

G

No.

Date

62.8.14

3次元振動翼理論に関する覚書

1. 速度ポテンシアル等の表現

2. 逆流ポテンシアル

3. 境界条件

5. 揚力理論

6. 旋翼理論

3.5. 相反定理

4. 仕事減衰, 推力

附録 A

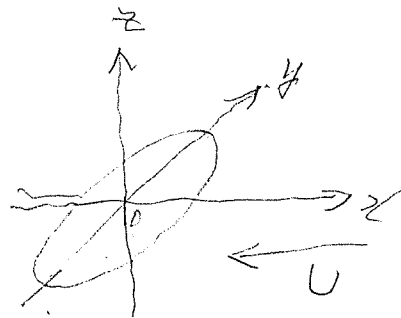
三. 97.8

1. 速度ポテンシャル等の表現

加減速度ポテンシャルを $\bar{\Phi}$,

速度ポテンシャルを ϕ とすると

$$\bar{\Phi}(x, y, z) = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, y, z), \quad (1.1)$$



あるいは $\phi(x, y, z) = \frac{e^{i\alpha x}}{U} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(x, y, z) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \alpha = \frac{\omega}{U}, \quad (1.2)$

望面の上で $\bar{\Phi}(x, y, -0) - \bar{\Phi}(x, y, +0) = \frac{p(x, y)}{\rho}, \quad (1.3)$

のように圧力差があるとする。

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{p(x', y') z dx' dy'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{p(x, y)}{2} \text{sgn}(z), \quad (1.4)$$

S は 望面 と する。

したがって

$$\bar{\Phi}(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi\rho} \iint_S \frac{p(x', y') z dx' dy'}{R^3}, \quad (1.5)$$

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2,$$

また

$$S(x, y, z) = \frac{-e^{i\alpha x}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha z'}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dz', \quad (1.6)$$

と おく と

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\rho U} \iint_S p(x', y') S(x-x', y-y', z) dx' dy', \quad (1.7)$$

さて

$$\frac{z}{R^3} = \frac{\rho g_1(z)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-k|z| + i k(x \cos \theta + y \sin \theta)}{e^{-k|z| + i k(x \cos \theta + y \sin \theta)}} dk d\theta, \quad (1.8)$$

2.8から (1.6) に代入して $\frac{\lambda(1-i\mu z)}{2\pi}$ と

$$S(x, y, z) = \frac{\rho g_1(z)}{2\pi \lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-k|z| + i k(x \cos \theta + y \sin \theta)}{k \cos \theta - \alpha + \mu i} dk d\theta, \quad (1.9)$$

2.12 μ は Rayleigh の無次元摩擦係数とす。

2.4152

$$S(x, y, z) = \frac{\rho g_1(z)}{8\pi \lambda^2 i} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|z|\sqrt{p^2 + q^2} + i(p x + q y)}}{p - \alpha + \mu i} dp dq, \quad (1.9')$$

2.4 条件より

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &\xrightarrow{x \gg 1} O\left(\frac{1}{R}\right), \\ &\xrightarrow{x \ll -1} + \frac{\rho g_1(z)}{2\pi} e^{i\alpha x} \int_0^{\infty} \frac{e^{-|z|\sqrt{\alpha^2 + q^2}}}{\cos \theta} dq, \end{aligned} \quad (1.10)$$

4.12 $z \rightarrow 0$ では 2.9 の式は

$$S \xrightarrow[x \ll -1]{z \rightarrow 0} + \frac{\rho g_1(z)}{2\pi} e^{i\alpha x} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin \lambda y}{\lambda} \right], \quad (1.10')$$

また (1.6) の右辺を 部分積分すると

$$S(x, y, z) = \frac{-z}{4\pi \omega^2} \left[\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} - 1 \right) + i\alpha e^{i\alpha x} \int_{\infty}^x e^{-i\alpha \xi} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \omega^2}} - 1 \right) d\xi \right], \quad (1.11)$$

$\omega^2 = y^2 + z^2,$

1.1

$$\int_{+\infty}^x \frac{d\xi}{(\omega^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}} - 1 \right),$$

$$S = S_0 + S_1, \quad (1.11')$$

$$S_0 = \frac{-z}{4\pi\omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right), \quad (1.12)$$

$$S_1 = \frac{-i\alpha z}{4\pi\omega^2} e^{i\alpha x} \int_0^x e^{-i\alpha \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - 1 \right) d\xi, \quad (1.13)$$

とすると S_0 は 定常問題の核である。

S_1 は又

$$S_1 = \frac{-z}{4\pi\omega^2} + \frac{i\alpha z}{4\pi\omega^2} e^{i\alpha x} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^x e^{-i\alpha \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \omega^2}} \right], \quad (1.14)$$

$\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$S \doteq S_0$$

(1.15)

$$S_0(0, y, z) = \frac{z}{4\pi\omega^2}, \quad (1.16)$$

$$S_0(x, y, z) \xrightarrow{x \ll -1} + \frac{z}{2\pi\omega^2}, \quad (1.17)$$

一方 (1.6) から直接

$$S(0, y, z) = + \frac{z}{4\pi\omega^2} \int_0^\infty \frac{e^{-i\alpha\omega u}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= + \frac{\sqrt{z}}{4\pi\omega} \left[K_1(\alpha\omega) + i \{ I_1(\alpha\omega) - L_{-1}(\alpha\omega) \} \right],$$

K_1, I_1 は 変形ベッセル関数。

L は 変数の ストール-7 関数。

(1.18)

$$S(x, y, z) \xrightarrow{x \ll -1} + \frac{\alpha z}{2\pi \omega} e^{i\alpha x} K_1(\alpha \omega), \quad (1.19)$$

$\alpha \omega \rightarrow 0$ ならい"

$$S(0, y, z) \rightarrow + \frac{z}{4\pi \omega^2}, \quad (1.20)$$

$$S(x, y, z) \xrightarrow{x \ll -1} + \frac{z}{2\pi \omega^2} e^{i\alpha x}, \quad (1.21)$$

すなわち $\alpha \rightarrow 0$ の極限で $x=0$ における誘起速度は定常問題のそれに一致し、無限誘流ではそれに $e^{i\alpha x}$ をかけたものに一致する。

S の表現として (1.6), (1.9), (1.9') をあげたが、(1.9') を z について積分した表現がいろいろ便利のようで、それを別の方法で導くと、与す"

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + \omega^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda t K_0(\omega t) dt, \quad (1.22)$$

なる積分があるから

$$\frac{z}{(x^2 + \omega^2)^{3/2}} = \frac{2z}{\pi \omega} \int_0^\infty -\cos \lambda t K_1(t\omega) t dt, \quad (1.23)$$

となり、(1.6) より

$$S(x, y, z) = \frac{-z}{4\pi^2 i \omega} \int_0^\infty \left(\frac{e^{i\lambda x}}{t - \alpha + i\pi} - \frac{e^{-i\lambda x}}{t + \alpha} \right) K_1(t\omega) t dt, \quad (1.24)$$

境界条件は 壁面変位 ζ^* に対して

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \zeta^*(x, y) \quad \text{on } S, \quad (1.25)$$

で与えられるか、ここで ζ のように定義される変位が ζ^* である Ψ を導入しておく。

$$\phi(x, y, z) = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \Psi(x, y, z), \quad (1.26)$$

Ψ は、上流側で 0 となるようにしておくと、流線の無限上流での位置からの x 方向の距離である。

$$\zeta(x, y, z) = - \frac{\partial \Psi}{\partial z}(x, y, z), \quad (1.27)$$

と与えられ、(1.25) と比較すると

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})(\zeta^* - \zeta) = 0, \quad (1.28)$$

となるから

$$\zeta^*(x, y) - \zeta(x, y) = [\zeta^*(0, y) - \zeta(0, y)] e^{i\alpha x}, \quad (1.29)$$

on S

となっている。

さて (1.26) より

$$\Psi(x, y, z) = \frac{e^{i\alpha x}}{i} \int_0^\infty \phi(x, y, z) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.30)$$

また

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\rho U^2} \iint_S p(x, y') T(x - x', y - y', z) dx' dy', \quad (1.31)$$

と書くことにすると (1.24) と (1.30) から

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, y, z) &= -e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^x S' e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{z}{4\pi^2 \omega} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{+itx}}{(t-\alpha+1/i)^2} + \frac{e^{-itx}}{(t+\alpha)^2} \right) K_1(t\omega) t dt, \end{aligned} \quad (1.32)$$

2.2.12

$$\bar{H}(t; y) = \frac{1}{P(y)} \int_{-C(y)}^{C(y)} p(x, y) e^{-i\alpha x} dx, \quad (1.33)$$

とおく。2.12. $C(y)$ は半無限区間とする。

これを (1.7) に代入して (1.24) を使えば

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \frac{U}{4\pi^2 i} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{itx}}{t-\alpha+1/i} \int_{-B}^B \bar{H}(t, y') \frac{z}{\omega} K_1(t\omega) dy' \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-itx}}{t+\alpha} \int_{-B}^B \bar{H}(-t, y') \frac{z}{\omega} K_1(t\omega) dy' \right] t dt, \quad (1) \end{aligned}$$

今

$$H^{\pm}(t, y) = \int_{-B}^B \bar{H}(\pm t, y') K_1(t\omega) \frac{dy'}{\omega}, \quad (1.34)$$

とすると上式は

$$\phi(x, y, z) = \frac{zU}{4\pi^2 i} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{itx}}{t-\alpha+1/i} H^+(t, y) - \frac{e^{-itx}}{t+\alpha} H^-(t, y) \right] t dt, \quad (1.35)$$

1.2. 同様にして

$$\bar{\psi}(x, y, z) = \frac{z}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{itx}}{(t-\alpha+1/i)^2} H^+(t, y) + \frac{e^{-itx}}{(t+\alpha)^2} H^-(t, y) \right] t dt, \quad (1.36)$$

流の速度ポテンシャル

$$\phi(x, y, z) \rightarrow -\frac{zU}{2\pi} e^{i\alpha x} H^+(\alpha, y) \quad (1.37)$$

$$\psi(x, y, z) \rightarrow \frac{iz}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{i\alpha x} H^+(t, y) t \right] \Big|_{t=\alpha} \quad (1.38)$$

式(1.37)より

$$\lim_{z \rightarrow \pm 0} \left[z \bar{H}^{\pm}(t, y) \right] = z \int_{-B}^B \bar{H}(\pm t, y') K_1(t\omega) \frac{dy'}{\omega} \Big|_{z=0}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left[z \int_{-B}^B \bar{H}(\pm t, y') \frac{dy'}{(y-y')^2 + z^2} \right] = [\pi \bar{H}(\pm t, y)] \operatorname{sgn}(z) \quad (1.39)$$

と式(1.39)より注目の式と $z \rightarrow 0$ より

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow[z \rightarrow 0]{x \ll -1} -\frac{\alpha U}{2} e^{i\alpha x} \bar{H}(\alpha, y) \operatorname{sgn}(z) \quad (1.40)$$

$$\psi(x, y, z) \rightarrow \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[t e^{i\alpha x} \bar{H}(t, y) \right] \operatorname{sgn}(z) \quad (1.41)$$

式(1.37) (1.38)より

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{\alpha U}{2\pi} e^{i\alpha x} H^+(\alpha, y) \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\int \rightarrow \frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{i\alpha x} t H^+(t, y) \right] \Big|_{t=\alpha}$$

2. 逆流れ

一樣流れの方向を逆にしたものを逆流れと呼ぶ。

逆流れに同じ予量法は (2) 式をつけて書くことにする。

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(x, y, z) = (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\phi}(x, y, z), \\ \tilde{\phi}(x, y, z) = (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\Psi}(x, y, z), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = \frac{z}{4\pi U} \iint_S \frac{\tilde{\phi}(x', y') dx' dy'}{R^3}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\phi}(x, y, z) = \frac{1}{U} \iint_S \tilde{\phi}(x', y') \tilde{J}(x-x', y-y', z) dx' dy', \quad (2.3)$$

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \frac{1}{U^2} \iint_S \tilde{\phi}(x', y') \tilde{T}(x-x', y-y', z) dx' dy', \quad (2.4)$$

$$\tilde{J}(x, y, z) = \frac{-z}{4\pi^2 i \omega} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-itx}}{t - \alpha + i0} - \frac{e^{itx}}{t + \alpha} \right) K_1(t\omega) t dt, \quad (2.5)$$

$$\tilde{T}(x, y, z) = \frac{z}{4\pi^2 \omega} \int_0^\infty \left(\frac{e^{-itx}}{(t - \alpha + i0)^2} + \frac{e^{itx}}{(t + \alpha)^2} \right) K_1(t\omega) t dt, \quad (2.6)$$

$$\tilde{J}(x, y, z) + \overline{\tilde{J}(x, y, z)} = -\frac{z}{2\pi \omega} e^{-i\alpha x} K_1(\alpha\omega), \quad (2.7)$$

$$\tilde{T} - \overline{\tilde{T}} = \frac{z}{2\pi \omega i} \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{-itx} t K_1(t\omega) \right] \Big|_{t=\alpha}, \quad (2.8)$$

上式は以下関係式に従って示す。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} t K_1(t\omega) = \omega + K_0(t\omega) \right]$$

$$\tilde{\phi}_z = -(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\phi}^*(x, y), \quad (2.9)$$

$$\tilde{S}(x, y, z) = S(-x, y, z), \quad (2.10)$$

$$\tilde{T}(x, y, z) = T(-x, y, z), \quad (2.11)$$

空間は前後対称なとて 連続的は

$$\tilde{P}(x) = P(-x), \quad (2.12)$$

と決めることに

$$\tilde{\phi}(x, y, z) = \phi(-x, y, z), \quad (2.13)$$

$$\tilde{\Psi}(x, y, z) = \Psi(-x, y, z), \quad (2.14)$$

$$\tilde{\zeta}(x, y) = \zeta(-x, y), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \phi(-x, y, 0), \quad (2.16)$$

$$\tilde{H}(t, y) = \frac{1}{\rho v^2} \int_{-c}^c \tilde{P}(x, y) e^{+i\omega x} dx, \quad (2.17)$$

$$\tilde{H}^{\pm}(t, y) = \int_{-B}^B \tilde{H}(t, y') K_1(t\omega) \frac{dy'}{\omega}, \quad (2.18)$$

とすると (2.12) より

$$\tilde{H}(t, y) = \bar{H}(+t, y), \quad (2.19)$$

$$\tilde{H}^{\pm}(t, y) = H^{\pm}(t, y), \quad (2.20)$$

3. 相反定理

(1.35) と (2.17) から

$$\iint_S p \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dy = \frac{p U^3}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \left[\frac{F_0^+(t)}{t - \alpha + i0} - \frac{F_0^-(t)}{t + \alpha} \right] t dt, \quad (3.1)$$

ただし

$$F_0^\pm(t) = \int_{-B}^B \frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y) dy \int_{-t}^B F(t, y') \frac{k_1(t|y-y')}{|y-y'|} dy', \quad (3.2)$$

一方 (2.3), (2.6), (1.33) から 同様にして、

$$\iint_S p \frac{\partial \phi}{\partial z} dx dy = \iint_S p \frac{\partial \phi^*}{\partial z} dx dy, \quad (3.3)$$

を得るから、これが成立つ爲には p, p^* が共に Kutta の条件を満たし 又 両翼端で "0" になければならない。

この時の条件は (3.2) の積分の "順序" の交換から可能な最良の条件である。

同様にして

$$\iint_S p^* \gamma dx dy = \iint_S \gamma^* p dx dy, \quad (3.4)$$

が成立つかいこれに於ては上の条件は必要ない。

ただしこれに於ては境界変位 (*) との間に (1.29) の条件がある事を忘れてはならない。

4. 仕事, 減衰, 推力

外力のする仕事を W , 流体が翼から受け取るエネルギー
(単位時間) (単位時間)
 を E , 推力を TU とすると

$$W = E + TU, \quad (4.1)$$

2.12 $W = \frac{i\omega}{4} \iint_S (p\bar{\zeta}^* - \bar{p}\zeta^*) dx dy, \quad (4.2)$

(1.29) の関係を使うと

$$W' = \frac{i\omega}{4} \iint_S (p\bar{\zeta} - \bar{p}\zeta) dx dy, \quad (4.3)$$

とすると

$$W = W' + \frac{\omega}{4i} \iint [p(x,y) \overline{\zeta^*(0,y)} - \bar{p}(0,y) \zeta^*(x,y)] dx dy$$

$$W = W' + W'' \quad (4.4)$$

$$W'' = \frac{\rho U^2}{4i} \int [\overline{F(\alpha,y)} \{ \zeta^*(0,y) - \bar{\zeta}(0,y) \} - \overline{F(\alpha,y)} \{ \zeta^*(0,y) - \bar{\zeta}(0,y) \}] dy, \quad (4.5)$$

(1.36) を $\bar{\zeta}$ で微分して (4.5) をかきかえ.

$$W' = -\frac{\rho U^2}{4\pi^2} \times \frac{i\omega}{4} \int_0^\infty \left[\frac{\int \overline{H(\alpha,y)} \overline{H'(\alpha,y)} dy}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{\int \overline{H(\alpha,y)} \overline{H'(\alpha,y)} dy}{(1-\alpha^2)^2} \right] d\alpha.$$

$$\mathcal{P} = \int_{-b}^b \overline{H(\alpha,y)} \overline{H'(\alpha,y)} dy = \iint \overline{H(\alpha,y)} \overline{H'(\alpha,y)} \frac{K_1(\alpha\omega)}{2\omega} dy dy'$$

$$= \int_{-b}^b \overline{H(\alpha,y)} \overline{H'(\alpha,y)} dy \quad (4.6)$$

とかくと

$$W' = \frac{\rho \omega U^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[t \mathcal{F}(\alpha) \right] \Big|_{t=\alpha}, \quad \dots \quad (4.7)$$

また

$$W'' = \frac{-\rho \omega U^2}{4\pi^2 i} \int_0^\infty \left[\frac{\mathcal{F}(\alpha, t) \overline{\mathcal{F}}(\alpha, t)}{(t-\alpha-i\eta)^2} - \frac{\overline{\mathcal{F}}(\alpha, t)}{(t-\alpha+i\eta)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(t+\alpha)^2} \left\{ \mathcal{F}^-(\alpha, t) - \overline{\mathcal{F}}^-(\alpha, t) \right\} \right] t dt \\ + \frac{\rho \omega U^2}{4i} \int_{-b}^b \left[\overline{H}(\alpha, y) \mathcal{F}^*(\alpha, y) - \overline{\mathcal{F}}^*(\alpha, y) H(\alpha, y) \right] dy, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{F}(\alpha, t) = \int_{-b}^b \overline{H}(\alpha, y) dy \int_{-b}^b \overline{H}(t, y') \frac{K_1(t, y')}{\omega} dy', \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}^-(\alpha, t) = \int_{-b}^b H(\alpha, y) dy \int_{-b}^b \overline{H}(-t, y') \frac{K_1(t, y')}{\omega} dy', \quad (4.10)$$

ゆえに E は形式的に

$$E = \frac{1}{4} \iint (\rho \bar{\phi}_z + \bar{\rho} \phi_z) dx dy, \quad (4.11)$$

(4.35) を z について微分して積分すると

$$E = \frac{\rho \omega^2 V^3}{8\pi} \bar{\phi}, \quad (4.12)$$

これは (4.7) に一致する。

5. 揚力系理論

2次元系は

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \psi^*(x, y) \equiv -w(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\rho U} \iint_S p(x, y) \frac{\partial S(x-x', y-y', 0)}{\partial z} dx' dy', \quad (5.1)$$

であるが、揚力系理論では^{(2.0)内} 誘導関数に

$$-w_i(0, y) = \frac{1}{\rho U} \int_{-b}^b \left[\int p(x, y') dx \right] \frac{\partial S(0, y-y', 0)}{\partial z} dy', \quad (5.2)$$

とあるから (1.18) により

$$-w_i(0, y) = \frac{\alpha}{4\pi\rho U} \int_{-b}^b \left[\int p dx \right] \left[K_1(\alpha|y-y'|) + i \left\{ I_1(\alpha|y-y'|) - L_1(\alpha|y-y') \right\} \right] \times \frac{dy'}{|y-y'|}, \quad (5.3)$$

$b\alpha \ll 1$ ならば

$$-w_i(0, y) = \frac{1}{4\pi\rho U} \int_{-b}^b \left[\int p dx \right] \frac{dy'}{(y-y')^2}, \quad (5.4)$$

となって定常問題の場合に等しくなる。

また (5.1) は

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \psi^*(x, y) = w_i(y) + w^{2D}(x, y), \quad (5.5)$$

$w^{2D}(x, y)$ は 2次元理論の正向き速度である。

速度

それ故 この近似では 上下振れの幅が $2v$ だけ
小さくなった甚力定になる。

6. 複素変数理論

(1.24) と (1.17) の代りに $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{i}{4\pi f U} \iint \frac{p dx dy'}{(y-y')^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x-x')}}{t-\alpha+i0} d\alpha \\ &= \frac{+1}{2\pi f U} \int_{-b}^x \int_{-b}^b \frac{p(x', y') dx dy'}{(y-y')^2} [e^{i\alpha(x-x')}] , \quad (6.1) \end{aligned}$$

定常問題の時同様

$$p(x, y) = \frac{2}{\pi} P(x') \sqrt{1 - \left(\frac{y-y'}{b}\right)^2} , \quad (6.2)$$

$$\int_{-b}^b p dy' = P(x') ,$$

とかくと (6.1) は

$$\int_{-b}^b \frac{p dy'}{(y-y')^2} = \frac{P(x')}{-b} , \quad (6.3)$$

7" あるから

$$\phi_z = \frac{e^{i\alpha x}}{2\pi f U} \int_0^x \frac{P(x') e^{-i\alpha x'}}{b} dx' , \quad (6.4)$$

2" 的

$$\begin{aligned} -P(x) &= 2\pi f U b e^{i\alpha x} \frac{d}{dx} (\phi_z e^{-i\alpha x}) \\ &= 2\pi f U b [\phi_{zx} - i\alpha \phi_z] , \quad (6.5) \end{aligned}$$

となつて かつたの条件を満たさる。*

$$\int_{-c}^c P(x) e^{-i\alpha x} dx = 2\pi P U \cdot \left[\frac{1}{i\alpha} e^{-i\alpha x} \right]_{x=-c}^{x=c}, \quad (6.6)$$

2. 108 満ちる 1017 337 214 (5.2) の解

$$\rho^2 = \frac{Q(x)}{\pi \sqrt{1 - (x/a)^2}} \quad (6.7)$$

のようなものがあるとこれはついでに

$$\int_{-b}^b \frac{p^x dy'}{(y-y')^2} = 0 \quad (K.8)$$

であるから (6.4) は かわらないうで 結果 ρ^* は 不定
である。

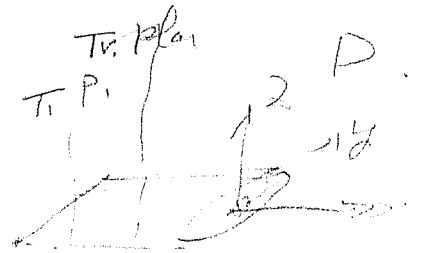
特異点では $\frac{1}{17}$ 倍、左方は $\frac{1}{17}$ 倍の $\frac{1}{17}$ 倍
 場合が"悪い"から P と Q が Cancel するように決めた
 ところか。

附録 A E, W' の積分

$$E = \frac{1}{4} \iint_{S^\pm} \left[\rho \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} + \bar{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial n} + U \rho \nabla \phi \nabla \bar{\phi} \frac{\partial x}{\partial n} \right] dS, \quad (A.1)$$

$$\rho = \rho (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi$$

$$E = \frac{\rho U}{4} \iiint_D \left[\nabla (i\omega - \frac{\partial}{\partial x}) \phi \nabla \bar{\phi} + \nabla \phi \nabla (-i\omega - \frac{\partial}{\partial x}) \bar{\phi} + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \phi \nabla \bar{\phi}) \right] d\tau$$



$$+ \frac{1}{4} \iint_{\Gamma.P.} \left[\rho \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \bar{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho U \nabla \phi \nabla \bar{\phi} \right] dy dz, \quad \dots$$

$$= \frac{\rho U}{4} \iiint_D \left[-\nabla \phi_x \nabla \bar{\phi} - \nabla \bar{\phi}_x \nabla \phi + \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \phi \nabla \bar{\phi}) \right] d\tau$$

$$+ \frac{\rho U}{4} \iint_{\Gamma.P.} \nabla \phi \nabla \bar{\phi} dy dz, \quad \dots$$

ρ は TNeft₂ plane で 運動分を保持している

ρ ∂φ/∂x の積分は 平均において 0 となるので

結局

$$E = \frac{\rho U}{4} \iint_{\Gamma.P.} \nabla \phi \nabla \bar{\phi} dy dz, \quad (A.2)$$

次に

$$W' = \frac{i\omega}{4} \iint_S (\rho \bar{\psi} - \bar{\rho} \psi) dx dy, \quad (A.3)$$

$$p = \rho (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \psi$$

$$\zeta = - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

これから

$$W' = \frac{\rho \omega}{4i} \iint_S (p \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} - \bar{p} \frac{\partial \psi}{\partial z}) dx dy$$

$$= \frac{\rho \omega}{4i} \iint_{T.P.} (p \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \bar{p} \frac{\partial \psi}{\partial x}) dy dz$$

$$+ \frac{\rho \omega}{4i} \iiint_D \left[\nabla (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \psi \cdot \nabla \bar{\psi} - \nabla \psi \cdot \nabla (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \bar{\psi} \right] d\tau$$

$$(-\omega^2 - 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})$$

$$\approx \frac{\rho \omega}{4i} \iiint_D \left[-2i\omega U \{ \nabla \psi_x \cdot \nabla \bar{\psi} + \nabla \psi \cdot \nabla \bar{\psi}_x \} + U^2 \{ \nabla^2 \psi \cdot \nabla \bar{\psi} - \nabla \psi \cdot \nabla^2 \bar{\psi} \} \right] d\tau$$

$$= \frac{\rho \omega^2 U}{2} \iint_{T.P.} \nabla \psi \cdot \nabla \bar{\psi} dy dz + \frac{\rho \omega U^2}{4i} \iint_{T.P.} (\nabla \psi_x \cdot \nabla \bar{\psi} - \nabla \psi \cdot \nabla \bar{\psi}_x) dy dz$$

$$= \frac{\rho \omega U}{4i} \iint_{T.P.} (\nabla \phi \cdot \nabla \bar{\psi} - \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \psi) dy dz, \quad i\omega = \dots (A.4)$$

式(A.2)の積分を求めよう。

結局では (1.37) に $\neq$

$$\phi(x, y, z) = -\frac{\alpha U}{2\pi} e^{i\alpha x} H^+(\alpha, y)$$

より

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = i\alpha \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\alpha^2 \phi, \quad (A.4)$$

$$\nabla \phi \nabla \bar{\phi} = \alpha^2 \phi \bar{\phi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z},$$

$$\Delta \phi = 0 \text{ より } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \alpha^2 \phi, \quad (A.5)$$

$$\therefore \nabla \phi \nabla \bar{\phi} = \bar{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \iint_{T,p} \nabla \phi \nabla \bar{\phi} dy dz &= \int_{-B}^B [\bar{\phi}] \frac{\partial \phi}{\partial z} dy = -\alpha U \int_{-B}^B \bar{H}(\alpha, y) e^{i\alpha x} \frac{\partial \phi}{\partial z} dy \\ &= + \frac{\alpha^2 U^2}{2\pi} \int_{-B}^B \bar{H}(\alpha, y) H^+(\alpha, y) dy, \end{aligned}$$

$$\therefore E = \frac{\rho \alpha^2 U^3}{8\pi} \int_{-B}^B \bar{H}(\alpha, y) H^+(\alpha, y) dy, \quad (A.7)$$