

G

11-95-1

1980-I-05

(52-3-1)

翼理論に関する覚書

別所正利

A Short Note on Wing Theory

(Lagrangian and Arbitrariness of Solution)

by Masatoshi Bessho

June 27, 1980

翼理論に関する覚書

別所公利

"A Short Note on Wing Theory"

(Lagrangian and Arbitrariness of Solution)

By Masatoshi Bessho

内容目次

概要	頁 1
1. 相反定理とラグランジアン	2
2. 速度ポテンシャルと漸近展開	6
3. 解の任意性	8
結論	12
参考文献	13/13

概要

水の波の理論は先行した翼理論に多くのものを負っている事は周知の通りであり、今尚我々が新しい問題に取り組む時に殆ど唯一の範例である。

いかながう船には船特有の事情があって飛行機の翼理論をそのまま適用するのは必ずしも適当でない場合がある。

本文はこのような過程でこの数年の間に著者が気づいた事を記して見たものである。

まず 1 節では翼理論における相反定理について、従来使われている H. L. A. の変分原理に基づくもの以外に花岡が造波抵抗理論について導出した第 2 定理を紹介し、その汎関数は運動ポテンシヤル又はラグランジアンである事を説明する。

次に 2 節では造波理論的な記述で翼理論を表現し、3 節では境界値問題の積分方程式を少し変形してその任意性について考察する。

1. 相反定理と Lagrangean

Helmholtz の変分原理は次の相反定理 (Munk's) から導かれる。

$$\iint_F p_1 \tilde{w}_2 dF = \iint_F \tilde{p}_2 w_1 dF, \quad \dots (1.1)^{(4)}$$

ここに F は翼面, dF はその面積, $(p_1, w_1), (\tilde{p}_2, \tilde{w}_2)$ はそれぞれ圧力と x -方向速度で $(\sim)$ 印は逆流れの量である事を示す。

花岡は流体力学理論において上式に対応するものを冲1定理と称し, もう一つの冲2定理を導出している。³⁾

$$\iint_F \Delta \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial z} dF = \iint_F \Delta \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} dF, \quad \dots (1.2)$$

ここに ϕ_i は速度ポテンシャルで $\Delta \phi$ は F の上下の差を意味する。

これは F が薄翼でなれば次のようになる。

$$\int_S \phi_1 \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial n} dS = \int_S \tilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS, \quad \dots (1.3)$$

2.12 n は面 S の法線とする。

一方 (1.1) は薄翼でなければ成立せず,³⁾ またクッタの条件を満たす流れでなければならぬ。

しかし (1.2), (1.3) ではその必要がないので一般性があ
る。

さて薄翼理論では更に、

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial z} dx = \zeta(x, y, z), \quad (1.4)$$

なる量、つまり流体粒子の z 方向変位を導入
すると (1.2) は次のように書ける。

$$\iint_H p_1 \zeta_2 dF = \iint_H p_2 \zeta_1 dF, \quad (1.5)$$

これは Munk の定理と同様に有用である。⁸⁾

しかし (1.1) は誘導抵抗を意味するのに対して (1.2), (1.3)

又は (1.5) は物理的意味が判然としない。

一方流体力学理論では (1.3) はラグランジアンつまり運動
エネルギーとポテンシャルエネルギーの差である事が
わかって⁹⁾いるので翼理論でもそうになっていると考えられる
がこの場合のポテンシャルエネルギーとは何であろうか。

さてこの点を考える前に (1.2) の形で二次の積分を
考えよう。

$$L = \frac{\rho}{2} \iint_H \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \quad \dots (1.6)$$

翼面 Γ とその後方にはそれに連続して Trefftz 面 T を考え
又 充分大きい H, T を包む球面 R との間に包まれた
領域を D とすると グリーンの定理により

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz - \frac{\rho}{2} \iint_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF + \frac{\rho}{2} \iint_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial R} dR, \dots$$

となるが (2.6)(2.7) により 右辺 2 項の積分は 0 と
なるので結局

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz - \frac{\rho}{2} \iint_T \Delta \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} dF, \dots (1.7)$$

右辺 1 項は 明らかに 運動エネルギー であり, 2 項
は Trefftz 面の 運動エネルギー を流れ方向に積分したもので
あり 両者共に 無限大となるが その差は有限となつて
いる。

これは又 圧力を積分しても 同じ 開きになり ラグランジュ
である事が 古くから示されている。

従つて (1.7) 右辺 2 項は ポテンシャルエネルギー
に対応している事になるが この辺を 理解する 爲に
又 次で 考えて見よう。

今原点に Γ のサーキュレーションをおき、それから x 離れた点に
強さは同じで向きが反対の渦をおくと相互引力 F は

$$F = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi x}, \quad \dots \quad (1.8).$$

相互距離 a なる点から一方の渦を R なる距離まで
準静的的に引きはなすに必要の仕事 U は

$$U = \int_a^R F dx = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{a}\right), \quad (1.9)$$

これは定義からポテンシャル・エネルギーである。

一方 R が充分大きい時の渦に及ぶ運動エネルギーは
 $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = \frac{\rho}{2} \int_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds - \frac{\rho}{2} \int_E \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds \\ &\quad - \frac{\rho}{2} \int_T \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} dr, \end{aligned}$$

ここに R は充分大きい円、 E は原点周りの小さい円、
 T は適当な cut とする。

明らかに右辺第1, 2項は 0 となるから2つの渦の
運動エネルギーは

$$T = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \log\left(\frac{R}{a}\right), \quad \dots \quad (1.10)$$

それ故 2 の場合は

$$T - U = 0, \quad \dots \quad (1.11)$$

一般には有限となつて (1.3) の形になる。

またこの誘導の過程から考えると吹出しが存在する場合も同様で最初有限な所に吸込みを考えそれを準静的に無限遠^方まで持つて行く仕事は位置エネルギーである。

2. 速度ポテンシャルと漸近展開

この節では普通に知られている Trefftz 面つまり充分後流側の速度ポテンシャルの近似値と共に充分上流側の値の近似値を求める。

さて速度ポテンシャルは²⁾

$$\phi(x, y, z) = \iint_H p(x', y') S(x-x', y-y', z) d\Gamma(x', y'), \quad (2.1)$$

こゝに p は圧力分布を ρU^2 で割ったものとし以下速度は単位と考える。

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi\rho^2} \left(\frac{x}{r} - 1 \right) = \frac{z}{2\pi r(1+x)}, \quad (2.2)$$

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

充分遠方では

$$S(x-x', y-y', z) \longrightarrow S(x, y-y', z) + x \frac{\partial}{\partial x} S(x, y-y', z) + \dots \quad (2.3)$$

のようになるので 1項のみとると上流側では

$$S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi r(r+x)} \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi r^2} \text{ or } \frac{z}{4\pi x^2}, \quad (2.4)$$

下流側では

$$S(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi r^2} \left(1 + \frac{|x|}{r}\right) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{z}{\pi r^2} - \frac{z}{4\pi x^2}, \dots \quad (2.5)$$

よって (2.4) を (2.1) に代入して

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{4\pi x^2} \iint_H p dH + \dots \quad (2.6)$$

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{z}{\pi} \iint_H \frac{p(x', y') dH}{z^2 + (y-y')^2} - \frac{z}{4\pi x^2} \iint_H p dH + \dots \quad (2.7)$$

言うまでもなく (2.7) の第1項は Trefftz plane の速度ポテンシャルで 2項は (2.6) より上流側の値と符号が逆になっておりこれは揚力に比例する。

またこれらの式は $r \equiv x$ と仮定したからそうであるが (2.2), (2.4) から もっと正確に算出する事が出来る事は自明だろう。

3. 解の任意性

よく知られているように境界条件は次の積分方程式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = w(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint_F \frac{p(x', y')}{(y-y')^2} \left[\frac{x-x'}{R} - 1 \right] dx' dy', \quad (3.1)$$

この解は翼後端においてクッタの条件を満たす時に一意的に定まると考えられている。

しかし本来渦のある流れは厳密さを考えない限り不定であって数学的には決められず物理的に最もよいと思われる数学モデルがあるだけである。

又実際 例えは“矩形翼などで”後端で Kutta の条件を満たすのは当然として翼立端はどうなるのか あるいはどうなっているのかは一つの疑問点である。

その辺を考えるために上式を少し変形に解の任意性がどれくらいあるかを調べて見よう。

その為には上式を x で微分したものを考えよう。

$$\frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_F \frac{p dF}{r}, \quad (3.2)$$

ϕ はラプラス方程式を満たすから上式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, 0) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{1}{2\pi} \iint_{\Pi} \frac{p}{R} dx' dy', \quad \dots (3.3)$$

あらためて

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\Pi} \frac{p}{R} dF = f(x, y), \quad \dots (3.4)$$

として f を 未知関数とすると (3.3) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) = - \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, 0), \quad (3.5)$$

となってポアソンの微分方程式となる。

それ故 解は 特解 $a(x, y)$ と ^(任意の) 調和関数 $h(x, y)$ となる。

$$f(x, y) = a(x, y) + h(x, y), \quad \dots (3.6)$$

これを (3.4) の右辺に代入すると 準特異核を持つ積分方程式となり 教科書によれば 解 p は一意的に定まる。

従って 解の任意性は (3.6) の調和関数に依存し それは Π 内で級数展開すると考えると 可附番無限個だけある。

さて もう少し 具体的に 境界条件を考えよう。

簡潔のために

$$w(x, y, 0) = \alpha + \beta x, \quad (3.7)$$

とおくと視察によつて特解 a を

$$a(x, y) = \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 \quad (3.8)$$

と置いておこう。右辺第1項は(3.5)からは決まらないけれども、^{調和関数で}こうあつても不都合はないだろう。

これに対する(3.4)の解は αx に対しては ρ は前後対称 (以下 F は前後対称量とする), $\frac{\beta}{2} x^2$ に対しては前後対称となりこれらは共に渦なし流れであると考えられ当然前後端で無限大となつてゐるだろう。

それ故クツタの条件を満たす為には(3.6)の調和関数に対応する ρ の解を利用せざるを得ない。つまり具体的に後縁の N 個の点でクツタの条件を満たすには N 個の解が必要である。それではこの解を一併用ゑて前縁でも流入条件を満たす (Shock-free) 事が出来るかと言つて対称量で考えればわかるようにそれは $\alpha=0$ の場合しかないだろう。

以上の考察から少なくとも対称翼では後縁全体でクッタの条件を満たす事が出来ると考えられる。

従って最初に考えた矩形翼では翼端¹²についても少なくとも後半部¹³についてはクッタの条件を指定してよいと考えられる。

さて最後に積分方程式(3.4)は(3.1)に比して特異性が弱いので数値計算上都合がよいと考えられまた一方近似理論を作るにも都合が良いと考えられる。

今例として細長翼理論をとりあげよう。

まず翼幅方向に楕円分布を仮定すれば

$$p(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\eta^2(x) - y^2} \ell(x) / \eta^2(x); \dots (3.9)$$

(3.4)の左辺は

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{\ell(x') dx'}{\eta^2(x')} \int_{\eta(x')}^{\eta(x')} \frac{\sqrt{\eta^2 - y'^2} dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = a + b; \dots (3.10)$$

y' に關する積分は $y=0$ とおくと完全楕円積分となり $x=x'$ で対数的特異性を有するのを見積りについては一案を示した事がある。¹⁰⁾

(3.4)の右辺の任意関数 $\ell(x, y)$ は左右対称性が

$$h(x, y) = 1, x, x^2 y^2, \dots \quad (3.11)$$

であつて、 $y=0$ の付近では x の巾級数としてよい。

しかもそれは任意でよいので解は決まらなくなる。

これは (3.9) のように圧力分布を仮定ししかも中心線上でのみ境界条件を指定した所爲でこの場合は (3.11) の $x^2 y^2$ までとすべきである。

つまり y 方向の揚力分布形に応じて (3.11) の項数を増やしておけばよい事になる。

結論

以上薄翼理論においても花岡の x^2 相反定理は有用であり得る、特にクッタの条件を満たさないものにも適用出来る点で、事 其の積分はラグランジアンである事を示し次に遠場特に上流側の漸近展開を求め最後に境界積分方程式を変形して解の任意性を陽にあらわし、クッタの条件の指定範囲について考察した。

参考文献

- 1) R. Hargreaves, "A Pressure Integral as Kinetic Potential" *Phil. Mag.* 1907, pp. 436~445
- 2) H. Ashley & M. Landahl "Aerodynamics of Wings & Bodies" Addison-Wesley, 1965
- 3) T. Hanacka, "On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory," *Proc. 9th Japan Nat. Congress for Appl. Mech.*, 1957
- 4) D. E. Davies, "An Application of Filax's Variational Principle to Lifting Surface Theory," *R & M No 3564*, Apr. 1967
- 5) H. R. Lawrence, "The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds," *J. of Aeron. Sci.* Oct. 1951.
- 6) E. O. Tuck, "Some Method for Filom part blunt Slender Bodies," *J. F. M.* vol. 18, 1964
- 7) F. Ursell and G. N. Ward, "On some general theorems in linearized theory of compressible flow," *Q. J. M. A. M.* vol. 3, 1950
- 8) M. Bessho & K. Nomura, "A Contribution to the Theory of Two-dimensional Hydro-planing," *Mem. Def. Acad.* vol. 10, 1970
- 9) M. Bessho, "Variational Approaches to steady Ship Wave Problem," 8th Symp. on Naval Hydro. 1970
- 10) 別冊正利 "組長室組長体理論101例示算書" 水機委員会第2部会資料 昭和50年6月27日