad (1.3)$$

これは 充分遠方ではよく知られているように

$$S(x-x', y-y', z) \xrightarrow{z \ll -1} - \frac{z}{\pi [(y-y')^2 + z^2]}$$

$$+ \dots, \quad (1.4)$$

一方 充分前方では

$$\psi(x, y, z) = \frac{z}{2\pi r(r+x)} \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi r^2} \text{ or } \frac{z}{4\pi x^2}, \quad (1.5)$$

のようになるが、とりあえず"次のように読んでおく。

$$S(x-x', y-y', z) \xrightarrow{z \gg 1} S(x, y, z) - x' \frac{\partial}{\partial x} S(x, y, z) - y' \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z), \quad (1.6)$$

まず (1.2) を (1.1) に代入すると

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \gg 1} -\frac{z}{\pi} \iint_{\tilde{H}} \frac{p(x', y') dx' dy'}{z^2 + (x-y')^2} + \dots \quad (1.7)$$

はトレフツ面の速度ポテンシヤルである。

一方 (1.6) を (1.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) \xrightarrow{z \gg 1} & S(x, y, z) \iint_{\tilde{H}} p d\tilde{H} \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} S(x, y, z) \int \int_{\tilde{H}} p x' d\tilde{H} - \frac{\partial}{\partial y} S \right) \int \int_{\tilde{H}} p y' d\tilde{H}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$S(x, y, z)$ は、その方向のダブレットが原点から無限遠端まで集りてゐるもののポテンシヤルであるから、上流から無限上流側でのポテンシヤルの主要部は揚力の強さを表す $S(x, y, z)$ であることになる。

なお下流側でも (1.7) の次の項は (1.8) と同型で同じオーダーである。

2. 境界値問題の積分方程式 境界条件は

$$w(x, y, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{p(x', y')}{(y-y')^2} \left[\frac{x-x'}{R} - 1 \right] dx' dy', \quad (2.1)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

であるが右辺の核関数の特異性から強いために解法については種々の工夫が必要である。
以下にこの特異性を除く一法を記す。

その為 12 次の微係数を求めよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_H \frac{p(x', y')}{r(x, y, z; x', y', 0)} dx' dy' \\ &= \frac{\partial}{\partial x} w(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ϕ は調和関数であるから上式から

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, 0) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_H \frac{p(x', y')}{R} dx' dy' \quad (2.3)$$

を得る。

それ故右辺の積分を未知関数とすると上式はポアソンの微分方程式となる。

今上式の特解を f としよう。
即ち $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ の積分

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = -w(x, y, 0), \quad (2.4)$$

このような解は所謂ポアソンの公式の形に
書くよりも実際には w は簡単な関数なので
目視による方が便利でよい。

$$w = 1 \text{ ならば } f = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad (2.5)$$

のようになる。

(2.3) の解は ^{この} 特解に 斉次解 今の場合は
H 上の二次元の調和関数 $h(x, y)$ を加えたもので
表わされるから

$$\frac{1}{2\pi} \iint_H \frac{p(x', y')}{R} dx' dy' = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} h(x, y), \quad (2.6)$$

左辺の積分は数値積分の困難がない。

しかし右辺の関数 h は不定である。

この事は (1.1) の速度ポテンシャルの不定さ
に起因していて普通それはクツタの条件
によって取り除かれる。

$$p(x', y') = 0 \text{ on Trailing Edge} \quad (2.7)$$

又 h は境界上の値によって決まらば次のように
表現出来る。

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \phi(x', y') \log R \, ds(x', y'), \quad (2.8)$$

そこで (2.6) を積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \iint_H p(x', y') \log |x - x'| + R \, dx' dy' &= f(x, y) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_C \phi(x', y') \log R \, ds(x', y'). \end{aligned} \quad (2.9)$$

この式を(2.7)の条件の下に解けばよいが、余計な未知関数 ϕ を求めねばならないのが難点、のように思える。

しかし、アスペクト比の大きい又は小さい場合は、 h は大変簡単で、 ϕ は組長型では
 $h \ll$

$$h = 1, x, y, xy, x^2 + y^2, \quad (2.10)$$

位考えれば"充分"であろう。

つまり(2.9)から揚力線理論, 組長型理論を誘導する事が出来るが少し面倒な点もある。

(2.9)を解くに当って左辺の積分の被積分関数は $y=y'$ で無限大になるが y 方向に積分すれば"消える"
 ϕ

$$\int \log|x+R| dy = y \log|x+R| - y - x \log\left|\frac{R-y}{2c}\right|, \quad (2.11)$$

3. 運動ポテンシヤルと 相反定理

$\tilde{F}lax$ は 逆流れポテンシヤル^(~FPL示す)を考へて 次の相反定理から境界値問題の 変分原理を導いた。

$$\iint_{\bar{H}} p_1 \tilde{w}_2 dF = \iint_{\bar{H}} \tilde{p}_2 w_1 dF, \quad (3.1)$$

この積分に対応する量は誘導抵抗である。

また $p, \tilde{p}$ はまゝクッタの条件を満足しなければ上式は成立たない。

花岡は造波理論に因りて上式に対応するものを第1定理と称し、もう一つ第2定理なるものを導出してゐる。

それは

$$\iint_{\bar{H}} \Delta \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} dF = \iint_{\bar{H}} \tilde{\Delta \phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dF, \quad (3.2)$$

($\Delta \phi$ は $\bar{H}$ の上下の差)

あるいは

$$\int_0^y \frac{\partial \phi}{\partial z} dx = \zeta(x, y, z), \quad (3.3)$$

なる関数を導入すれば部分積分によつて

$$\iint_{\bar{H}} p_1 \tilde{\zeta}_2 dF = \iint_{\bar{H}} \tilde{p}_2 \zeta_1 dF, \quad (3.4)$$

とも書ける。

この積分では ρ はクッタの条件を満たしてゐなくともよい。

この積分は γ が 1 ならば "揚力" であり, γ ならば "モーメント" であり. (3.1) と同じような役割も果たす事が出る, (1.8) の漸近展開の係数として現われて来る。

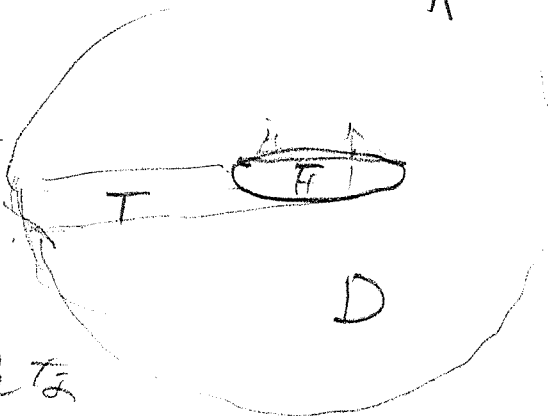
これを (3.2) の π で考えれば "グリーン" の定理により

$$I = \iint_H \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF = - \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz$$

$$+ \iint_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} dS + \iint_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \quad (3.5)$$

となる。

ρ が "石の運動エネルギー" — は R が大きくなると無限に大きくなるが Trefftz 面 T 上の積分も又無限大になって結果として I は有限な値を持つてゐる。



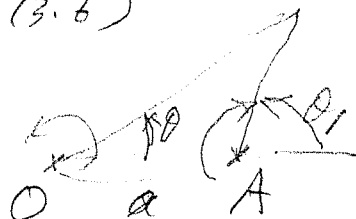
この Trefftz 面上の積分の意味を考える為に簡単な場合として 2 次元で考えて見よう。

原点にサーフェーレシヨンがあるとして x 軸上の点に もう一つ 逆のサーフェレシヨンを置く

$$\phi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta - \theta_1), \quad (3.6)$$

この2つの渦の引力は

$$F = \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{x}{r^2}, \quad (3.7)$$



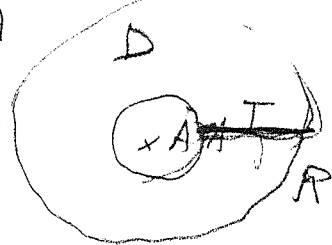
これら2つの引力に逆らってA点から $x=R$ の点まで
準静的に持って行くに必要な仕事は

$$U = \int_a^R F dx = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \log \left(\frac{R}{a} \right), \quad (3.8)$$

これは定義から位置のエネルギーと考えられ
 $R \rightarrow \infty$ とすれば "R点の渦は有限の位置には
影響せず", 系は高原点の渦のポテンシャル
エネルギーは (3.8) のように ∞ に発散する。

一方運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \iint_D \nabla \phi^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds - \frac{1}{2} \int_A \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds - \int_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} dr, \quad (3.9)$$



$$\text{となり} \quad \frac{1}{2} \int_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds = 0$$

$$\int_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{dr}{r} = - \frac{\Gamma^2}{2\pi} \int_a^R \frac{dr}{r} = - \frac{\Gamma^2}{2\pi} \log \frac{R}{a}$$

となり.

$$T = -\frac{1}{2} \int_A \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dS + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \log \frac{R}{a}, \quad (3.10)$$

したがって (3.8) を代入して、

$$-\frac{1}{2} \int_A \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dS = T - U, \quad (3.11)$$

となり、これは運動ポテンシャルもしくは
ラグランジアンと呼ばれるものである。

4. 帆

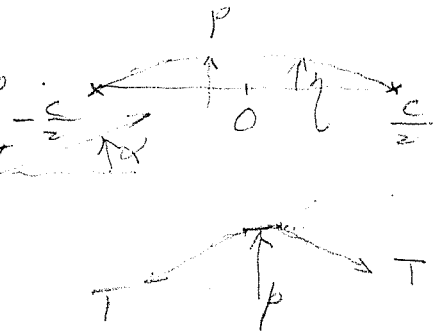
(2次元)

アスペクト比無限大の帆を考えよう。

帆の形状を $\eta(x)$ ($-\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2}$), V 流速, 仰角を α とする。

又

$$\eta(\pm \frac{c}{2}) = 0, \quad (4.1)$$



としても一般性を失わない。

即ちもし (4.1) でなければ α を少しかえて (4.1) のようにする事が出来る。帆の張力を T (以下力はすべて単位幅当たりとする) とすると 帆に働く圧力 (表裏の差圧) p は

$$p = -T \frac{d^2 \eta}{dx^2}, \quad \dots (4.2)$$

帆は撓み易いと考えると T は帆全長に亘り一定と考えてよい。

それ故 フックの条件は (4.2) から

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2}(\frac{c}{2}) = 0, \quad \dots (4.3)$$

境界条件は上向き速度 $v(x, 0)$ が帆に沿って流れる事から

$$v(x, 0) = -\alpha V + \frac{d\eta}{dx} V \quad (4.4)$$

帆面から空気が単位時間^{単位面積当り}にどれだけ流れるとすると、それは圧力に比例する,

$$\sigma = \varepsilon p = -\varepsilon T \frac{d^2 \eta}{dx^2}, \quad (4.5)$$

と仮定すると境界条件は

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= (-\alpha + \frac{d\eta}{dx})V + \rho \\ &= (-\alpha + \frac{d\eta}{dx})V - \varepsilon T \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \dots (4.6) \end{aligned}$$

さて電位上の端 $\delta(x)$ による速度ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \delta(x') \log(z-x') dx', \quad (4.7)$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\delta(x')}{z-x'} dx',$$

$$p = p_- - p_+ = -\rho V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_- - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_+ \right) = \rho V \delta(x), \quad (4.8)$$

よって速度ポテンシャルは

$$f(z) = \frac{iT}{2\pi\rho V} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{d^2\eta}{dx'^2} \log(z-x') dx', \quad (4.9)$$

上の速度は

$$v(x, 0) = \frac{-T}{2\pi\rho V} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{d^2\eta/dx'^2}{x'-x} dx', \quad (4.10)$$

(4.6) を代入すると

$$\alpha - \frac{d\eta}{dx} + \frac{\varepsilon T}{V} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{-T}{2\pi P V^2} \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{\frac{d^2\eta}{dx'^2}}{x-x'} dx',$$

ここに無次元化するために

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\alpha c}{2} H, & x &= \frac{c}{2} X \\ \frac{2\varepsilon T}{Vc} &= \beta, & \frac{T}{P V^2 c} &= K \end{aligned} \right\} \dots (4.11)$$

とおくと

$$1 - \frac{dH}{dX} + \beta \frac{d^2H}{dX^2} = -\frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\frac{d^2H}{dX'^2}}{X-X'} dX', \quad (4.12)$$

をうる。

また揚力 L , 前縁からのモーメント M は,

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{\rho}{2} V^2 c} = \frac{2}{P V^2 c} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} p dx = \frac{2T}{P V^2 c} \left[\frac{d\eta}{dx} \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \\ &= 2\alpha K \left[\frac{dH}{dX} \right]_1^{-1}, \quad \dots (4.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_M &= \frac{M}{\frac{\rho}{2} V^2 c^2} = \frac{-2T}{P V^2 c^2} \int \frac{d^2\eta}{dx^2} \left(x + \frac{c}{2} \right) dx \\ &= 2\alpha K \frac{dH}{dX} \Big|_{X=1}, \quad \dots (4.14) \end{aligned}$$

2.12 $H(\pm 1) = 0$ と仮定してある (4.11)。

(4.13) は揚力 L の垂直成分 (端に作用) が揚力である事を示す。

まず β は小さいので以下簡略の爲に無視する事にしよう。
その時 (4.12) は

$$\frac{d\eta}{dx} \rightarrow \frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\eta''(x')}{x-x'} dx' = 1, \quad (4.15)$$

となるが、これは滑定板の理論、揚力線理論
に出て来る積分方程式と同形である。

其の場合 K は波数の逆数、アスペクト比の逆数
に対応している。

したがって解法もそれらの方法にならばよく、例えば

$$\left. \begin{aligned} \eta''(x) &= \frac{-1}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cosh n\theta, \quad x = -\cosh\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n &= 0, \quad dx = \sinh\theta d\theta \end{aligned} \right\} (4.16)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} -\eta'(x) &= a_0 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sinh n\theta + C, \\ -\eta(x) &= D - C \cosh\theta + a_0 (\sinh\theta - \theta \cosh\theta) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2n} \left\{ \frac{\sinh(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sinh(n-1)\theta}{n-1} \right\} \end{aligned} \right\} (4.17)$$

$$\eta(\pm 1) = 0 \text{ より}$$

$$-\eta(-1) = D - C = 0$$

$$-\eta(+1) = D + C + \pi a_0 + \frac{a_1}{2} \pi = 0.$$

$$\therefore C = D = -\frac{\pi}{2} a_0 - \frac{\pi}{4} a_1, \quad \dots (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 \eta'(-1) &= -C = +\frac{\pi}{2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right) \\
 -\eta'(1) &= C + \pi a_0 = \frac{\pi}{2} \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right), \\
 +\eta'(-1) + \eta'(1) &= \pi a_0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (4.18)$$

using (4.13), (4.14) & 1)

$$\begin{aligned}
 C_L &= 2\pi \alpha K a_0, \\
 C_M &= \pi \alpha K \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right),
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (4.20)$$

(4.16), (4.17) & (4.15) is substituted into (4.13) & (4.14).

$$a_0 \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + a_1 \left(\pi \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sinh n \theta$$

$$\Rightarrow K \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\cosh n \theta}{\sinh \theta} = -1, \quad (4.21)$$

$$n \geq 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 0,$$

sign

近似計算より

$$z'' = - \frac{a_0}{\lambda \omega} (1 + \cos \theta) , \quad a_0 = a_1$$

とあくと

$$a_0 \left[K + \left(\frac{3\pi}{4} - \theta - \lambda \theta \right) \right] = 1 .$$

$$a_0 \doteq \frac{1}{K + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}} ,$$

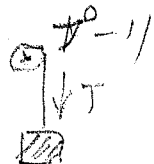
$$C_L = \frac{2\pi\alpha}{1 + \frac{0.149}{K}} ,$$

$$C_M \approx \frac{1}{4} C_L .$$

これらの $K \rightarrow \infty$ で平板翼に一致し、 K が有限なら常に
平板翼より揚力は小さい。(キヤンバーはふ、きりが張力が
小さくなる為)

5. 張力 について

前節では張力 T は定数としたが、そのように保つには、やはり右図のように滑車を介して張力をかける等の方法をとらねばならない。



もし両端が固定されてるとすると
巾凡の伸びは

$$\Delta l = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (\sqrt{1 + \eta'^2} - 1) dx \approx \frac{1}{2} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \eta'^2 dx, \quad (5.1)$$

であるから、たわみのない時の張力を T_0 とすると

$$T = T_0 + \frac{K}{2C} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \eta'^2 dx, \quad (5.2)$$

右は単位伸びに対する張力である。

前節の無次元をすると

$$K = K_0 + \frac{K_0}{4} \int_{-1}^1 (H(\alpha))^2 dx, \quad (5.3)$$

$$K_0 = T_0 / \rho V^2 C$$

となり、右辺の積分は K の関数となるので、上式から K の値が定まることになる。

しかし、右辺第2項は、仰角の自乗に比例するので、 K があまり大きくなければ、初期張力 $T_0 \approx T$ と出来るように思われるが、数値的に検討してみなければよく判らない。

次に3次元で考えて見よう。

帆は剪断力に堪え得ないとする。応力は
x方向に T_x , z方向に T_z のみとなり, 文献によれば*

$$\frac{\partial}{\partial x} T_x = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} T_z = 0, \quad \dots (5.4)$$

$$-p = T_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + T_z \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}, \quad (5.5)$$

p は圧力, η は撓み量とする。
(5.4) から直ちに

$$T_x = f_{\text{func}}(z), \quad T_z = f_{\text{func}}(x), \quad (5.6)$$

つまり T_x は z 方向に, T_z は x 方向に一定であり,
従つて境界における力に等しい。

どうなる場合の如き場合は

$$T_x = T_z = T; \text{ const}$$

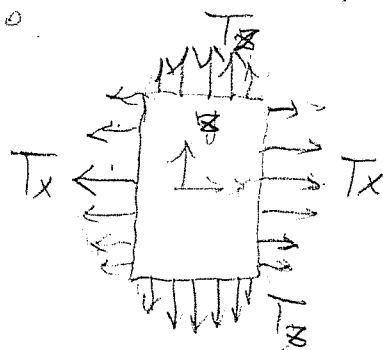
のように張つてあるので (5.5) は

$$-p = T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(x, z), \quad (5.7)$$

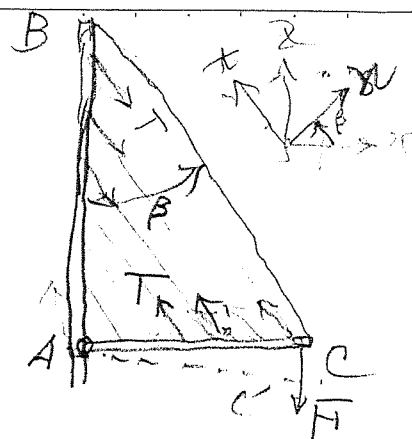
のようになるけれど一般には (5.5) で T_x, T_z は
(5.6) のように表わされると考へねばならない。

そして張力は端点においてマスト, グレー, ローフ
等にかゝる布面内の力に等しい。

以下 いろいろな場合を考えて見よう。



先ず 3 角形の帆について考えよう。
 AB がマストとし フーム AC の点 C
 で 下ろし F なる力で 引張るとする。



そうすると BC の方向の伸び率は
 AC に沿って一定であるから
 張力は一定であり それを T
 としよう。

フーム AC に働く力の A 点に回すモーメント
 の釣合を考えると

$$T \cos^2 \beta \frac{AC}{2} = F \quad (5.8)$$

この時 BC 辺 (自由辺) が曲がっているとすると
 BC を結ぶ直線の外の部分では張力は 0 となる。
 (この近似理論での話で実際はそこではないだろう)

しかしこれは 初期張力の話であって 帆がふくらむ
 と最初 12 のべた 束小橋を考えねばならないので
 その時は T は AC に沿って 変化すると考えねば
 ならず 上式は

$$\cos^2 \beta \int_0^L T(x) x dx = F AC \quad (5.9)$$

となる。

自由辺 BC に直角な方向には力は働かないから
 今 BC に平行な座標を x , 直角なものを z とせよ

$$\begin{cases} x = x \cos \beta + z \sin \beta \\ z = z \cos \beta - x \sin \beta \end{cases} \quad (5.10)$$

とおくと

(5.5) は

$$\begin{aligned}
 -p &= T \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T(n) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\
 &= T \left(\sin^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \sin \beta \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \cos^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

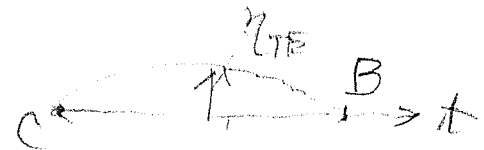
たゞし

$$T = f_{\text{tension}}(x \cos \beta + z \sin \beta) \quad (5.12)$$

さて自由辺には一般にロープが通つてをりそれに張力 S がかいてゐるとしよう。

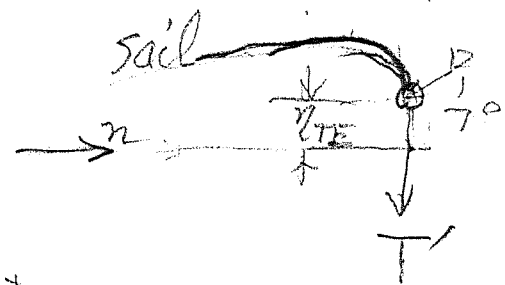
帆がふくらむと自由辺は 1 面の平面への投影の像かに内側に凹むであろうがその量は 2 次の微小量であるからロープは BC を通つて斜面に垂直な面内にあると考えられる。

その変位を図のように η_{TE} としよう。



これに垂直な面での帆の断面は 1 面のようになつて

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \eta \right|_{T.E} \rightarrow \infty \quad (5.13)$$



となり帆に働く張力 T' は

$$T' = S \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Big|_{T.E} \quad (5.14)$$

となるから (5.1) と合せて (5.5) より圧力は

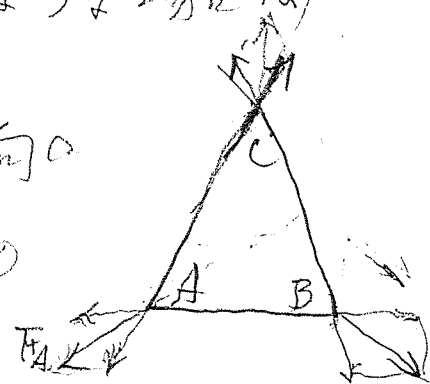
$$-p = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + T' \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (5.15)$$

となるから T と S が同じ大きさならばこの右項は高次の微小量となる。

しかし 各辺がすべて自由辺であるような場合は
これは無視出来ないと考えられる。

例として三角布を頂点の所で各方向に
引張ったと考えよう。

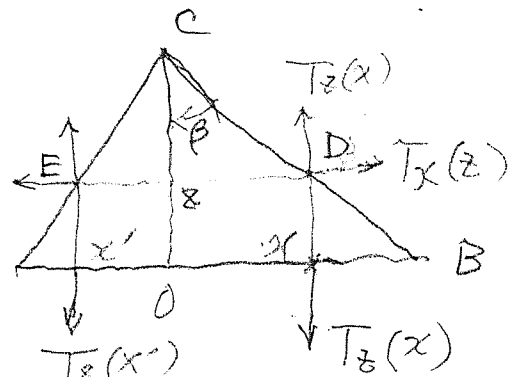
例えば A 点での力 T_A の延長線上の
対辺には 平衡する力が必要から
これを矢々 AB, AC 辺に沿う力に
分解して B 点と C 点における力と平衡
させねばならない。



そうすると 周辺には 張力があるが 布面では
張力は 0 となる。

実際に 張力 を受持っているのは 周辺の近くの
狭い 幅の 部分で あると考えられるので これを
ロープ のようなもので代用させて考えればよい。

風でふくうんで来ると (5.14)
で与えられる張力が各辺に
直角に働く。



今 AB 辺の張力が x 点で A
 $T_x(x)$ になったとすると
これは x-方向に一定
であるから 図の D 点でも同じ値をとる。

x-方向の張力 $T_x(x)$ も又水平な DE 線上
で一定である。

しかしこの合力は BC 辺に 垂力 でなければ
ならないから

$$\frac{T_z(x) \Delta t \sin \beta}{T_x(x) \Delta t \cos \beta} = \tan \beta$$

$$\therefore T_z(x) = T_x(x) \quad (5.16)$$

垂力 T_n は $T_n = \sqrt{T_z(x)^2 + T_x(x)^2} = T_n(x) = T(x)$

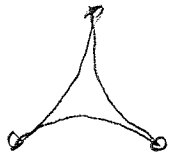
点でも同様にして

$$T_x(x) = T_x(z) = T_x(y) \quad (5.16)$$

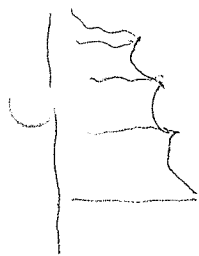
なる関係がなければならぬから どれか一边の張力分布がわかれば他の2辺の張力分布は定まってしまう。

このような張力は前述のように γ が小さければ小さい。この張力を大きくするには自由辺を凹ませて図のようにすればこの曲率に比例する張力を自由に与える事が出来る。

この時 x, z 矢々の方向に張力が等しいように形を定めておかないとたるみが出て来るであろう。



自由辺では上記のように凹ませない限り近似的に(5.13)が成立ち特に後縁ではクッタの条件(4.3)を満足させる事が出来なくなり又直観的にも渦が出来て流れが乱れ理論的取扱いは不可能で実験的に研究する以外にない。しかしたるみが出て来る事はよくない事でそれを防ぐには上述のように平面形で凹ませる方法しかない事は水島や蛙の足の水がまからも推察される。また附についていえばバッテンとバッテンの間で凹ませればたるみは少くなり(5.13)の条件をさける事が出来るよう。



上の場合近似的に

以上を総合してみると自由辺に直交する方向の張力は無視して考えるのが実際のところと考えられる。

6. 帆の揚力面理論

(2.1) で y と z を入れかきると 積分方程式は

$$\psi(x, 0, z) = \iint p(x', z') S(x-x', z-z') dx' dz', \quad (6.1)$$

$$S(x, z) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} - 1 \right), \quad (6.2)$$

境界条件は (4.4) と同じで

$$\psi(x, 0, z) = \left[-\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, z) \right] V, \quad (6.3)$$

帆面の圧力は周囲から周りを枠で囲まれて
をり一様な張力 T で引張られている時は
(5.7) 式で与えられる。

$$p = -T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(x, z), \quad (6.4)$$

自由辺がある時はそれに直角に張力 T が
となると近似すると (5.11) で与えられるが自由辺
は主流に直角であるか又はそれに近いし、又
面理論では後置角、上反角は性能に
ほとんど影響ないとされているのでこれを近似的に

$$p = -T \frac{\partial^2}{\partial z^2} \eta(x, z), \quad (6.5)$$

と近似しよう。

主流に平行な辺が自由辺ならば (4.2) と同じで

$$p = -T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x, z), \quad (6.6)$$

グッタの条件は (6.4) と (6.6) では (4.3) と同じで

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \bigg|_{T.E.} = 0 \quad (6.7)$$

問題ないが (6.5) では

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \bigg|_{T.E.} = 0 \quad (6.8)$$

となって、 η は 連続で 直線 となり、現実的でない。
そこで (5.15) まで戻ってこれを 0 とすると (5.14)
により グッタの条件は、

$$T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \bigg|_{T.E.} \left[1 + \frac{5}{T} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \bigg|_{T.E.} \right] = 0,$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \bigg|_{T.E.} = -\frac{T}{5}, \quad (6.9)$$

所が圧力を (4.16) のように展開できるとすると、 η は 0 か ∞ の中間の値はとりえないから上式もありえない。

結局 (6.8) が グッタの条件 となり、これは
張力 T が 充分大きい 時の 近似理論で
ある事を意味する事になる。

や困難

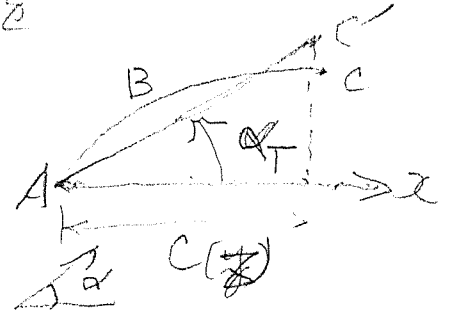
つまり現実的な場合が理論上最も弱点を
含んでいる事になる。

× 1-1

7. 帆の揚力線理論

帆のアスペクト比は一般に大きいので揚力線理論が適用出来る。
 2.9 節と述のように帆のふくらみの主流方向の断面形状は
 12.4 節に決め難いので細い事は実験に準
 準とし、実際の断面と同じ揚力を
 もつ等価な平板翼 AC' を
 考える。

帆の前端が固定されている
 とすると図の角 α_T はねじれである。



幾何学的仰角を α
 誘導仰角を α_i とすると有効仰角 α_e は

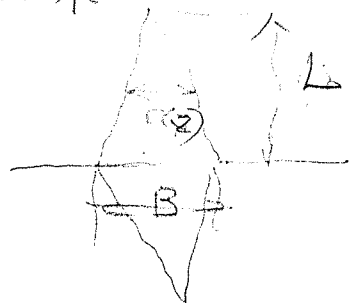
$$\alpha_e = \alpha - \alpha_i - \alpha_T \quad (7.1)$$

今 x -方向の単位長さ当たりの揚力を $P(x)$
 とおくと α_i は

$$\alpha_i = \frac{w_i}{V} = \frac{1}{4\pi PV} \int_{-L}^L \frac{dP(x)}{dx} \frac{dx}{x-\xi} \quad (7.2)$$

2.12 L は帆の高さとし、鏡像効果
 を考えて $-L$ まで積分する。

又 Hang glider を考えれば L は
 半幅となる。



又 α_T は C' の変位を $\eta(x)$ とすると

$$\alpha_T = \eta'(x)/C(x) \quad (7.3)$$

$C(x)$ は弦長である。

さて、板の二次変位 w にはける揚力 P は

$$P(z) = m\pi\rho V^2 C(z)\alpha e, \quad (7.4)$$

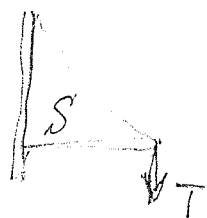
ここに m は 実験値との差の修正係数で $m < 1$ 。

一方、この揚力 P は 板の張力 T で保たれるから、この張力 T が 板の中心線に 集束的力働き、これによって 揚力を支えているものとする。中心線の曲率は $\frac{1}{2}\eta''(z)$ であるから

$$P(z) = -\frac{T}{2} \frac{\partial^2 \eta(z)}{\partial z^2}, \quad (7.5)$$

この時の T は コットの中心線では、ブーイ先端で 板を下方に引張る力としてよい。

(7.4) の左辺に (7.5) を 右辺に (7.1) ~ (7.3) を代入すると 次の積分方程式をうる。



$$-\frac{T}{2} \frac{\partial^2 \eta(z)}{\partial z^2} = \pi m \rho V^2 C(z) \left[\alpha - \frac{\eta(z)}{C(z)} \right] + \frac{im}{8} T C(z) \int_{-L}^L \frac{\frac{d^3 \eta}{ds^3}}{z-s} ds, \quad (7.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{今 } K &= T / \frac{\rho}{2} V^2 S, \quad \eta = \alpha L H(z) \\ z &= Ls, \quad C(z) = B C(s) \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

又 アスハの外に $\lambda = 2L^2/S$ (鏡像効果を考慮してある)

$$B/L = \beta$$

とあって無次元化すると

$$-H''(s) = \frac{2\pi m}{K} \lambda [\beta C(s) - H(s)] + \frac{m\beta}{4} C(s) \int_{-1}^1 \frac{H'''(s')}{s-s'} ds', \quad (7.8)$$

揚力は

$$L = - \int_0^L P dz = - \frac{T}{2} \left[\frac{dy}{dz} \right]_0^L \quad (7.9)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{\rho}{2} V^2 S} = \frac{K\alpha}{2} [H'(0) - H'(L)],$$

抵抗力は

$$D = \int_0^L P (\alpha_i - \alpha_r) dz \quad (7.10)$$

$$C_D = C_{Di} + C_{Dr}$$

$$C_{Di} = + \frac{K\alpha^2}{2} \int_0^L H(s) \left[\frac{K}{8\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{H'''(s')}{s-s'} ds' \right] ds, \quad (7.11)$$

$$C_{Dr} = - \frac{K\alpha^2}{2\beta} \int_0^L \frac{H(s) H''(s)}{C(s)} ds, \quad (7.12)$$

と成って抵抗力は誘導抵抗 C_{Di} の他に誘導抵抗 C_{Dr} を持つ。

誘導抵抗は揚力に比例する。

13

$$H''(-\cos\theta) = \frac{-1}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \cos 2n+1\theta, \quad (7.13)$$

よって

$$H''(-\cos\theta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \sin 2n+1\theta, \quad (7.14)$$

よって

$$H''(1) = H''(-1) = 0, \quad (7.15)$$

なる条件, つまり P が ± 1 のところで 0 となる条件をいふ。

これからさらに

$$-H'(-\cos\theta) = B + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{\sin 2n\theta}{2n} - \frac{\sin 2n+2\theta}{2n+2} \right], \quad (7.16)$$

よって $\frac{\sin 2n\theta}{2n} \Big|_{n=0} = 0$ とし, B は積分定数

$$-H(-\cos\theta) = A - B \cos\theta + \frac{a_1}{2} \left[-\theta \cos\theta + \frac{3}{4} \sin\theta + \frac{a_1}{12} \theta^3 \right]$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} \right) \sin(2n+1)\theta + \frac{\sin(2n+3)\theta}{(2n+2)(2n+3)} \right], \quad (7.17)$$

よって $H(1) = H(0) = 0$, $\dots$ (7.18)

よって $A + B + \frac{\pi}{2} a_1 = 0$,

$$A + \frac{a_1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{(2n+1)^2} \times \frac{(2n+2)}{(2n+1)(2n+3)} = 0$$

$$H'(1) = B + \frac{\pi}{2} a_1, \quad H'(0) = B + \frac{\pi}{4} a_1,$$

$$\therefore C_L = \frac{\pi \alpha}{8} K a_1, \quad (7.19)$$

ここで H', H は $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ まで考え, $0 < \theta < \pi/2$ の場合はその全量像を考える。

$$\int_{-1}^1 \frac{H'' ds'}{s-s'} = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \frac{a_{2n+1} \alpha}{a_{2n+1} \alpha}, \quad (7.20)$$

$$\therefore C_{DL} = \frac{\pi K^2 \alpha^2}{32\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}^2}{2n+1}, \quad (7.21)$$

又 普遍は 2.2 のように展開し

$$C(\theta) = a_{2n} \cos 2n\theta \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \cos 2n\theta \right], \quad (7.22)$$

元の方程式 (7.8) を数値的にとけばよい。

簡単のため

$$\left. \begin{aligned} a_{2n+1} &= 0 \quad \text{for } n \geq 1 \\ C(\theta) &= a_{2n} \end{aligned} \right\}$$

と仮定 (7.18) より

$$A = -\frac{a_1}{3}, \quad B = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right) a_1,$$

$$-H(-\cos\theta) = a_1 \left[-\frac{1}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) \cos\theta - \frac{\theta}{2} \cos\theta + \frac{3}{8} a_{2n} \cos\theta + \frac{a_{2n} \cos\theta}{24} \right], \quad (7.8) \lambda 2.$$

$$\begin{aligned} & -a_1 a_{2n} \cos\theta - \frac{\pi m \beta}{4} a_{2n} \cos\theta + \frac{2\pi m \lambda}{K} a_1 \left[-\frac{1}{3} + \dots \right] \\ & = \frac{2\pi m \lambda \beta}{K} a_{2n} \cos\theta, \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2 m \beta}{8} + \frac{2\pi m \lambda}{K} \left(-\frac{2}{3} + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{8} \pi \right) \right]^* = -\frac{\pi^2 m \lambda \beta}{K}$$

$$a_1 = \frac{2\pi m \lambda \beta}{K} / \left[1 + \frac{\pi}{4} m \beta + \frac{4m \lambda}{K} \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) \right],$$

$$\therefore C_L = \frac{\pi^2 m \lambda \beta \alpha}{4} / \left[1 + \dots \right],$$

* H の積分は $-\pi/4 < \theta < \pi$ の間で積分して 2 倍する必要がある

$$C_{Di} = \frac{2}{\pi\lambda} C_L^2$$

$$C_{DT} = \frac{-K\alpha^2 a_1^2}{2\beta} \int_{-\pi/2}^{\pi} \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right) \cos \theta + \frac{\theta}{2} \cos \theta - \frac{3}{8} \sin \theta \right] d\theta$$

$$= \frac{K\alpha^2 a_1^2}{2\beta} \left(\frac{\pi}{12} + \frac{11}{9} \right) = \frac{2\lambda}{\pi K} C_L^2 \left(\frac{\pi}{12} + \frac{11}{9} \right)$$

なか、今や $\lambda = \frac{4}{\pi\beta}$ なる関係がある。

即ち 振れ抵抗は λ に比例し K に逆比例する。

よって

$$C_L = \pi m \alpha / \left[1 + \frac{m}{\lambda} + \frac{4m}{K} \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) \right], \quad ?$$