

M-6 /

No.

Date

4.8.20

密度の異なる水が層をなしている場合の波
別所正利

1. 境界条件と速度ポテンシャルの表現
2. 相反小生
3. 基本特異小生

c.f. H. Lamb "Hydrodynamics" 6th ed. p.370

1. 境界条件と速度ポテンシャルの表現

n 層に別れていて密度は

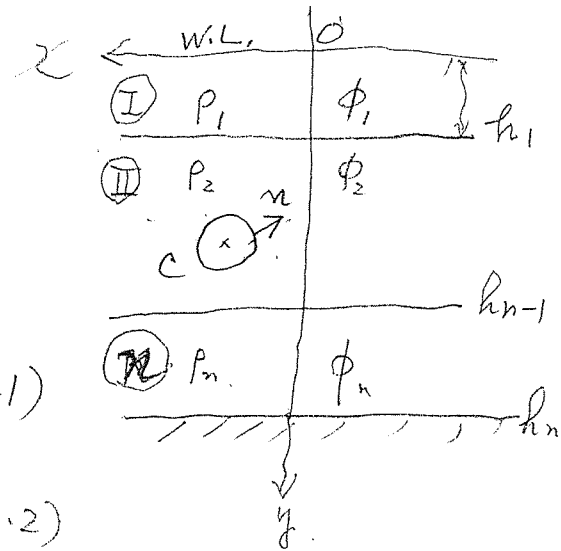
$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$$

境界条件は

$$K\phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y=0, \quad (1.1)$$

($K = \omega^2/g$)

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y=h_n \quad (1.2)$$



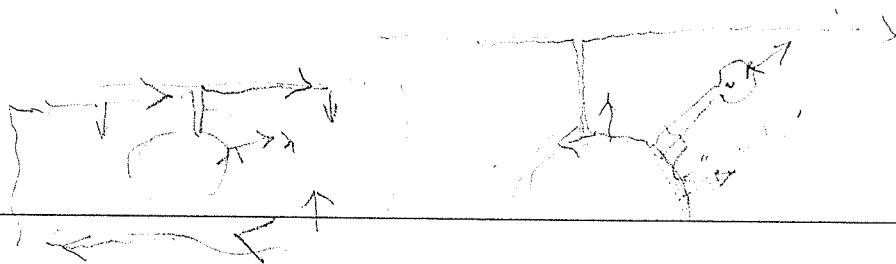
その他の境界面では、圧力と法線速度が等しいとすると

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \left(K + \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi_i &= \rho_{i+1} \left(K + \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} &= \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{for } y=h_i, \quad (1.3) \\ &(i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

今各層毎に ϕ_i なるポテンシャルを考えているから、これは又一つの ϕ なるポテンシャルの各層における値と言ってもよい。

今 j 番目の層内に物体 C があるとし、その核度数を $S_j(P, Q)$ のように定義しよう。

グリーンンの定理によつて



No. 2

Date

$$\begin{aligned} \phi_j(Q) = & - \int_C \left(\phi_j(P) \frac{\partial}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) S_j(P, Q) dS_P \\ & + \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx \\ & + \int_{y=h_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx, \quad (1.4) \end{aligned}$$

(1.3)より

$$\begin{aligned} \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx &= \int \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - S_j \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) dx \\ &= \frac{1}{K} \int \left[\left(K \phi_j + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - \left(K S_j + \frac{\partial}{\partial y} S_j \right) \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right] dx \\ &= \frac{P_{j-1}}{K P_j} \int \left[\left(K \phi_{j-1} + \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - \left(K S_{j-1} + \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} \right) \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right] dx \\ &= \frac{P_{j-1}}{P_j} \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - S_{j-1} \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) dx, \quad (1.5) \end{aligned}$$

同様に (2) 系も

$$\begin{aligned} \phi_j(Q) = & \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j(P, Q) dS_P \\ & + \frac{P_{j-1}}{P_j} \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1}(P, Q) dx \\ & + \int_{y=h_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx, \quad (1.6) \end{aligned}$$

同様にして その他の S_{i-1} は S_{i-1} 本 かなり とすると

$$\phi_{j-1}(Q) = \int_{y=h_{j-2}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx$$

$$+ \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx$$

$$= \frac{p_{j-2}}{p_{j-1}} \int_{y=h_{j-2}} \left(\phi_{j-2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-2}}{\partial y} \right) S_{j-2} dx$$

$$+ \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx, \quad (1.7)$$

$$\phi_{j+1}(Q) = \frac{p_j}{p_{j+1}} \int_{y=h_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx$$

$$+ \int_{y=h_{j+1}} \left(\phi_{j+1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j+1}}{\partial y} \right) S_{j+1} dx, \quad (1.8)$$

ここで 最下層では (1.2) より

$$\phi_n(Q) = \frac{p_{n-1}}{p_n} \int_{y=h_{n-1}} \left(\phi_{n-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial y} \right) S_{n-1} dx, \quad (1.9)$$

又 最上層では

$$\phi_1(x) = \int_{y=h_1} (\phi_1 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) S_1 dx, \quad \dots \quad (1.10)$$

つまり ϕ_i は i 層以外では 0 と仮定から 順次

$$\phi_2(x) = \frac{f_1}{f_2} \int_{y=h_1} (\phi_1 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) S_1 dx$$

$$+ \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx = 0, \quad x \in (I)$$

$$\therefore \phi_1(x) = - \frac{f_2}{f_1} \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx, \quad \dots \quad (1.11)$$

$$= \frac{f_3}{f_1} \int_{y=h_3} (\phi_3 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y}) S_3 dx, \quad \dots$$

$$\times \phi_2(x) = \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx, \quad x \in (II) \quad (1.12)$$

$$\therefore \phi_{j-1}(x) = \int_{y=h_{j-1}} (\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y}) S_{j-1} dx, \quad x \in (j-1) \quad (1.13)$$

$$\therefore \phi_j(x) = \int_C (\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n}) S_j ds$$

$$+ \int_{y=h_j} (\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) S_j dx, \quad (1.14)$$

$$\phi_{j+1}(Q) = -\frac{p_j}{p_{j+1}} \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dS$$

$$+ \int_{y=l_{j+1}} \left(\phi_{j+1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \phi_{j+1} \right) S_{j+1} dx, \quad (1.15)$$

一方 ϕ_n から出発するとやはり同じようになって
結局

$$\phi_j(Q) = \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dx, \quad Q \in \textcircled{j} \quad (1.16)$$

$$\phi_i(Q) = (-1)^{i-j} \frac{p_j}{p_i} \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dx, \quad Q \notin \textcircled{j} \quad (1.17)$$

2. 相反定理

今 2 つの (速度ポテンシャル $\phi^{(1)}$ と $\phi^{(2)}$ を考えて

次の双一次形式を導出しよう。

$$L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = \frac{1}{2} \iint_D \rho \nabla \phi^{(1)} \nabla \phi^{(2)} dx dy - \frac{\rho}{2} \int_{y=0}^? \phi^{(1)} \phi^{(2)} dx, \quad (2.1)$$

明らかに 相反性

$$L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = L(\phi^{(2)}, \phi^{(1)}), \quad (2.2)$$

が成立つ。

さて グリーンの定理より

$$\begin{aligned} L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) &= \frac{1}{2} \int_C \rho \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{y=h_j} \left[\rho \phi_j^{(1)} \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(1)} \frac{\partial \phi_{j+1}^{(2)}}{\partial y} \right] dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

右辺の 2 項の積分は (1.3) より

$$\begin{aligned} \int (\rho_j \phi_j^{(1)} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(1)}) \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y} dx &= \left(\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{K} \right) \int \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \phi_j^{(2)}}{\partial y} dx \\ &= \int_{y=h_j} (\rho_j \phi_j^{(2)} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(2)}) \frac{\partial \phi_j^{(1)}}{\partial y} dx, \quad (2.4) \end{aligned}$$

それ故 (2.2) は

$$\int_C \rho \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} ds = \int_C \rho \phi^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} ds, \quad (2.5)$$

前節の表現もこの定理から出発すれば容易に導ける。

又この定理の応用は次の議論でよく知られている。

假令ば

$$\left. \begin{aligned} \phi^{(1)}(Q) &\equiv S(P, Q) \\ \phi^{(2)}(Q) &\equiv S(Q, P) \end{aligned} \right\} Q \in \bar{\Omega}, P \in \Omega$$

と 1 次 P, Q の周りの小円上で積分すると。

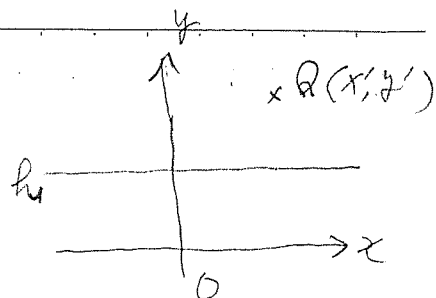
$$\rho(P) S(P, Q) = \rho(Q) S(Q, P), \quad (2.6)$$

3. 基本特性

最も簡単な場合として無限水深

で 2 層の場合を考えよう。

特異点が 2 層にあるとしよう。



$$\log R = - \int_0^{\infty} e^{-k|y'-y|} \cos k\zeta \frac{dk}{k}, \quad (3.1)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad \zeta = x - x'.$$

右辺の積分は収束しないが、運算の本質には害がないので、簡単のためにこうしておく。

2 のとき 2 次の変現が成立するとしよう。

$$2\pi S_2(p, Q) = \log R + \int_0^{\infty} H(k) e^{-k(y-h)} \cos k\zeta dk, \quad y' > y > h, \quad (3.2)$$

$$2\pi S_1(p, Q) = \int_0^{\infty} G(k) e^{k(y-h)} \cos k\zeta dk + \int_0^{\infty} H(k) e^{-ky} \cos k\zeta dk, \quad \text{for } h > y > 0, \quad (3.3)$$

$y=0$ の条件から

$$H(k) = \frac{k+K}{k-K} e^{-kh} G(k), \quad (3.4)$$

$k=K$ の所の留数は 11 が外に出て行くように

定める。

したがって $y = y' + h$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi S_1 &= \int_0^\infty G e^{k(y-h)} \cos k z \, dk + \int_0^\infty \frac{k+K}{k-K} e^{-k(y+h)} G \cos k z \, dk, \\ 2\pi S_2 &= - \int_0^\infty e^{-k(y'-h)} \cos k z \, \frac{dk}{k} + \int_0^\infty F e^{-k(y-h)} \cos k z \, dk, \end{aligned} \right\} (3.5)$$

これから (1.3) より

$$\left(1 - \frac{K+K}{K-K} e^{-2kh}\right) G = - \frac{e^{-Kh}}{K} = F, \quad (3.6)$$

$$y = y' - h.$$

又

$$2\pi \left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) S_1 \Big|_{y=h} = \int_0^\infty (K+K) (1 - e^{-2kh}) G \cos k z \, dk,$$

$$2\pi \left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) S_2 \Big|_{y=h} = - \int_0^\infty \frac{K+K}{k} e^{-Kh} \cos k z \, dk + \int_0^\infty (K-K) F \cos k z \, dk$$

$$\therefore (K+K) (1 - e^{-2kh}) G = - \frac{K+K}{k} e^{-Kh} + (K-K) F, \quad (3.6)$$

$$(K = P_1/P_2)$$

(3.5) と (3.6) より

$$\left. \begin{aligned} aF + bG &= p \\ -aF + cG &= q \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a &= K-K, \quad p = - \frac{K-K}{k} e^{-Kh} \\ b &= K-K + (K+K) e^{-2kh} \\ c &= (K+K) (1 - e^{-2kh}) \\ q &= - \frac{K+K}{k} e^{-Kh} \end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{a(b+c)} (pC - qh) = \frac{1}{b+c} \left(p \frac{C}{a} - \frac{h}{a} q \right) \quad \left\{ (3.7) \right.$$

$$G = \frac{p+q}{b+c}$$

$$\Delta \equiv b+c \equiv 2e^{-kh} \left[K(\cosh kh + \sigma \sinh kh) - k(1-\sigma) \sinh kh \right]$$

$$p+q = -\frac{2K}{R} e^{-kh}$$

$$\begin{aligned} p \frac{C}{a} - \frac{q}{a} \frac{h}{a} &= -\frac{e^{-kh}}{R} \sigma (K+b)(1-e^{-2kh}) + \frac{Kb}{R} e^{-kh} \left(1 + \frac{K+b}{K-b} e^{-2kh} \right) \\ &= \frac{e^{-kh}}{R} \left(\frac{K+b}{K-b} \right) \left[K-b + (K+b)e^{-2kh} - \sigma(K-b)(1-e^{-2kh}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{R} \left(\frac{K+b}{K-b} \right) e^{-kh} \left[K(\cosh kh - \sigma \sinh kh) - k(1-\sigma) \sinh kh \right] \\ &\dots (3.8) \end{aligned}$$

2.12 Δ は実軸上に 0 点を有し, π 附近

$$k = \frac{K}{1-\sigma} [\sigma + \coth kh] \quad \dots (3.9)$$

で与えられるから $\sigma \leq 1$ ならば ("k があまり小さくない場合")

$$k \approx \frac{1+\sigma}{1-\sigma} K \quad \dots (3.10)$$

k-plane 上の零点は $\sigma \rightarrow 0$ の極限では

$$k = K \coth kh \quad \dots (3.11)$$

つまり $y=0$ から固体壁の距離の逆数に一致して虚軸

上に simple な zero pt. が並んでいて, 今の場合は π の近くにも並んでいる。

なお F, G は

$$\left. \begin{aligned} F(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} e^{-k(y'-h)} \\ G(-k) &\xrightarrow{k \rightarrow 0} -\frac{1}{k} e^{-k(y'-h)} \\ H(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} e^{-k(y'-h)} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

なる対数部分をもち、よって、これを外に出してかくと

$$2\pi S_2 = \lg \sqrt{\frac{\xi^2 + (y-y')^2}{\xi^2 + (y+y'-2h)^2}} + \int_0^\infty F' e^{-k(y-h)} \cos k\xi dk, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} 2\pi S_1 = & \lg \sqrt{\frac{\xi^2 + (y-y')^2}{\xi^2 + (y+y'-h)^2}} \\ & + \int_0^\infty G' e^{-k(y-h)} \cos k\xi dk + \int_0^\infty H' e^{-k\xi} \cos k\xi dk, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} F' &= F - \frac{1}{k} e^{-k\eta} \\ G' &= G + \frac{e^{-k\eta}}{k} \\ H' &= H - \frac{e^{-k\eta}}{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

特異点. 第 1 に於けるは.

$$2\pi S_2 = \int_0^{\infty} \bar{F}(k) e^{-k(y-h)} \cos k z \, dk, \quad \text{for } y > h \quad (3.16)$$

$$2\pi S_1 = h R + \int_0^{\infty} G e^{-k(y-h)} \cos k z \, dk + \int_0^{\infty} H e^{-k y} \cos k z \, dk, \quad (3.17) \\ h > y > 0$$

又 (3.1) を $\frac{1}{R}$ を T とし

$$2\pi S_1 = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y-y')}}{k} \cos k z \, dk + 2\pi S_1^*, \quad \text{for } y > y' \\ = - \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y-y')}}{k} \cos k z \, dk + 2\pi S_1^*, \quad \text{for } y < y' \quad (3.18)$$

2, 1, 2 S_1^* は (3.17) の右辺 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ 項を示す.

$y=0$ のときから

$$- \frac{(K+k)}{k} e^{-k y'} + (K+k) G e^{-k h} + (K-k) H = 0$$

$$H = - \frac{(K+k)}{(K-k)} \left(\frac{e^{-k y'}}{k} - G e^{-k h} \right), \quad (3.19)$$

$y=h$ では

$$-H = + \frac{e^{-k(y'-h)}}{k} + G - H e^{-k h} \\ = \frac{e^{-k(y'-h)}}{k} - \frac{e^{-k(y'+h)}}{k} \frac{K+k}{K-k} + G \left(1 + \frac{K+k}{K-k} e^{-2k h} \right), \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{\sigma}(K-b)F = -\frac{K-b}{R}e^{-R(h-y')} + (K+b)G + (K-b)He^{-b h}$$

$$\frac{F}{\sigma} = -\frac{e^{-R(h-y')}}{R} + \frac{K+b}{K-b}G + \frac{K+b}{K-b}\left(\frac{e^{-b h}}{R} - Ge^{-b h}\right)e^{-b h}$$

$$= -\frac{e^{-R(h-y')}}{R} + \frac{K+b}{R(K-b)}e^{-R(y'+h)} + \frac{K+b}{R-b}G(1 - e^{-2b h}),$$

$$A = -\frac{e^{-R(h-y')}}{R} + \frac{K+b}{R(K-b)}e^{-R(y'+h)}, \quad \dots (3.21)$$

(3.22)

よお<よ

$$-F = -A + G\left(1 + \frac{K+b}{K-b}e^{-2b h}\right)$$

$$F = \sigma A + \sigma G\left(\frac{K+b}{K-b}\right)(1 - e^{-2b h})$$

$$\begin{cases} F = -A + \frac{b}{a}G \\ F = \sigma A + \frac{c}{a}G \end{cases} \quad \begin{cases} aF + bG = A \\ -aF + cG = -\sigma A \end{cases}$$

$$F = \frac{1}{b+c}\left(\frac{Ac}{a} + \frac{b\sigma A}{a}\right) = \frac{c+\sigma b}{(b+c)a}A = \frac{2K\sigma A}{(b+c)(K-b)}$$

$$G = \frac{(1-\sigma)A}{b+c} \quad \dots (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} + \sigma \frac{b}{a} &= \frac{\sigma}{a} \left[(K+b)(1 - e^{-2b h}) + (K-b) + (K+b)e^{-2b h} \right] \\ &= \frac{\sigma}{a} [2K] - \end{aligned}$$

- 別に 特異点のない層 i について

$$p_i = \int_0^\infty (G_i e^{k(y-h_i)} + H_i e^{k(h_{i+1}-y)}) \cos k z \, dk, \quad (3.24)$$

それ故 $y=h_i$ における条件は

$$\begin{aligned} p_i [(k+b)G_i + (k-b)H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)}] \\ = p_{i+1} [(k+b)G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})} + (k-b)H_{i+1}], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$G_i - H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} = G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})} - H_{i+1}, \quad (3.26)$$

2式から G_{i+1} を消去すると

$$\begin{aligned} (p_i - p_{i+1})(k+b)G_i + [p_i(k-b) + p_{i+1}(k+b)]H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} \\ = 2K p_{i+1} H_{i+1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

H_{i+1} を消去すると

$$\begin{aligned} \{p_i(k+b) + p_{i+1}(k-b)\}G_i + (p_i - p_{i+1})(k-b)H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} \\ = 2K p_{i+1} G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

よって

$$\begin{aligned} G_{i+1} &= a_i G_i + b_i H_i \\ H_{i+1} &= c_i G_i + d_i H_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$a_i = \frac{e^{k(h_{i+1}-h_i)}}{2K p_{i+1}} \{p_i(k+b) + p_{i+1}(k-b)\}, \quad b_i = \frac{p_i - p_{i+1}}{2K p_{i+1}} e^{k(h_i+h_{i+1})} (k-b),$$

$$c_i = \frac{p_i - p_{i+1}}{2K p_{i+1}} (k+b), \quad d_i = \frac{e^{k(h_i-h_{i+1})}}{2K p_{i+1}} [p_i(k-b) + p_{i+1}(k+b)], \quad (3.30)$$

と第1と順次下層の値が計算出来る。

特に水層では

$$(K+k)G_1 e^{-k h_1} + (K-k)H_1 = 0 \quad (3.29)$$

水層直上のある層 j では

$$\phi_j = G_j R + \int_0^\infty [G_j' e^{k(y-h_j)} + H_j' e^{k(h_{j+1}-y)}] \cos k \bar{z} d\bar{z} \quad (3.30)$$

と第4, 5,

$$\left. \begin{aligned} G_j R &= - \int_0^\infty e^{-k(y'-y)} \frac{\cosh k \bar{z}}{k} d\bar{z} \quad \text{for } y' > y \\ &- \int_0^\infty e^{k(y'-y)} \frac{\cosh k \bar{z}}{k} d\bar{z} \quad \text{for } y' < y \end{aligned} \right\}$$

であるから (3.28) の形に書くと $y = h_{j+1} < h_j$ での G, H は

異なる関係となる。

よって

$$\begin{aligned} \phi_j &= \int_0^\infty (G_j^- e^{-k(y-h_j)} + H_j^- e^{k(h_{j+1}-y)}) \cos k \bar{z} d\bar{z} \quad \text{for } y = h_{j+1} \\ &= \int_0^\infty (G_j^+ e^{k(y-h_j)} + H_j^+ e^{k(h_{j+1}-y)}) \cos k \bar{z} d\bar{z} \quad \text{for } y = h_j \end{aligned} \quad (3.31)$$

とあくと

$$\left. \begin{aligned} G_j^- &= G_j', \quad H_j^- = H_j' - \frac{e^{-k(y'-h_{j+1})}}{k} \\ G_j^+ &= G_j' - \frac{e^{k(y'-h_j)}}{k}, \quad H_j^+ = H_j' \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

(3.27) 4. $\bar{G}_j, \bar{H}_j$ の定義

$$\bar{G}_j = a_j G_{j-1} + b_j H_{j-1} \quad (3.33)$$

$$\bar{H}_j = c_j G_{j-1} + d_j H_{j-1}$$

$$G_{j+1} = a_j G_j^+ + b_j H_j^+$$

$$H_{j+1} = c_j G_j^+ + d_j H_j^+$$

$$G_{j+1} = a_j \bar{G}_j + b_j \bar{H}_j - \frac{a_j}{k} e^{\frac{2\pi i (j-1)}{k}} + \frac{b_j}{k} e^{\frac{2\pi i (j-1)}{k}}$$

$$H_{j+1} = c_j \bar{G}_j + d_j \bar{H}_j - \frac{c_j}{k} e^{\frac{2\pi i (j-1)}{k}} + \frac{d_j}{k} e^{\frac{2\pi i (j-1)}{k}}$$

の5312 繰り出し, 最終に, 水底では,

$$G_n = H_n e^{\frac{2\pi i (n-1)}{k}} \quad (3.35)$$

$$H_1 = \alpha G_1, \quad \alpha = \frac{a_1 + b_1}{c_1 + d_1} e^{-\frac{2\pi i}{k}} \quad (3.36)$$

より

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= (a_1 + \alpha b_1) G_1 \equiv A_1 G_1 \\ H_2 &= (c_1 + \alpha d_1) G_1 \equiv B_1 G_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} G_3 &= a_2 A_1 G_1 + b_2 B_1 G_1 \equiv A_2 G_1 \\ H_3 &= c_2 A_1 G_1 + d_2 B_1 G_1 \equiv B_2 G_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$G_j^- = A_{j-1} G_1, \quad H_j^- = B_{j-1} G_1$$

$$G_j^+ = -\frac{e^{k(V_j - V_1)}}{R} + A_{j-1} G_1, \quad H_j^+ = \frac{e^{R(V_j - V_1)}}{R} + B_{j-1} G_1 \quad (3.39)$$

$$G_{j+1} = D_j + A_j G_1, \quad H_{j+1} = E_j + B_j G_1$$

$$D_j = -\frac{a_j}{R} e^{k(V_j - V_1)} + \frac{b_j}{R} e^{R(V_j - V_1)}$$

$$E_j = c_j \quad d_j \quad "$$

$$G_{j+2} = D_{j+1} + A_{j+1} G_1, \quad H_{j+2} = E_{j+1} + B_{j+1} G_1$$

$$D_{j+1} = a_{j+1} D_j + b_{j+1} E_j, \quad E_{j+1} = c_{j+1} D_j + d_{j+1} E_j$$

...

$$G_n = D_{n-1} + A_{n-1} G_1, \quad H_n = E_{n-1} + B_{n-1} G_1$$

(3.38) to (3.39)

$$D_{n-1} + A_{n-1} G_1 = \{E_{n-1} + B_{n-1} G_1\} e^{R(V_{n-1} - V_1)}$$

$$G_1 = \frac{E_{n-1} e^{R(V_{n-1} - V_1)} - D_{n-1}}{A_{n-1} - B_{n-1} e^{R(V_{n-1} - V_1)}}, \quad (3.40)$$

$$a_1 = \frac{e^{k(h_2 - h_1)}}{2kP_2} \{ P_1(K+b) + P_2(K-b) \}$$

$$b_1 = \frac{P_1 - P_2}{2kP_2} e^{k(h_2 - 2h_1)} (K-b), \quad c_1 = \frac{P_1 - P_2}{2kP_2} (K+b)$$

$$d_1 = \frac{e^{-kh_1}}{2kP_2} [P_1(K-b) + P_2(K+b)]$$

$$A_1 = a_1 + \alpha b_1 = \frac{e^{k(h_2 - h_1)}}{2kP_2} [P_1(K+b) + P_2(K-b) - (P_1 - P_2)(K+b) e^{2kh_1}]$$

$$B_1 = c_1 + \alpha d_1 = \frac{1}{2kP_2} \left[(P_1 - P_2)(K+b) + \frac{(K+b)}{K-b} e^{2kh_1} [P_1(K-b) + P_2(K+b)] \right]$$

$$= \frac{(K+b)}{2kP_2(K-b)} \left[(P_1 - P_2)(K-b) - e^{-2kh_1} [P_1(K-b) + P_2(K+b)] \right]$$

$$G_2 = A_1 G_1, \quad H_2 = B_1 G_1$$

$$G_2 = H_2 e^{k(h_1 - h_2)}$$

$$A_1 G_1 = B_1 G_1 e^{k(h_1 - h_2)}$$

$$A_1 e^{k(h_2 - h_1)} - B_1 = e^{2k(h_1 - h_2)} [P_1(K+b) + P_2(K-b) + (P_2 - P_1)(K+b) e^{-2kh_1}]$$

$$+ \frac{K+b}{K-b} \left[(P_1 - P_2)(K-b) + e^{-2kh_1} [P_1(K-b) + P_2(K+b)] \right]$$

$$A_1 = 0 \quad \sigma(K+b) + K-b + (1-\sigma)(K+b) e^{-2kh_1} = 0$$

$$K \{ (1+\sigma) + (1-\sigma) e^{-2kh_1} \} + b(1-\sigma) (e^{-2kh_1} - 1) = 0$$

$$2K \{ \sigma h_2 + b h_1 + \sigma h_2 b h_1 \} - 2b(1-\sigma) h_2 b h_1 = 0$$

$$K \{ \sigma + \coth k h_2 b h_1 \} = b(1-\sigma)$$

密度の異なる水が層をなしている場合の波 別所正利

1. 境界条件と速度ポテンシャルの表現
2. 相互反射
3. 基本特異性

c.f. H. Lamb "Hydrodynamics" 6th ed. p.370

1. 境界条件と速度ポテンシャルの表現

n 層に別れて 12 密度は

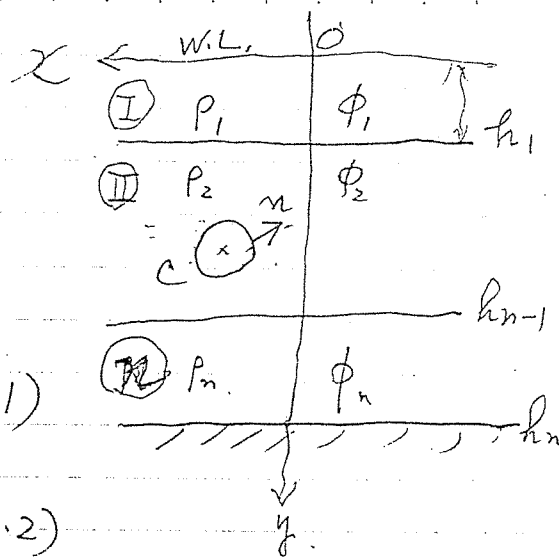
$$\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_n$$

境界条件は

$$K\phi_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y=0, (1.1)$$

$$(K = \omega^2 / g)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial y} = 0 \quad \text{for } y=h_n (1.2)$$



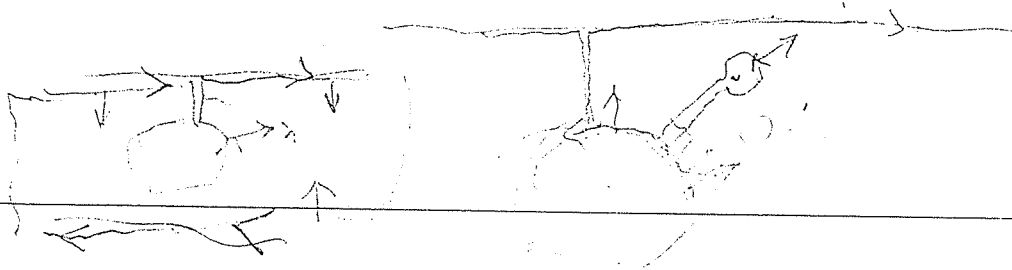
その他の境界条件では、圧力と法線速度が等しいとすると

$$\left. \begin{aligned} \rho_i (K + \frac{\partial}{\partial y}) \phi_i &= \rho_{i+1} (K + \frac{\partial}{\partial y}) \phi_{i+1} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} &= \frac{\partial \phi_{i+1}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{for } y=h_i, (1.3) \\ &(i=1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

今各層毎に ϕ_i なるポテンシャルを考えているので、これは又一つの ϕ なるポテンシャルの各層における値と言ってもよい。

今 j 番目の層内に物体 C があるとし ρ での核密度を $S_j(P, Q)$ のように定義しよう。

グリーンンの定理によつて



No.

2

Date

$$\phi_j(Q) = - \int_C \left(\phi_j(P) \frac{\partial}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi_j}{\partial n} \right) S_j(P, Q) dS_P$$

$$+ \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx$$

$$+ \int_{y=h_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx, \quad (1.4)$$

(1.3)より

$$\int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx = \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - S_{j-1} \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) dx$$

$$= \frac{1}{K} \left[\left(K \phi_j + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - \left(K S_{j-1} + \frac{\partial S_{j-1}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right] dx$$

$$= \frac{P_{j-1}}{K P_j} \int_{y=h_{j-1}} \left[\left(K \phi_{j-1} + \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - \left(K S_{j-1} + \frac{\partial S_{j-1}}{\partial y} \right) \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right] dx$$

$$= \frac{P_{j-1}}{P_j} \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} S_{j-1} - S_{j-1} \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) dx, \quad (1.5)$$

同様にして

$$\phi_j(Q) = \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j(P, Q) dS_P$$

$$+ \frac{P_{j-1}}{P_j} \int_{y=h_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1}(P, Q) dx_P$$

$$+ \int_{y=h_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx, \quad (1.6)$$

同様にして その他の層には 物質本 かなり とすると

$$\phi_{j-1}(Q) = \int_{y=h_{j-2}}^{\phi_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx$$

$$+ \int_{y=h_{j-1}}^{\phi_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx$$

$$= \frac{p_{j-2}}{p_{j-1}} \int_{y=h_{j-2}}^{\phi_{j-2}} \left(\phi_{j-2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-2}}{\partial y} \right) S_{j-2} dx$$

$$+ \int_{y=h_{j-1}}^{\phi_{j-1}} \left(\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y} \right) S_{j-1} dx, \quad (1.7)$$

$$\phi_{j+1}(Q) = \frac{p_j}{p_{j+1}} \int_{y=h_j}^{\phi_j} \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) S_j dx$$

$$+ \int_{y=h_{j+1}}^{\phi_{j+1}} \left(\phi_{j+1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j+1}}{\partial y} \right) S_{j+1} dx, \quad (1.8)$$

ここで 最下層では (1.2) より

$$\phi_n(Q) = \frac{p_{n-1}}{p_n} \int_{y=h_{n-1}}^{\phi_{n-1}} \left(\phi_{n-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial y} \right) S_{n-1} dx, \quad (1.9)$$

又 最上層では

1

$$\phi_1(\alpha) = \int_{y=h_1} (\phi_1 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) S_1 dx, \quad \dots \quad (1.10)$$

つまり ϕ_i は i 層以外では 0 と仮定するから 順次

$$\phi_2(\alpha) = \frac{p_1}{p_2} \int_{y=h_1} (\phi_1 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) S_1 dx$$

$$+ \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx = 0 \quad \text{for } \alpha \in (I)$$

$$\therefore \phi_1(\alpha) = - \frac{p_2}{p_1} \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx, \quad \dots \quad (1.11)$$

$$= \frac{p_3}{p_1} \int_{y=h_3} (\phi_3 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_3}{\partial y}) S_3 dx, \quad \dots$$

$$\times \quad \phi_2(\alpha) = \int_{y=h_2} (\phi_2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) S_2 dx, \quad \alpha \in (II) \quad (1.12)$$

$$\therefore \phi_{j-1}(\alpha) = \int_{y=h_{j-1}} (\phi_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial y}) S_{j-1} dx, \quad \alpha \in (j-1) \quad (1.13)$$

$$\therefore \phi_j(\alpha) = \int_C (\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n}) S_j ds$$

$$+ \int_{y=h_j} (\phi_j \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y}) S_j dx, \quad (1.14)$$

$$\phi_{j+1}(Q) = -\frac{P_j}{P_{j+1}} \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dS$$

$$+ \int_{y=h_{j+1}} \left(\phi_{j+1} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \phi_{j+1} \right) S_{j+1} dx, \quad (1.15)$$

一方 ϕ_n から出発するとやはり同じようになつて
結局

$$\phi_j(Q) = \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dx, \quad Q \in \textcircled{j} \quad (1.16)$$

$$\phi_i(Q) = (-1)^{i-j} \frac{P_j}{P_i} \int_C \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) S_j dx, \quad Q \notin \textcircled{j} \quad (1.17)$$

2. 相反定理

今2つの速度ポテンシャル $\phi^{(1)}$ と $\phi^{(2)}$ を考えて

次の双一次形式を導くように。

$$L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = \frac{1}{2} \iint_D \rho \nabla \phi^{(1)} \nabla \phi^{(2)} dx dy - \frac{\rho}{2} \int_{y=0}^2 \phi^{(1)} \phi^{(2)} dx, \quad (2.1)$$

明らかに相反性

$$L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) = L(\phi^{(2)}, \phi^{(1)}), \quad (2.2)$$

が成立つ。

さて グリーンの定理により

$$\begin{aligned} L(\phi^{(1)}, \phi^{(2)}) &= \frac{1}{2} \int_C \rho \phi^{(1)} \frac{\partial}{\partial n} \phi^{(2)} ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \int_{y=h_j}^{y=h_{j+1}} \left[\rho \phi_j^{(1)} \frac{\partial}{\partial y} \phi_j^{(2)} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(1)} \frac{\partial}{\partial y} \phi_{j+1}^{(2)} \right] dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

右辺の256の積分は (1.3) により

$$\begin{aligned} \int (\rho_j \phi_j^{(1)} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(1)}) \frac{\partial}{\partial y} \phi_j^{(2)} dx &= \left(\frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{K} \right) \int \frac{\partial}{\partial y} \phi_j^{(1)} \frac{\partial}{\partial y} \phi_j^{(2)} dx \\ &= \int_{y=h_j} (\rho_j \phi_j^{(2)} - \rho_{j+1} \phi_{j+1}^{(2)}) \frac{\partial}{\partial y} \phi_j^{(1)} dx, \quad (2.4) \end{aligned}$$

よって (2.2) は

$$\int_C \rho \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial n} ds = \int_C \rho \phi^{(2)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} ds, \quad (2.5)$$

前節の表現をこの定理から出発すれば容易に導ける。

又この定理の応用はこの理篇でよく知られている。

例えば

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)}(Q) &\equiv S(P, Q) \\ P^{(2)}(Q) &\equiv S'(Q, P) \end{aligned} \right\} Q \in \textcircled{A}, P \in \textcircled{B}$$

とし、夫々 P, Q の周りの小円上に積分すると、

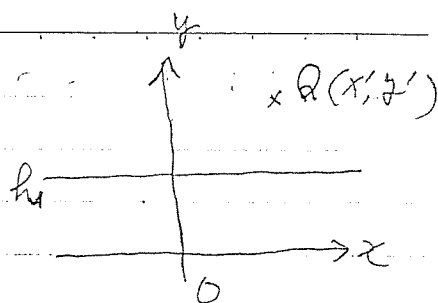
$$P(P) S(P, Q) = P(Q) S(Q, P), \quad (2.6)$$

3. 基本特性

最も簡単な場合として無限水深

で 2 層の場合を考えよう。

特異点が 2 層にあるとしよう。



$$\log R = - \int_0^{\infty} e^{-k|y'-y|} \cos k\zeta \frac{dk}{k}, \quad (3.1)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad \zeta = x - x'.$$

右辺の積分は収束しないが、運算の本質には関係ない。
のび簡単のためにこうしておく。

2 のとき 2 次の変換が成立しよう。

$$2\pi S_2(p, Q) = \log R + \int_0^{\infty} H(k) e^{-k(y-h)} \cos k\zeta dk, \quad y' > y > h, \quad (3.2)$$

$$2\pi S_1(p, Q) = \int_0^{\infty} G(k) e^{-k(y-h)} \cos k\zeta dk + \int_0^{\infty} I(k) e^{-ky} \cos k\zeta dk, \quad \text{for } h > y > 0, \quad (3.3)$$

$y=0$ の条件から

$$H(k) = \frac{k+K}{k-K} e^{-kh} G(k), \quad (3.4)$$

$k=K$ の時の留数は 1/2 以外に出でなくように定める。

したがって $y = h e^{ikx}$

$$\begin{aligned} 2\pi S_1 &= \int_0^\infty G e^{ik(y-h)} \cos kx dk + \int_0^\infty \frac{K+K}{K-K} e^{-k(y+h)} G \cos kx dk, \\ 2\pi S_2 &= - \int_0^\infty e^{-k(y'-y)} \cos kx \frac{dk}{k} + \int_0^\infty F e^{-k(y-h)} \cos kx dk, \end{aligned} \quad (3.5)$$

これから (1.3) より

$$\left(1 - \frac{K+K}{K-K} e^{-2kh}\right) G = - \frac{e^{-k\eta}}{k} = F, \quad (3.5)$$

$$\eta = y' - h.$$

又

$$2\pi \left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) S_1 \Big|_{y=h} = \int_0^\infty (K+k) (1 - e^{-2kh}) G \cos kx dk,$$

$$2\pi \left(K + \frac{\partial}{\partial y}\right) S_2 \Big|_{y=h} = - \int_0^\infty \frac{K+k}{k} e^{-k\eta} \cos kx dk + \int_0^\infty (K-k) F \cos kx dk$$

$$\therefore \sigma (K+k) (1 - e^{-2kh}) G = - \frac{K+k}{k} e^{-k\eta} + (K-k) F, \quad (3.6)$$

$$(\sigma = P_1/P_2)$$

(3.5) と (3.6) より

$$\begin{aligned} aF + bG &= p \\ -aF + cG &= q \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} a &= K-k, \quad p = - \frac{K-k}{k} e^{-k\eta} \\ b &= K-k + (K+k) e^{-2kh} \\ c &= \sigma (K+k) (1 - e^{-2kh}) \\ q &= - \frac{K+k}{k} e^{-k\eta} \end{aligned} \right.$$

$$F = \frac{1}{a(b+c)}(pC - qa) = \frac{1}{b+c} \left(p \frac{C}{a} - \frac{a}{a} q \right) \quad \left\{ (3.7) \right.$$

$$G = \frac{p+q}{b+c}$$

$$\Delta \equiv b+c = 2e^{-\frac{1}{2}kh} \left[K(\coth kh + \sigma \sinh kh) - k(1-\sigma) \sinh kh \right]$$

$$p+q = -\frac{2K}{R} e^{-\frac{1}{2}kh}$$

$$p \frac{C}{a} - \frac{q}{a} = -\frac{e^{-\frac{1}{2}kh}}{R} \sigma (K+k)(1-e^{-2kh}) + \frac{Kk}{R} e^{-\frac{1}{2}kh} \left(1 + \frac{K+k}{K-k} e^{-2kh} \right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}kh}}{R} \left(\frac{K+k}{K-k} \right) \left[K-k + (K+k)e^{-2kh} - \sigma(K-k)(1-e^{-2kh}) \right]$$

$$= \frac{2}{R} \left(\frac{K+k}{K-k} \right) e^{-\frac{1}{2}kh} \left[K(\coth kh - \sigma \sinh kh) - k(1-\sigma) \sinh kh \right]$$

--- (3.8)

2.12 Δ は実軸上に 2 点を有し、それは

$$k = \frac{K}{1-\sigma} [\sigma + \coth kh] \quad , \quad \dots (3.9)$$

で与えられ、 $\sigma \leq 1$ ならば (これは明らかに小さくはないはず)

$$k \geq \frac{1+\sigma}{1-\sigma} K \quad , \quad \dots (3.10)$$

k -plane 上の零点は $\sigma \rightarrow 0$ の極限では

$$k = K \coth kh \quad , \quad \dots (3.11)$$

つまり $y=h$ から円筒壁の厚のそれに一致して虚軸

上に simple な zero pt. が並んでいて、今のところ
も π の近くに並んでいる。

また F, G は

$$\left. \begin{aligned} F(k) &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \frac{1}{k} e^{-k(y-h)} \\ G(k) &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{} -\frac{1}{k} e^{-k(y'-h)} \\ H(k) &\xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \frac{1}{k} e^{-k(y'-h)} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

なる F 数部分を $\frac{1}{k}$ の $\frac{1}{k}$ を外に出しておく

$$2\pi S_2 = \log \sqrt{\frac{z^2 + (y-y')^2}{z^2 + (y+y'-2h)^2}} + \int_0^\infty F' e^{-k(y-h)} \cos k z \, dk, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} 2\pi S_1 &= \log \sqrt{\frac{z^2 + (y-y')^2}{z^2 + (y+y'-h)^2}} \\ &+ \int_0^\infty G' e^{-k(y'-h)} \cos k z \, dk + \int_0^\infty H' e^{-k y'} \cos k z \, dk, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} F' &= F - \frac{1}{k} e^{-k y} \\ G' &= G + \frac{e^{-k y}}{k} \\ H' &= H - \frac{e^{-k y}}{k} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

特異点 層 1 にある時は.

$$2\pi S_2 = \int_0^\infty \bar{F}(k) e^{-k(y-h)} \cos k z dk, \text{ for } y > h \quad (3.16)$$

$$2\pi S_1 = h_y R + \int_0^\infty G e^{k(y-h)} \cos k z dz + \int_0^\infty H e^{-k y} \cos k z dz, \quad (3.17)$$

$h > y > 0$

7" (3.1) を $\frac{y}{h} \rightarrow 1$ とする

$$\left. \begin{aligned} 2\pi S_1 &= - \int_0^\infty \frac{e}{k} \cos k z dk + 2\pi S_1^*, \text{ for } y > y' \\ &= - \int_0^\infty \frac{e}{k} \cos k z dk + 2\pi S_1^*, \text{ for } y > y \end{aligned} \right\} (3.18)$$

2, 12 S_1^* は (3.17) の右辺 の 2, 3 項 を示す。

$y=0$ の条件から

$$- \frac{(K+h)}{h} e^{-k y'} + (K+h) G e^{-k h} + (K-h) H = 0$$

$$H = - \frac{(K+h)}{(K-h)} \left(\frac{e}{k} - G e^{-k h} \right), \quad (3.19)$$

$y=h$ では

$$\begin{aligned} -\bar{H} &= + \frac{e}{k} e^{k(y-h)} + G - H e^{-k h} \\ &= \frac{e}{k} - \frac{e}{k} \frac{K+h}{K-h} + G \left(1 + \frac{K+h}{K-h} e^{-k h} \right), \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma}(K-k)F = -\frac{K-k}{k}e^{-k(h-y')} + (K+k)G + (K-k)He^{-kh}$$

$$\frac{F}{\sigma} = -\frac{e^{-k(h-y')}}{k} + \frac{K+k}{K-k}G + \frac{K+k}{K-k}\left(\frac{e^{-kh}}{k} - Ge^{-kh}\right)e^{-kh}$$

$$= -\frac{e^{-k(h-y')}}{k} + \frac{K+k}{k(K-k)}e^{-k(y'+h)} + \frac{K+k}{K-k}G(1-e^{-2kh})$$

$$A = -\frac{e^{-k(h-y')}}{k} + \frac{K+k}{k(K-k)}e^{-k(y'+h)} \quad \dots (3.21)$$

$$\dots (3.22)$$

よおす

$$-F = -A + G\left(1 + \frac{K+k}{K-k}e^{-2kh}\right)$$

$$F = \sigma A + \sigma G\left(\frac{K+k}{K-k}\right)(1-e^{-2kh})$$

$$\therefore F = -A + \frac{k}{a}G \quad \left. \begin{array}{l} aF + kG = A \\ F = \sigma A + \frac{c}{a}G \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -aF + cG = -\sigma A \end{array} \right\}$$

$$F = \sigma A + \frac{c}{a}G$$

$$F = \frac{1}{k+c}\left(\frac{Ac}{a} + \frac{k\sigma A}{a}\right) = \frac{c+\sigma k}{(k+c)a}A = \frac{2K\sigma A}{(k+c)(K-k)}$$

$$G = \frac{(1-\sigma)}{k+c}A$$

$$(3.23)$$

$$\frac{c}{a} + \sigma \frac{k}{a} = \frac{\sigma}{a} \left[(K+k)(1-e^{-2kh}) + (K-k) + (K+k)e^{-2kh} \right]$$

$$= \frac{\sigma}{a} [2K] -$$

一般に 特異点のない層に於ては

$$\phi_i = \int_0^\infty (G_i e^{k(y-h_i)} + H_i e^{k(h_{i+1}-y)}) \cos k z dk, \quad (3.24)$$

それ故 $y=h_i$ における条件は

$$\begin{aligned} f_i [(K+k)G_i + (K-k)H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)}] \\ = p_{i+1} [(K+k)G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})} + (K-k)H_{i+1}], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$G_i - H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} = G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})} - H_{i+1}, \quad (3.26)$$

2式から G_{i+1} を消去すると

$$\begin{aligned} (p_i - p_{i+1})(K+k)G_i + [p_i(K-k) + p_{i+1}(K+k)]H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} \\ = 2Kp_{i+1}H_{i+1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

H_{i+1} を消去すると

$$\begin{aligned} \{p_i(K+k) + p_{i+1}(K-k)\}G_i + (p_i - p_{i+1})(K-k)H_i e^{k(h_{i+1}-h_i)} \\ = 2Kp_{i+1}G_{i+1} e^{k(h_i-h_{i+1})}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

これ故

$$\begin{aligned} G_{i+1} &= a_i G_i + b_i H_i \\ H_{i+1} &= c_i G_i + d_i H_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$a_i = \frac{e^{k(h_{i+1}-h_i)}}{2Kp_{i+1}} \{p_i(K+k) + p_{i+1}(K-k)\}, \quad b_i = \frac{p_i - p_{i+1}}{2Kp_{i+1}} e^{k(h_i-h_{i+1})} (K-k)$$

$$c_i = \frac{p_i - p_{i+1}}{2Kp_{i+1}} (K+k), \quad d_i = \frac{e^{k(h_i-h_{i+1})}}{2Kp_{i+1}} [p_i(K-k) + p_{i+1}(K+k)] \quad (3.30)$$

と第 k と 順次 下層の値が計算出来る。

特に水面では

$$(K+k)G_1 e^{-k h_1} + (K-k)H_1 = 0 \quad (3.29)$$

質量点のある層 j では

$$\phi_j = G_j R + \int_0^\infty [G_j' e^{-k(y-h_j)} + H_j' e^{k(h_{j-1}-y)}] \cos k z dz \quad (3.30)$$

と表す、よ

$$G_j R = - \int_0^\infty e^{-k(y-y')} \frac{\cosh k z}{k} dz \quad \text{for } y > y'$$

$$- \int_0^\infty e^{k(y'-y)} \frac{\cosh k z}{k} dz \quad \text{for } y > y'$$

これから (3.24) の形に書くと $y = h_{j-1}$ と h_j で G, H は

異なる関数となる。

そこで

$$\phi_j = \int_0^\infty (G_j^- e^{-k(y-h_j)} + H_j^- e^{k(h_{j-1}-y)}) \cos k z dz \quad \text{for } y = h_{j-1}$$

$$= \int_0^\infty (G_j^+ e^{-k(y-h_j)} + H_j^+ e^{k(h_{j-1}-y)}) \cos k z dk \quad \text{for } y = h_j \quad (3.31)$$

と表すと

$$G_j^- = G_j', \quad H_j^- = H_j' - \frac{e^{-k(h'-h_{j-1})}}{k}$$

$$G_j^+ = G_j' - \frac{e^{k(h'-h_j)}}{k}, \quad H_j^+ = H_j' \quad (3.32)$$

(3.29) は $\tilde{G}_j$ の $\tilde{H}_j$ で

$$\left. \begin{aligned} \tilde{G}_j &= a_j \tilde{G}_{j-1} + b_j \tilde{H}_{j-1} \\ \tilde{H}_j &= c_j \tilde{G}_{j-1} + d_j \tilde{H}_{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{j+1} &= a_j G_j^+ + b_j H_j^+ \\ H_{j+1} &= c_j G_j^+ + d_j H_j^+ \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} G_{j+1} &= a_j \tilde{G}_j + b_j \tilde{H}_j - \frac{a_j}{k} e^{k(y - \tilde{G}_j)} + \frac{b_j}{k} e^{k(\tilde{H}_j - y)} \\ H_{j+1} &= c_j \tilde{G}_j + d_j \tilde{H}_j - \frac{c_j}{k} e^{k(y - \tilde{G}_j)} + \frac{d_j}{k} e^{k(\tilde{H}_j - y)} \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

のよりに続けられ、 $\frac{R}{k}$ 後に、水府では、

$$G_n = H_n e^{k(h_{n-1} - h_n)} \quad (3.35)$$

よって $H_1 = \alpha G_1$, $\alpha = \frac{k+K}{k-K} e^{-k h_1}$, (3.36)

よって

$$\left. \begin{aligned} G_2 &= (a_1 + \alpha b_1) G_1 \equiv A_1 G_1 \\ H_2 &= (c_1 + \alpha d_1) G_1 \equiv B_1 G_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} G_3 &= a_2 A_1 G_1 + b_2 B_1 G_1 \equiv A_2 G_1 \\ H_3 &= c_2 A_1 G_1 + d_2 B_1 G_1 \equiv B_2 G_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

$$G_j^- = A_{j-1} G_1, \quad H_j^- = B_{j-1} G_1$$

$$G_j^+ = -\frac{e^{k(l_j' - l_j)}}{R} + A_{j-1} G_1, \quad H_j^+ = \frac{e^{k(l_j' - l_j)}}{R} + B_{j-1} G_1 \quad (3.39)$$

$$G_{j+1} = D_j + A_j G_1, \quad H_{j+1} = E_j + B_j G_1$$

$$D_j = -\frac{a_j}{R} e^{k(l_j' - l_j)} + \frac{b_j}{R} e^{-k(l_j' - l_{j-1})}$$

$$E_j = c_j \quad d_j$$

$$G_{j+2} = D_{j+1} + A_{j+1} G_1, \quad H_{j+2} = E_{j+1} + B_{j+1} G_1$$

$$D_{j+1} = a_{j+1} D_j + b_{j+1} E_j, \quad E_{j+1} = c_{j+1} D_j + d_{j+1} E_j$$

$$G_n = D_{n-1} + A_{n-1} G_1, \quad H_n = E_{n-1} + B_{n-1} G_1$$

(3.35) (c & d)

$$D_{n-1} + A_{n-1} G_1 = \{E_{n-1} + B_{n-1} G_1\} e^{\frac{1}{2}k(l_{n-1} - l_n)}$$

$$G_1 = \frac{E_{n-1} e^{\frac{1}{2}k(l_{n-1} - l_n)} - D_{n-1}}{A_{n-1} - B_{n-1} e^{\frac{1}{2}k(l_{n-1} - l_n)}} \quad (3.40)$$

$$a_1 = \frac{e^{k(h_2 - h_1)}}{2kP_2} \{ P_1(K+h_1) + P_2(K-h_1) \}$$

$$b_1 = \frac{P_1 - P_2}{2kP_2} e^{k(h_2 - 2h_1)} (K-h_1), \quad c_1 = \frac{P_1 - P_2}{2kP_2} (K+h_1)$$

$$d_1 = \frac{e^{-kh_1}}{2kP_2} [P_1(K-h_1) + P_2(K+h_1)]$$

$$A_1 = a_1 + \alpha b_1 = \frac{e^{k(h_2 - h_1)}}{2kP_2} [P_1(K+h_1) + P_2(K-h_1) - (P_1 - P_2)(K+h_1) e^{-2kh_1}]$$

$$B_1 = c_1 + \alpha d_1 = \frac{1}{2kP_2} \left[(P_1 - P_2)(K-h_1) + \frac{(K+h_1)}{K-h_1} e^{-2kh_1} [P_1(K-h_1) + P_2(K+h_1)] \right]$$

$$= \frac{(K+h_1)}{2kP_2(K-h_1)} \left[(P_1 - P_2)(K-h_1) - e^{-2kh_1} [P_1(K-h_1) + P_2(K+h_1)] \right]$$

$$G_2 = A_1 G_1, \quad H_2 = B_1 G_1$$

$$G_2 = H_2 e^{k(h_1 - h_2)}$$

$$A_1 G_1 = B_1 G_1 e^{k(h_1 - h_2)}$$

$$A_1 e^{k(h_2 - h_1)} = B_1 e^{2k(h_2 - h_1)} [P_1(K+h_1) + P_2(K-h_1) + (P_2 - P_1)(K+h_1) e^{-2kh_1}]$$

$$+ \frac{K+h_1}{K-h_1} [(P_2 - P_1)(K-h_1) + e^{-2kh_1} [P_1(K-h_1) + P_2(K+h_1)]]$$

$$A_1 = 0 \quad \sigma(K+h_1) + K-h_1 + (1-\sigma)(K+h_1) e^{-2kh_1} = 0$$

$$K \{ (1+\sigma) + (1-\sigma) e^{-2kh_1} \} + h_2(1-\sigma)(e^{-2kh_1} - 1) = 0$$

$$2K \{ \sigma h_2 e^{2kh_1} + \sigma e^{2kh_2} h_2 h_1 \} - 2h_2(1-\sigma) e^{2kh_1} = 0$$

$$K \{ \sigma + \sigma h_2 e^{2kh_1} \} = h_2(1-\sigma)$$