

船体剛性を考慮した波浪中船体運動の理論 に関する 覚書 (前進速度のない場合)

別所正和

内容

序言

1. 速度ポテンシャルのフーリエ変換
2. ストリップ法とカガビ相反定理
3. 運動方程式と変分法
4. グリーニ函数による解の表示、
5. 相似見りと逐次近似解法
6. 変分問題の変換

結言

参考文献

- 附録 簡単な計算例
1. 逐次近似法
 2. 解析解

附図 一葉

昭和46年3月

防衛大学校
機械科

序論

船が巨大になるにつれてその剛性は相対的に低下しているようである。そのような船が波の中を航行している時は船体が蛇のようにうねうねと曲がるのかわかると言う言合である。

この報告書においては船が弾性的に揺れる事を考えた場合の船の運動および船体の揺みの計算法について考察を試みる。

簡単の爲に前進速度がない場合で且つ縦波中の運動について議論を進めたが、他の場合も拡張するのは大きい困難はないであろう。

この場合ストリツプ法を使えば容易に運動方程式が得られるけれども得られる方程式が非線型(準線型)であつてその解決は必ずしも容易でない。そこで今回はハミルトンの原理から直接運動方程式を導く方法を試みた。この方法によれば変分法によつて解いたので近似計算に便利であろう。

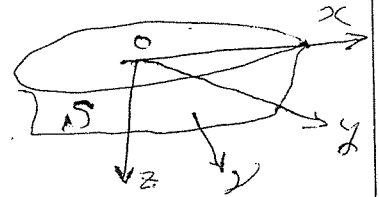
又ハスキントの関係を利用して発散波の自由応答から規則波中の船体応答を求める式を導いて見た。前進速度のある場合はこの式は少々問題があるのど後報にやづるが原理的には同様な式が得られるはずである。

1. 速度ポテンシャルとフーリエ変換¹⁾²⁾⁷⁾

右図のような座標系をとろう。

線型近似によつて圧力は

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z, t) = \phi_t(x, y, z, t) + gz, \quad (1)$$



水面条件は

$$\phi_t \Big|_{z=0} = -g\zeta(x, y), \quad (2)$$

$$\zeta_t = -\phi_z \Big|_{z=0}, \quad (3)$$

よつて

$$\phi_{tt} - g\phi_z = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (4)$$

ここに ϕ は速度ポテンシャル, ζ は水面変位とする。

物体の表面条件は S を外向法線系として

$$\phi_n = - \sum_{j=1}^3 u_j \phi(x, y, z, t) x_{jn}, \quad \text{on } S \quad (5)$$

但し $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, u_j$ は各方向の S 上の成分速度とする。

今はストリップ法的に考え、船の各断面の上下動のみを考えると、境界条件として次式をとる。

$$\phi_n = -\dot{\zeta}(x, t) z_n, \quad \dots \quad (5')$$

ここに $\dot{\zeta}(x, t)$ は船の中性軸の上下動の速度とする。

一般的に考えて $t=0$ まで $\phi = \phi_t = 0$ であるとしてこれらのフーリエ変換を求めておこう。

$$\mathcal{L}\phi = \int_0^\infty \phi(x, y, z, t) e^{-i\omega t} dt = \Phi(x, y, z; i\omega) = \overline{\Phi(x, y, z; -i\omega)}$$

$$\text{逆変換は } \mathcal{L}^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Phi e^{i\omega t} d\omega = \phi(x, y, z, t) \quad (6)$$

かつは定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \phi_z &= i\omega \Phi \\ \mathcal{L} \phi_{zz} &= -\omega^2 \Phi \\ \mathcal{L} p &= \rho \mathcal{L} \phi_z = \rho i\omega \Phi \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

但しこの ρ は 静圧を除く動圧のみ

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \zeta &= Z(x, \omega) \\ \mathcal{L} \dot{\zeta} &= -\zeta(x, 0) + i\omega Z(x, \omega) \\ \mathcal{L} \ddot{\zeta} &= -i\omega \zeta(x, 0) - \omega^2 Z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

但し $\dot{\zeta}(x, 0) = 0$ とする。

水面条件は $\frac{\omega^2}{g} \Phi(x, y, 0, \omega) + \Phi(x, y, 0, \omega) = 0 \quad (8)$

今 $\mathcal{L} u_j = U_j(x, y, z; \omega) \quad , \quad \dots \quad (9)$
と仮定

$$\Phi_L|_{on S} = \mathcal{L} \phi_L = - \sum_{j=1}^3 U_j \chi_{jL} \quad , \quad \dots \quad (10)$$

と仮定し (5') を採用するのと同じように簡単になる。

$$\Phi_L|_{on S} = - \dot{Z}(x, \omega) Z_L \quad , \quad \dots \quad (10')$$

こゝに $\dot{Z} = \mathcal{L} \dot{\zeta}$ を意味するものとする。

この周波数領域域におけるポテンシャルは ノイマン函数 N を使って 二つのように表示出来る。

$$\Phi(P) = - \int_S \Phi_L(Q) N(P, Q) dS(Q) \quad , \quad \dots \quad (11)$$

但し $P \equiv (x, y, z), Q \equiv (x', y', z')$ 。

N は 遠方で 次の漸近値をもっている。

$$N(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi\rho i}} e^{-Kz - iK\rho} \Phi_D(Q, \varphi) + \dots \quad (12)$$

こゝに $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$

$$\Phi_D(Q, \varphi) = \Phi_e(Q, \varphi) + \Phi_d(Q, \varphi) \quad \dots \quad (13)$$

$$\Phi_e(Q, \varphi) = \exp.[-Kz' + iK(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)] \quad \dots \quad (14)$$

$$\Phi_{DL}|_S = 0 \quad , \quad K = \omega^2/g$$

又 $\Phi(-\omega) = \overline{\Phi(\omega)}$ である。

(14) 式の Φ_e は左図のように x 軸と φ なる角をなして打寄せて来る入射波である。

又 (12) 式は原点から出て行く内筒波である。

(12) 式を (11) 式に代入すると、

$$\Phi(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi p i}} e^{-Kz - iKp} D(K, \varphi), \quad \dots (15)$$

$$D(K, \varphi) = - \iint_S \Phi_D(\alpha, \varphi) \Phi_D(\alpha) d\beta(\alpha), \quad \dots (16)$$

この D を使えば“波高 Σ_w は

$$\Sigma_w = \frac{\omega}{g i} \Phi \Big|_{z=0} \xrightarrow{} \frac{\omega^2}{i g \sqrt{2\pi p g i}} e^{-iKp} D(K, \varphi), \quad \dots (17)$$

物理面では

$$\begin{aligned} \zeta_w(p, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma_w e^{i\omega t} d\omega = \frac{\text{Re}}{\pi} \int_0^{\infty} \Sigma_w e^{i\omega t} d\omega \\ &= \text{Re} \frac{1}{\pi g i \sqrt{2\pi p g i}} \int_0^{\infty} e^{-iKp + i\omega t} D(K, \varphi) \omega^2 d\omega, \quad (18) \end{aligned}$$

これは 近似似的に フレネル積分で表示出来るから定常点法で次のように漸近値が求まる。

$$\zeta_w(p, \varphi) \xrightarrow[\frac{gt^2}{4p} \rightarrow 1]{\frac{gt^2}{4p}} \text{Re} \left[\frac{gt^2}{8\pi p^3 i^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i g t^2}{4p}} D\left(\frac{gt^2}{4p^2}, \varphi\right) \right], \quad (19)$$

2. ストリップ法と力の相互反定理 (12)

各断面 (変形しないとして) に働く 下向きの水の力は、
静水圧を除いて

$$f(x) = - \int_C p z_\nu dS(x) = - \rho \int_C \phi_t z_\nu dS, \quad (1)$$

$$\mathcal{L} f = \bar{F}(x, \omega) = - \rho i \omega \int_C \bar{\Phi} z_\nu dS, \quad (2)$$

strip 法では

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{\Phi} = 0, \quad (3)$$

これは二次元問題の解を利用する (1.10') と相互反定理
によつて

$$\bar{F}(x) = \rho i \omega \int_C \bar{\Phi}_T \bar{\Phi}_\nu dS = - \rho i \omega \dot{Z} \int_C \bar{\Phi}_T z_\nu dS$$

$$= - \rho i \omega \dot{Z}(x) C_0(x), \quad (4)$$

$$C_0(x) = \int_C \bar{\Phi}_{T0} z_\nu dS, \quad (5)$$

ここで suffix T は二次元ポテンシャルを意味し、

$$\bar{\Phi}_{T0\nu} = - z_\nu$$

とす。

この力については 入射波の高さを次のようにおくと

$$\left. \begin{aligned} \zeta_I(x, y, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ik\tilde{\omega}(\alpha) + i\omega t} d\omega \\ \tilde{\omega}(\alpha) &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad K = \omega/k_0/g, \\ \bar{A}(\omega) &= A(-\omega) \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\mathcal{L} \zeta_I = Z_I(x, y, \alpha, \omega) = A(\omega) e^{ik\tilde{\omega}(\alpha)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{29 変換ポテンシャルは} \quad \phi_I &= \frac{i g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-|Kz| + ik\tilde{\omega}(\alpha) + i\omega t} \frac{d\omega}{\omega} \\ \mathcal{L} \phi_I &= \bar{\Phi}_I = \frac{i g}{\omega} A(\omega) \bar{\Phi}_I(x, y, \alpha) \end{aligned} \right\} (7)$$

$\bar{\Phi}_e$ は (1.14) で与えられる。

つまりこれは α 方向から来る平面波の集まりである。

この入射波に対する船の反射波のポテンシャルを Φ_d とすると 合せてポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_w &= \frac{i g}{\omega} \bar{\Phi}_D(x, y, \alpha) \\ \bar{\Phi}_D &= \bar{\Phi}_e + \Phi_d\end{aligned}\quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots (8) \end{array} \right.$$

この力は (以下 z 方向の力のみ考える)

$$\begin{aligned}f_w(x, z) &= -\rho \int_c \phi_{wt} z_\nu dS \\ F_w(x, \omega) &= -\rho i \omega \int_c \bar{\Phi}_w z_\nu dS\end{aligned}\quad \left\{ \begin{array}{l} \dots \dots \dots (9) \end{array} \right.$$

(8) によって

$$\begin{aligned}F_w &= \rho g A(\omega) \int_c \bar{\Phi}_D(x, y, \alpha) z_\nu dS \\ &= \rho g A(\omega) D(x, \alpha), \quad \dots \dots \dots (10)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}D(x, \alpha) &= \int_c \bar{\Phi}_D(x, y, \alpha) z_\nu dS \\ &= - \int_c \bar{\Phi}_D \bar{\Phi}_{0\nu} dS, \quad \dots \dots \dots (11')\end{aligned}$$

但し $\bar{\Phi}_{0\nu} = -z_\nu$

以下 D の K の小さい値における近似値を strip 法で求めて見よう。

(11) 式中 $\bar{\Phi}_D$ の内の $\bar{\Phi}_e$ については明らかに (9) 式が成立する。しかし $\bar{\Phi}_d$ については strip 法で求めても不自然ではなからう。

そうすると

$$\begin{aligned}\int_c \bar{\Phi}_d \bar{\Phi}_{0\nu} dS &\doteq \int_c \bar{\Phi}_{Td} \bar{\Phi}_{T0\nu} dS \doteq \int_c \bar{\Phi}_{T0} \bar{\Phi}_{Td\nu} dS \\ &\doteq - \int_c \bar{\Phi}_{T0} \bar{\Phi}_{e\nu} dS, \quad \dots \dots \dots (12)\end{aligned}$$

$$\Phi_{0\nu} = -\bar{\Phi}_{e\nu} \doteq -\bar{\Phi}_e(x, y, \alpha) [-|K|z_\nu + iK y_\nu \sin\alpha + \dots]$$

$K \rightarrow 0$
 $z_\nu \rightarrow 0$

であるから

$$\begin{aligned} D(x, \alpha) &\doteq \int_C (\Phi_e z_\nu + \bar{\Phi}_{T0} \bar{\Phi}_{e\nu}) d\sigma \\ &\doteq \int_C [z_\nu - \bar{\Phi}_{T0} |K| z_\nu] \bar{\Phi}_e d\sigma, \quad \dots (13) \end{aligned}$$

がえられる。

2の右辺の2項は法則理論では、

$$\int_C \bar{\Phi}_{T0} z_\nu \bar{\Phi}_e d\sigma = \gamma_w C_0(\alpha) e^{iKx \cos\alpha}, \quad \dots (14)$$

と近似してをり、 K の小さいときには $\bar{\Phi}_e$ を展開して、

$$\gamma_w = \int_C \bar{\Phi}_{T0} z_\nu (1 - |K|z_\nu) d\sigma$$

となるから

$$\gamma_w = 1 - \frac{|K|}{C_0(\alpha)} \int_C \bar{\Phi}_{T0} z_\nu z_\nu d\sigma, \quad \dots (15)$$

となる。

2の γ_w を 船に法則の修正係数と呼んでおこう。

(13) 右辺の1項はフルード・クリロツワカであつて、

(14)式にならうとしてスミス修正 γ_s を使って

$$\int_C z_\nu \bar{\Phi}_e d\sigma = \gamma_s B(x) e^{iKx \cos\alpha}, \quad \dots (16)$$

B は船の幅とする。

と表わせるから やはり K の小さいときには

$$\gamma_s \doteq 1 - |K| \frac{A(x)}{B(x)}, \quad \dots (17)$$

$A(x)$ は横切面積とする。

(14)と(16)を合せて(13)は次のように書ける。

$$D(x, \alpha) \doteq \gamma_m B(x) e^{iKx \cos\alpha}, \quad \dots (18)$$

$$\text{但し } \gamma_m = \gamma_s - |K| \delta w \frac{C_0(x)}{B(x)}$$

$$\stackrel{\text{K} \rightarrow 0}{=} 1 - |K| \left[\frac{A(x) + \delta w C_0(x)}{B(x)} \right], \quad \dots (19)$$

となる。~~この~~この係数を元々の考察³⁾に依りて元々の修正係数と呼ぶことにしよう。

以上は近似理論であるがもし3次元のポテンシャルが与えられたとすると、次のような意義論になる。

まず相互定理は

$$\iint_S \Phi_i \Phi_{j\nu} ds = \iint_S \Phi_j \Phi_{i\nu} ds \quad (20)$$

である。

今

$$\Phi_{j\nu} = -Z_j(z) z_\nu, \quad \dots (21)$$

(簡単のためにはやはり横断面は変形せずz方向のみ変位をおこなうものと仮定する)

この時力は船が変形しない場合のように単純ではないので次のように一般化したものを考えねばならない。

つまり

$$F_j = \int H(z) Z_j(z) dz, \quad \dots (22)$$

各断面に働く力 $H(z)$ (2)式で与えられるような) を Z_j なる重みをつけた加重平均を考える。従って特に $Z_j=1$ はz方向の力であり $Z_j=z$ はモーメントとなる。

さて (20), (21) を使えば

$$\begin{aligned} F_j &= -\rho i \omega \iint_S \Phi Z_j z_\nu ds = \rho i \omega \iint_S \Phi_j \Phi_{i\nu} ds \\ &= -\rho i \omega \sum_k C_{jk} \end{aligned} \quad \dots (23)$$

$$\begin{aligned} \text{但し } C_{jk} &= C_{kj} = \iint_S \Phi_j Z_k z_\nu ds \\ \Phi_{i\nu} &= - \sum_k Z_k z_\nu \end{aligned} \quad \left\{ \quad (24) \right.$$

又 (12) による力について同様に (22) の定義による力は

$$\begin{aligned} F_{wj} &= \rho g A(\omega) \iint_S \bar{\Phi}_D Z_j z_\nu dS \\ &= \rho g A(\omega) D_j(\alpha) \quad , \quad \dots (25) \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} D_j(\alpha) &= - \iint_S \bar{\Phi}_D(\alpha) \Phi_{j\nu} dS \\ &= \iint_S (\bar{\Phi}_j \Phi_{e\nu} - \bar{\Phi}_e \Phi_{j\nu}) dS \quad , \quad \dots (26) \end{aligned}$$

(1.17) により $\bar{\Phi}_j$ によつて出来る項は

$$Z_{wj} \rightarrow \frac{k}{i\sqrt{2\pi\rho g i}} e^{-iKz} D_j(\alpha) \quad , \quad \dots (27)$$

これが Haskind の関係²⁾である。

3. 運動方程式

ハミルトンの変分原理によれば、運動方程式は次のように表わされる。

$$\delta \int_0^t (T - V - S) dt = \delta \int_0^t W dt, \quad \dots (1)$$

2212 T : 全系の運動エネルギー —

V : " 位置エネルギー —

S : 歪エネルギー —

W : 外力のなす仕事。

今の場合、縦運動のみ考えて、船の上下の位置 $\zeta(x, t)$ とし

$w(x)$: 重量分布

$B(x)$: 水線幅

$A(x)$: 横切面積

とすると船体については、

$$T_B = \frac{1}{2g} \int w(x) \dot{\zeta}^2(x, t) dx, \quad \dots (2)$$

$$V_B = - \int w(x) \zeta(x, t) dx, \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{2} \int E I(x) \zeta_{xx}^2(x, t) dx, \quad \dots (4)$$

E は船体材料のヤング率, $I(x)$ は断面 2 次モーメントとする。
 この他に水の Lagrangean L_W を加えねばならない。

$$T - V = T_B - V_B + L_W, \quad \dots (5)$$

とおくと

$$L_W = \iiint p dx dy dz = \rho \iiint \left(\phi_t - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + g z \right) dx dy dz, \quad (6)$$

で与えられる。

先ず「静水圧」に属する部分は、船体 S の平衡位置を $z_0(x, y)$ とおくと、そのオフセットは

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \zeta(x, t)$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \rho g \iiint z \, dx \, dy \, dz &= -\frac{\rho g}{2} \iint_S z^2 \, dx \, dy - \frac{\rho g}{2} \iint_{\bar{H}} \zeta^2 \, dx \, dy \\
 &= -\frac{\rho g}{2} \iint_S (z_0^2 + 2z_0\zeta + \zeta^2) \, dx \, dy - \frac{\rho g}{2} \iint_{\bar{H}} \zeta^2 \, dx \, dy \\
 &= -\frac{\rho g}{2} \iint_{\bar{H}} z_0^2 \, dx \, dy + \rho g \int A(x) \zeta(x, t) \, dx - \frac{\rho g}{2} \int B(x) \zeta^2(x, t) \, dx \\
 &\quad - \frac{\rho g}{2} \iint_{\bar{H}} \zeta^2 \, dx \, dy, \quad \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

ここに $\bar{H}$ は自由表面とし $\bar{H}$ は船の水線面とする。

$$\text{又} \quad \iiint \phi_t \, dx \, dy \, dz = \frac{d}{dt} \iiint \phi \, dx \, dy \, dz - \iint \phi \phi_z \, dS - \iint_{\bar{H}} \phi \phi_z \, dx \, dy$$

とあるから、今

$$V_S = \rho g \int A(x) \zeta(x, t) \, dx + \frac{\rho g}{2} \int B(x) \zeta^2(x, t) \, dx, \quad \dots (8)$$

よおし (7) の右辺の定数項は、変数でないで除いて考える事にすると、(ϕ の水面条件を使て)

$$\begin{aligned}
 L_{WD} = L_W + V_S &= \rho \frac{d}{dt} \iiint \phi \, dx \, dy \, dz - \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \phi_z \, dS \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_{\bar{H}} \phi \phi_z \, dx \, dy, \quad \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

が得られる。

従つて運動の始めと終りに ϕ or $\phi_t = 0$ と存するとすれば

$$\int_0^t L_{WD} \, dt = -\frac{\rho}{2} \int_0^t dt \iint_S \phi \phi_z \, dS, \quad \dots \dots (10)$$

と成つて、 S 上の積分のみで決まる。

外力の存在は、それを $q(x)$ とおくと

$$W = \int q(x) \zeta(x, t) \, dx, \quad \dots \dots (11)$$

これらを (1) に代入して ζ について変分をとると運動方程式がえられる筈である。 L_{WD} の変分は少々面倒であるが、次のようになる。

$$\text{まず} \quad \int_0^t dt \left[\iint_S \phi \delta \phi_z \, dS - \iint_S \phi_z \delta \phi \, dS \right] = 0$$

であるので ϕ の境界条件 (1.5') から

$$\begin{aligned} \rho \int L_{WD} dt &= -\rho \int dt \iint_S \phi \delta \phi_L ds = \rho \int dt \iint_S \phi \delta \xi z_L ds \\ &= -\rho \int dt \iint_S \phi \delta \xi z_L ds = \int dt \int f(x,t) \delta \xi(x,t) dx \end{aligned}$$

2.2.12 f は (2.1) による断面上に働く力である。

他の変分は容易に求まって、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{g} \ddot{\xi}(x,t) + M_{xx}(x,t) + \gamma B(x) \xi(x,t) + f(x,t) \\ = \gamma A(x) - w(x) + \gamma(x,t), \dots (12) \end{aligned}$$

$$2.2.12 \quad m(x,t) = EI(x) \xi_{xx}(x,t)$$

で、曲げモーメントであり、両端で $m = m' = 0$ とする。

上式において $\gamma A, w$ は時間に関係ないから以後

$$\xi(x,t) = \xi_D(x,t) + \xi_S(x,0)$$

$$\left[EI(x) \xi_{xx}(x) \right]_{xx} + \gamma B(x) \xi_S(x) = \gamma A(x) - w(x), (13)$$

のような静的な変形 ξ_S を差し引いて ξ_D のみを考える事にする。

つまり (12) を

$$\frac{w(x)}{g} \ddot{\xi}(x,t) + m_{xx}(x,t) + \gamma B(x) \xi(x,t) + f(x,t) = \gamma(x,t) \dots (14)$$

と簡略化した方程式で考える事である。

これをフーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{g} \ddot{\Sigma}(x,\omega) + M_{xx}(x,\omega) + \gamma B(x) \Sigma(x,\omega) - \rho i \omega C_0(x,\omega) \dot{\Sigma}(x,\omega) \\ = Q(x,\omega). \dots (15) \end{aligned}$$

特に初期条件が 0 ならば

$$\left[-\omega^2 \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x) \right\} + \gamma B(x) \right] \Sigma(x,\omega) + M_{xx}(x,\omega) = Q(x,\omega) \dots (16)$$

となり、ストリツフの法的に考えたのと全く同じ結果が得られる。

簡単のため 2 式を

$$L Z(x, \omega) = Q(x, \omega)$$

と書く事にしよう。

$$L = -\frac{\omega^2}{g} \left\{ 2u(x) + p f_0(x) \right\} + \delta B(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right\}, \quad \dots (17)$$

規則 1 は中の応答 12 つについては (210) により

$$L Z(x, \omega) = p f A(\omega) D(x, \alpha), \quad \dots (18)$$

となる。

又 イムパルス 外力

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \delta(t) \delta(x-3), \\ Q(x, \omega) &= \delta(x-3) \end{aligned} \quad \left\{ \dots (19) \right.$$

とすると

であるから

$$L Z(x, \omega) = \delta(x-3), \quad \dots (20)$$

最後に $t=0$ で船体にある力をかけて $\zeta(x, 0)$ だけ変形させておいてそれを急に離す場合を考えると (15) 式 ~~が~~ において

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= i\omega \zeta - \zeta(x, 0) \\ \ddot{\zeta} &= -\omega^2 \zeta - i\omega \zeta(x, 0) \\ \dot{f} &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$L Z(x, \omega) = i\omega \left\{ \frac{2u(x)}{g} + p f_0(x) \right\} \zeta(x, 0), \quad (21)$$

等々の運動方程式が得られる。

これらの方程式は一般には準線型であるので常係数の場合のように簡単には解けない。し、又 梁の曲げの問題で、あつて複雑であり、変分法を用いた近似解法の方が実用的であろう。

従つて例へば

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \sum_j q_j(t) Z_j(x) \\ Z(x, \omega) &= \sum_j A_j(\omega) Z_j(x) \end{aligned} \quad \left\{ \dots (22) \right.$$

のように展開してその変分原理によつて A_j を決める事になる。

このような問題では普通周波数応答だけが必要なものであり

上述のまゝの変分原理は不便である。

周知数値上では変分原理は次のように簡単になる。

$$I = \int \left[-\frac{\omega^2}{2} \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x, \omega) \right\} + \frac{\gamma}{2} B(x) \right] Z(x, \omega) + \frac{M^2(x, \omega)}{2EI(x)} dx \quad \dots (23)$$

$$W = \int Q(x, \omega) Z(x, \omega) dx, \quad (24)$$

$$\delta I = \delta W \quad (25)$$

とすればよい。これから (6) 式がえられる事は明らかであろう。

なお (6) 式の両辺に $\bar{Z}$ をかけて x について積分し、その虚部を取ると

$$-\rho \omega^2 \int C_0(x, \omega) |Z(x, \omega)|^2 dx = \int Q(x, \omega) \bar{Z}(x, \omega) dx. \quad (26)$$

となるから、これは外力のなす仕事から船体の動きによって生ずる波のエネルギー——となって消費される事を示している。

4. グリーン函数による解の表示、4)

(3.20) の解を グリーン函数 G と呼ぶ事にしよう。

即ち
$$L G(x, z) = \delta(x-z), \quad \dots (1)$$

又
$$L g(x, z) = f(x-z), \quad \dots (2)$$

$$L \equiv \sigma B(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right\}, \quad \dots (3)$$

の解 $g(x, z)$ は 静的単位荷重による influence function つまり グリーン函数である。

L が L と 自己随伴形式であるから 次の相反性がある。

$$g(x, z) = g(z, x), \quad G(x, z) = G(z, x), \quad \dots (4)$$

又

$$\int [\xi(z) L g(x, z) - g(x, z) L \xi(z)] dz = 0. \quad \dots (4')$$

$$\int [Z(z) L G(x, z) - G(x, z) L Z(z)] dz = 0$$

これらの函数を使えば 前節の解は 次のように表わせる。

(3.13) の解は

$$\xi_s(x) = -\sigma \int \left\{ \frac{w(z)}{g} - A(z) \right\} g(x, z) dz, \quad \dots (5)$$

(3.18) の解を Z^w と記すと

$$Z^w(x) = \rho g A(\omega) \int D(z, x) G(x, z) dz, \quad \dots (6)$$

(3.21) の解を Z^f と記すと。

$$Z^f(x) = i\omega \int \left\{ \frac{w(z)}{g} + \rho C_0(z) \right\} \xi(z, 0) G(x, z) dz, \quad (7)$$

ここで $\xi(z, 0)$ が z' 点における単位荷重によるものとするならば

$$L \xi(z, 0) = \delta(z-z'), \quad \xi(z, 0) = g(z, z'), \quad (8)$$

又

$$L - L \equiv -\omega^2 \left\{ \frac{w(z)}{g} + \rho C_0(z) \right\}, \quad (9)$$

であるから (7) は

$$\Sigma^{\delta}(x) = \frac{1}{i\omega} \int [G(x, \bar{z}) L(\zeta(\bar{z}, 0) - G(x, \bar{z}) L(\zeta(\bar{z}, 0))] d\bar{z}$$

となるが

$$\int G(x, \bar{z}) L(\zeta(\bar{z}, 0) d\bar{z} = \int \zeta(\bar{z}, 0) L G d\bar{z} = \zeta(x, 0) = f(x, \bar{z})$$

$$\int G L \zeta d\bar{z} = G(x, \bar{z}')$$

なるが

$$\Sigma^{\delta}(x) = \frac{1}{i\omega} [f(x, \bar{z}') - G(x, \bar{z}')] \quad \left. \vphantom{\Sigma^{\delta}(x)} \right\} (10)$$

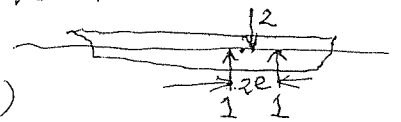
よって

$$\Sigma^m(x) = i\omega \Sigma^{\delta} - \zeta(x, 0) = -G(x, \bar{z}')$$

又右図のように $\bar{z}'$ の近々で モーメントをかけて 離すとすると
上式で

$$\Sigma^m(x) = e^2 G_{\bar{z}\bar{z}'}(x, \bar{z}'), \quad (11)$$

$e \rightarrow 0$



(10), (11) の Kotchin 函数は

$$D^{\delta}(\alpha) = - \iint_S \Phi_D(x, \alpha) \varepsilon \nu G(x, \bar{z}') dS(x)$$

$$D^m(\alpha) = e^2 \iint_S \Phi_D(x, \alpha) \varepsilon \nu G_{\bar{z}\bar{z}'}(x, \bar{z}') dS(x) \quad \left. \vphantom{D^{\delta}(\alpha)} \right\}$$

(2.11) によってこれは

$$D^{\delta}(\alpha) = - \int D(x, \alpha) G(x, \bar{z}') dx$$

$$D^m(\alpha) = e^2 \int D(x, \alpha) G_{\bar{z}\bar{z}'}(x, \bar{z}') dx \quad \left. \vphantom{D^{\delta}(\alpha)} \right\} (12)$$

と書けるから (6) 式と比較して

$$D^{\delta}(\alpha) = - \frac{\Sigma^{\delta}(\bar{z}')}{r^2 A(\omega)}$$

$$D^m(\alpha) = \frac{e^2}{r^2 A(\omega)} \Sigma_{\bar{z}\bar{z}'}^m(\bar{z}') \quad \left. \vphantom{D^{\delta}(\alpha)} \right\} (13)$$

これを (1.17) と較べると このとき α 方向へ出て行く波の振幅は
 α 方向から来た波による周波数応答に比例している事がわかる。

5. 相似則⁽¹⁾と逐次近似解法

規則の中の運動方程式について相似則⁽¹⁾を用いよう。
(3.18)を書下すと

$$-\omega^2 \left\{ \frac{20(x)}{g} + \rho C_0(x) \right\} Z(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 Z}{dx^2} \right] + \gamma B(x) Z(x) = \rho g A(\omega) D(x, \omega), \quad (1)$$

であるから、普通に行われているように相似模型について船長 L と波長 λ の比

$$KL = L \frac{\omega^2}{g} = 2\pi L / \lambda, \quad (2)$$

を等しくし、又 λ と波長 $[A\omega]$ の比を等しくして試験会を行なうとして、乙が相似になる為には(1)の~~8次~~次のように書きかえて見ると。

$$\left[KL \left\{ \frac{\omega(L^3) + \rho g C_0(L^3)}{W/L} \right\} + \frac{EI_0}{WL^3} \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{EI(\beta)}{EI_0} \right) \frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{\gamma B(L^3)L^2}{W} \right] Z(L\beta) = \frac{\gamma A(\omega)L^2}{W} D(L\beta, \omega), \quad (3)$$

ここに W : 排水量, I_0 は x の $I(x)$ 。

となるから 今

$$\frac{WL^2}{EI_0} = \varepsilon, \quad (4)$$

が同じならば運動はすべて相似になる。

(1)は又運動の如何に拘らず梁としての船の変位の平衡方程式でもあるから ~~ε~~ ε を等しくすれば (3.13) により

$$\zeta_s \propto \varepsilon L, \quad (5)$$

であり、又上下撓み振動数を f とすると

$$f \propto \omega \propto \sqrt{\frac{gEI_0}{WL^3}} = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon L}}, \quad (6)$$

$$\text{あるいは} \quad \frac{f^2 L}{g} \propto \frac{1}{\varepsilon}, \quad (6')$$

となって縦強度、振動の上でも相似になっている。

普通は船体の撓みの影響は小さいと考えられるので
(1) 式を解くことにする

$$\Sigma(x) = \Sigma_0 + \Theta x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Sigma_n(x), \dots (7)$$

のように ε をパラメーターで展開出来るように。

これを(1)式に代入して ε の同じ order の項を equate すると

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Sigma_1 = \left[\omega^2 \left\{ \frac{W}{g} + \rho C_0 \right\} - \rho B \right] \{ \Sigma_0 + \Theta x \} + \rho A D(x, x), \dots (8)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \Sigma_{n+1} = \left[\omega^2 \left\{ \frac{W}{g} + \rho C_0 \right\} - \rho B \right] \Sigma_n, \text{ for } n \geq 1, (9)$$

が得られる。 $\Sigma_n (n \geq 1)$ はすべて船首尾端で ^{梁としての}自由端の条件を満たすものとする。

すると(8)式に1あるいは x をかけて積分すると左辺は消えて

$$\int \left[-\omega^2 \left\{ \frac{W}{g} + \rho C_0 \right\} + \rho B \right] (\Sigma_0 + \Theta x) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} dx = \rho A \int D(x, x) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} dx, (10)$$

となるがこれは撓みを考えない時の運動方程式そのものである。従って(8)式の右辺を2回積分したものが従来計算している波揺中の曲げモーメントである。

これをさらに2回積分して(9)式に代入しもう2回積分すれば ε の近似の曲げモーメントが出て来るわけであるが解法の詳細は附録にゆづることにしよう。

6. 変分問題の変換⁵⁾

今は簡単のため、水の力は外力に含めて運動方程式を次のように考えておこう。

$$\frac{2\rho(x)}{g} \zeta_{tt}(x,t) + m_{xx}(x,t) + \delta B(x) \zeta(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$

$$m(x,t) = EI(x) \zeta_{xx}(x,t), \quad (2)$$

一般には f , ρ , I 等には不連続でありうるため m の 2 階微係数は不連続つまり m については 1 階微係数は連続で区分的に微分可能として計算しなければならぬ。 δ についても、尚々 4 階微係数が存在するだけであるのでかなり厳しい制限であり、これについてもむしろ区分的に二次曲線で近似する方が望ましいように見える。

このような場合は (1) を変分問題に変換すれば (4) 式左辺の 2 項の 4 階微分を実行しないで済むので数値計算上有利であると思われる。

即ち

$$\delta \int I dt = \delta \int W dt, \quad (3)$$

$$I = \int \left[\frac{2\rho(x)}{2g} \dot{\zeta}^2 - \left\{ \frac{\delta}{2} B(x) \zeta^2 + \frac{m^2}{2EI(x)} \right\} \right] dx, \quad (4)$$

$$W = \int f(x,t) \zeta(x,t) dx, \quad (5)$$

また更に m と ζ を独立に変化させる事にすればこれを変形して (一種の正準変換)

$$I = \int \left[\frac{2\rho}{2g} \dot{\zeta}^2 + \frac{m^2}{2EI(x)} - \frac{\delta B}{2} \zeta^2 + m \zeta_x \right] dx, \quad (6)$$

としておくと (1) と (2) が オイラー方程式として出て来る。

この方法によると m と ζ の微係数が計算出来ればよいので許容函数の幅は広くなるから (4) に較べると未知数の数は倍になる。

結 言

船体の弾性を考慮に入れた場合 従来のストリップ法で運動方程式を求めるとは容易であるし、又 梁としての船体の曲げの方程式も元々ストリップ法であるので それで充分であると思われる。

しかし得られる方程式は一般に常係数でない、4階線型の微分方程式（一般には微積分方程式）があるので 実際上は数値解法によらざるをえない。最近の計算機によればこれは困難な問題ではないけれども、ここで弾性学で使う変分法との連繫を示す意味で、ハミルトンの変分原理から運動方程式を誘導した。この方法によれば種々の近似解法を安心して使用出来るし、又もっと正確な理論~~等~~や複雑な例えば~~非線形な~~横断面も変形するような問題を組立てる事も容易になる。

又この方法では初期値問題を考えるのも容易で特に興味のあるのはハミルトンの関係を利用すれば簡単に中において船の動きを定めて出来る法を解析すれば規則性は中の応答がわかる事で最近の船の過渡応答の研究の一助ともなるであろう。

今回は前進速度のない場合を扱ったが機会を見て速度のある場合も考えて見たい。

最後に 今回の討論は 研究室の眞能教授の Whipping の研究^的に端を発するもので、同教授並びに両研究室の諸氏との 1 年に亘る熱心な討議に心から謝意を表す。

以上

参考文献

1. 別所正利; "船体運動のイムパルス応答理論とその
覚書" 昭和46年 1月
2. " ; Mem. of Defense Academy, vol. 8, No. 1, 1968
3. 元良, 小山; 造船論文集 117号 昭和40年
4. S. チモシェンコ; "工業振動学" 東京図書, 1954
5. 林, 村其著; "変分法" コロチキ 昭和43年8月
6. 庄子義正; "波浪によっておこる振動について"
防大研究科卒業論文, 昭和46年3月
7. 日本造船学会, 耐航性シムポジウム・テキスト. (1969)
8. 末次一誠; 関西造船論文集 昭和24年10月満堂

附録 簡単な計算例 1. 逐次近似法

弾性を入るとどのような事があるかの見当をつける為には、うんと単純化した模型を考えて計算を実行して見る。

船体の幅は一定の箱船を考え、構造部材は前後方向に一定の様梁と考えて見よう。

$$I(x') = \text{const.} \quad B(x') = \text{const.}$$

$$w(x) = \rho g A(x) = \rho g B T C_x = \text{const.}$$

$$C_0(x, \omega) = \text{const. and real} = c B T C_x = c B T_m, \quad T_m = T C_x$$

このように仮定すると

$$L \equiv -\rho \omega^2 B T_m (1+c) + \rho g B + EI \frac{d^4}{dx^4} \dots \quad (1)$$

この力は、荷重を考えて

$$\rho g A_w(\omega) D(x', 0) = \rho g A_w B \gamma_m e^{ikx'} \dots (2)$$

運動方程式は

$$\left[\rho g B \{1 - K T_m (1+c)\} + EI \frac{d^4}{dx^4} \right] Z' = \rho g A_w B \gamma_m e^{ikx'}$$

となるが、ここで更に無次元化して

$$Z' = A_w Z, \quad x' = Lx, \quad K = KL = \omega^2 L / g$$

と置いて上式を整理すると

$$Z^{(4)}(x) + \varepsilon A Z(x) = \varepsilon B e^{ikx} \dots (3)$$

境界条件は $Z'''(0) = Z''(1) = Z'(0) = Z'(1) = 0$, (4)

である。 $\varepsilon \ll 1$

$$\varepsilon = WL^2 / EI,$$

$$A = \frac{L}{T_m} \left[1 - K \frac{T_m}{L} (1+c) \right], \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (5)$$

$$B = \gamma_m \frac{L}{T_m} = \frac{L}{T_m} \left[1 - K \frac{T_m}{L} (1 + \gamma_m c) \right],$$

そこで K が小さいと $\gamma_m \approx 1$ とすれば、 $A \approx B$ である。

ある船について計算して見ると $\varepsilon \approx 1$ である。この値は実験的には二節振動力の振動数から定められよう。

今の場合はその振動角速度 ω_0 は

$$\omega_0 \approx \frac{9}{4} \pi^2 \sqrt{\frac{E I g}{W L^3}} \quad \text{であるから}$$

$$\varepsilon \approx 6.25 \quad (6)$$

となり、 $\varepsilon \approx 1$ とすると A は非常に大きい値であり、上の A 係数は大きい負の値をとり、(3) 式の解は振動型となる。(あるいは普通の振動方程式になる)。今はそのような場合は扱わないで、この小さい普通船体運動を問題にするような状態の所を以下考える事にする。この範囲では A は大体正值をとる。 π が約 10 より大きくなると A は負値をとり段々振動方程式に移行して行くわけである。

$$\text{さて 解が} \quad \Sigma = h + x\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n(x) \quad (7)$$

のように展開出来るとする

$$\Sigma^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n^{(4)}(x) \quad (8)$$

であるから (3) に代入して (8) のようにおいて等式が成立つとすると

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(4)}(x) &= B e^{i k x} - A(h + x\theta) \\ a_2^{(4)}(x) &= -A a_1(x) \\ a_3^{(4)}(x) &= -A a_2(x) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を得る。

この方程式を境界条件 (4) の下に解いて a_1 が求まり、この a_1 を方程式 (2) に入れて又 (4) の下に解いて a_2 が求まるというように逐次近似出来る。

以下これを a_2 の段階まで追って見よう。

$$\left. \begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x f_{n-1}(x) dx \\ f_0(x) &= e^{i k x} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$f_n(1) = f_n, \quad \dots \dots \dots (11)$$

と記す事とする。(9)の2式を(4)を考慮に入れて逐次積分すると

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(3)}(x) &= Bf_1(x) - A\left(hx + \frac{x^2}{2}C\right) \\ q_1^{(4)}(x) &= Bf_2(x) - A\left(h\frac{x^2}{2} + C\frac{x^3}{6}\right) \end{aligned} \right\} (12)$$

となるから (9) によつて

$$Bf_1 - A\left(h + \frac{C}{2}\right) = 0$$

$$Bf_2 - A\left(\frac{h}{2} + \frac{C}{6}\right) = 0$$

これを解いて

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{B}{A}(2f_1 - 6f_2) \\ C &= \frac{B}{A}(-6f_1 + 12f_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

となるが、これだけ周りを考えない場合の船体運動の解である。

(12)をさらに2積分して

$$\left. \begin{aligned} q_1'(x) &= Bf_3(x) - A\left(h\frac{x^3}{6} + C\frac{x^4}{24}\right) + a_1' \\ q_1(x) &= Bf_4(x) - A\left(h\frac{x^4}{24} + C\frac{x^5}{120}\right) + xa_1' + a_1 \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\text{但し } q_1' \equiv q_1'(0), \quad a_1 \equiv a_1(0)$$

最後の式を(9)の2式に代入して逐次積分すると

$$\left. \begin{aligned} q_2^{(3)}(x) &= -A\left[Bf_5(x) - A\left(h\frac{x^5}{120} + C\frac{x^6}{720}\right) + \frac{x^2}{2}a_1' + xa_1\right] \\ q_2^{(4)}(x) &= -A\left[Bf_6(x) - A\left(h\frac{x^6}{720} + C\frac{x^7}{5040}\right) + \frac{x^3}{3!}a_1' + \frac{x^2}{2}a_1\right] \end{aligned} \right\} (15)$$

(4)の条件によつて

$$\left. \begin{aligned} Bf_5 - A\left(\frac{h}{120} + \frac{C}{720}\right) + a_1' + \frac{a_1}{2} &= 0 \\ Bf_6 - A\left(\frac{h}{720} + \frac{C}{5040}\right) + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1'}{3!} &= 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

これから

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= B(2f_5 - 6f_6) - \frac{A}{7!}(42h + 80) \\ a_1' &= B(12f_6 - 6f_5) + \frac{6A}{7!}(28h + 58) \end{aligned} \right\} (17)$$

を得(14)式(15)式の定数が決まる。

(13)と(17)を7に代入して解が計算出来る。

今は曲げモーメントのみ書き出して見ると

$$Z''(x) = a_1''(x) + \varepsilon a_2''(x), \quad \dots (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} a_1''(x) &= m_1(x) + i n_1(x) \\ &= f_2(x) + f_1 x^2(1-x) - f_2 x^2(3-2x), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{AB} a_2''(x) &= m_2(x) + i n_2(x) \\ &= f_6(x) + f_5(x^2-x^3) + f_4(2x^4-3x^5) \\ &\quad + f_1\left(\frac{x^2}{280} - \frac{13x^3}{2520} + \frac{x^6}{360} - \frac{x^7}{840}\right) \\ &\quad + f_2\left(-\frac{13x^2}{840} + \frac{3x^3}{140} - \frac{x^6}{120} + \frac{x^7}{420}\right), \quad (20) \end{aligned}$$

よって (18) 式は

$$\begin{aligned} Z''(x) &= B [m_1(x) - \varepsilon A m_2(x)] \\ &\quad + iB [n_1(x) - \varepsilon A n_2(x)], \quad (21) \end{aligned}$$

となる。明らかに m_1, n_1 は剛性を考えない時の曲げモーメントで m_2, n_2 は補正項である。

附図に $C=1$, $L/T_n=20$, $\varepsilon=1$, $A=B$ と仮定して運動とモーメントを計算した結果を示してある。船型が特異なので普通の船と少々異なるようであるが、零の場合 ($\lambda < 0$, $A > 0$) で剛性を考えると曲げモーメントは僅かに減るようであり、この結論は常識的であろう。従って長波長側では従来の考えで問題はなからう。しかし短波長になって $A > 0$ になると計算の過程から見て、 λ に大きくなると考えられ、実際座子の計算 (船に板バネをつけた下製モデルについて) によると固有振動数の新にピークのある同相曲線が得られ、これは又定性的には実験と一致する。従ってこの試算から見れば弾性を考慮に入れた場合は波長が船長より小さい範囲が重要であると予想される。

その別れ目は $A=0$, つまり浮力と慣性力の釣り合う点で、これから慣性力が浮力より大きくなる時には問題がある事になる。

附録 簡単な計算例 2. 解析解 4)

前節(3)式の 解 齊次 解 を求めよう。

$A < 0$ の場合はよく知られているので、ここでは $A > 0$ の場合を書き出して見よう。

前(3)式は次のように書ける。

$$Z^{(4)}(z) + Z(z) = 0 \quad (1)$$

$$z = iz$$

$$z = 2\alpha(x - \frac{1}{2})$$

$$2\alpha = (\varepsilon A)^{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dz} Z = z \times \frac{d}{dz} Z$$

$$(1) \text{ の解は } Z = e^{z^2} e^{i\pi/4}, \quad z = 1, 3, 5, 7, \quad (3)$$

であるからこれを

$$\left. \begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \frac{z}{\sqrt{2}} + \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \frac{z}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh} \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \\ C &= \operatorname{ch} \frac{z}{\sqrt{2}} \cos \frac{z}{\sqrt{2}} \\ D &= \operatorname{sh} \frac{z}{\sqrt{2}} \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

とすると、容易に次の関係が見出せる。

$$\left. \begin{aligned} A' &= C \\ B' &= D \\ C' &= -B \\ D' &= A \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} A'' &= -B \\ B'' &= A \\ C'' &= -D \\ D'' &= C \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} A''' &= -D \\ B''' &= C \\ C''' &= -A \\ D''' &= -B \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} A^{(4)} &= -A \\ B^{(4)} &= -B \\ C^{(4)} &= -C \\ D^{(4)} &= -D \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

又(4)を展開すれば次の級数展開がえられる。

$$\left. \begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+1}}{(4n+1)!} = z - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^9}{9!} - \dots \\ B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^{11}}{11!} - \dots \\ C(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(4n)!} = 1 - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \dots \\ D(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{(4n+2)!} = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{今 } \Sigma(z) = aA(z) + bB(z) + cC(z) + dD(z), \quad (17)$$

の常数を自由端の条件で決めて見よう。

自由端では

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'(x) &= e + f = \frac{1}{4x^2} \frac{d^2}{dx^2} \Sigma \Big|_{x=1} \\ \Sigma'(-x) &= -e + f = \frac{1}{4x^2} \frac{d^2}{dx^2} \Sigma \Big|_{x=0} \\ \Sigma''(x) &= g + h = \frac{1}{8x^3} \left(\frac{d}{dx} \right)^3 \Sigma \Big|_{x=1} \\ \Sigma''(-x) &= g - h = \frac{1}{8x^3} \left(\frac{d}{dx} \right)^3 \Sigma \Big|_{x=0} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(17)を微分して $x = \pm x$ とおけば上式から

$$\left. \begin{aligned} -aB + bA &= e \\ -aD + bC &= g \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} -cD + dC &= f \\ -cA - dB &= h \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を得る。ここで A, B, C, D はそれぞれ $z = x$ における値とする。
これをといて

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{eC - gA}{AD - BC} \\ b &= \frac{eD - gB}{AD - BC} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} c &= \frac{-fB - hC}{AC + BD} \\ d &= \frac{Af - hD}{AC + BD} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

これを(9)に代入して整理すれば

$$\Sigma''(z) = eE(z) + fF(z) + gG(z) + hH(z), \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{AD - BC} [DB(z) + CA(z)] \\ F(z) &= \frac{1}{AC + BD} [AD(z) - BC(z)] \\ G(z) &= \frac{1}{AD - BC} [-BB(z) - AA(z)] \\ H(z) &= \frac{1}{AC + BD} [-DD(z) - CC(z)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

これを⁽¹²⁾微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 E''(z) &= \frac{1}{AD-BC} [DA(z) - CB(z)] \\
 F''(z) &= \frac{1}{AC+BD} [AC(z) + BD(z)] \\
 G''(z) &= \frac{1}{AD-BC} [-BA(z) + AB(z)] \\
 H''(z) &= \frac{1}{AC+BD} [-DC(z) + CD(z)]
 \end{aligned} \quad (13)$$

これを用いれば、前節(3)の解は直ちに書ける。
そこで元に戻って

$$Z^{(4)}(x) + \varepsilon A Z(x) = \varepsilon B e^{ikx}$$

の特解は

$$Z_0(x) = \delta e^{ikx}, \quad \delta = \frac{\varepsilon B}{\varepsilon A + k^4}, \quad (14)$$

であり、

$$\begin{aligned}
 Z_0''(x) &= -\delta k^2 e^{ikx} \\
 Z_0'''(x) &= -i\delta k^3 e^{ikx}
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 Z_0''(1) - Z_0''(0) &= -\delta k^2 (e^{ik} - 1) = -\delta \alpha^2 e \\
 Z_0''(1) + Z_0''(0) &= -\delta k^2 (e^{ik} + 1) = -\delta \alpha^2 f \\
 Z_0'''(1) + Z_0'''(0) &= -i\delta k^3 (e^{ik} + 1) = -i\delta \alpha^3 g \\
 Z_0'''(1) - Z_0'''(0) &= -i\delta k^3 (e^{ik} - 1) = -i\delta \alpha^3 h
 \end{aligned}$$

となるように係数解 Z_1 を与えるのはよい。

上式をよくと、

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{\delta k^2}{\delta \alpha^2} (e^{ik} - 1) \\
 f &= \frac{\delta k^2}{\delta \alpha^2} (e^{ik} + 1) \\
 g &= \frac{i\delta k^3}{16\alpha^3} (e^{ik} + 1) \\
 h &= \frac{i\delta k^3}{16\alpha^3} (e^{ik} - 1)
 \end{aligned} \quad (15)$$

これら(15)を代入すれば Z_1 が与えられる。

$$\begin{aligned}
\Sigma_1(z) &= \frac{\delta \kappa^2}{8\alpha^2} \{ (-1 + \cos \kappa) E(z) + (1 + \cos \kappa) \bar{F}(z) \} \\
&\quad + \frac{\delta \kappa^3}{16\alpha^3} (-\sin \kappa) \{ G(z) + H(z) \} \\
&\quad + i \frac{\delta \kappa^2}{8\alpha^2} \sin \kappa \{ E(z) + \bar{F}(z) \} \\
&\quad + i \frac{\delta \kappa^3}{16\alpha^3} \{ (1 + \cos \kappa) G(z) - (1 - \cos \kappa) H(z) \}, \quad (16)
\end{aligned}$$

解は $\Sigma(z) = \Sigma_0(z) + \Sigma_1(z)$, (17)
 2" 与えられた。

