

造波抵抗の小さい2次元滑走面形状とその変形

目的

2次元滑走面では造波抵抗も飛沫抵抗もないものゝ
容易に得られるが、^{高速度で}与えられた排水量を満たす曲率
が大き過ぎて現実的でない。少し造波抵抗は
残つても曲率の少ない現実的な滑走面形状
を求める方法について記す。

1. 波なし分布

補助関数 $\sigma(x)$ を導入して圧力分布を

$$p(x) = \frac{d^2}{dx^2} \sigma(x) + K^2 \sigma(x) \quad (1)$$

とおく

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right], \quad n \geq 2, \quad x = \cos \theta \quad (2)$$

とおく

$$\frac{d^2}{dx^2} \sigma_n(x) = \frac{\cos n\theta}{\sin \theta}$$

とすれば

$$p_n(x) = \frac{\cos n\theta}{\sin \theta} + \frac{K^2}{2n} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right]$$

とすれば造波抵抗はなくなる。

飛沫抵抗がなくなる為には、さらに $x=1$ で p が 0

とすればならぬので“例え1”

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{2} (p_n - p_{n+2}) = \sin(n+1)\theta + \frac{K^2}{4} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n+2} \left(\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin(n+3)\theta}{n+3} \right) \right] \quad (3) \\ &= \sin(n+1)\theta + \frac{K^2}{2} (\sigma_n - \sigma_{n+2}) \end{aligned}$$

整体的12訂算してあげると、 $\sin^3 \theta = \frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$

$$\left. \begin{aligned} f_3 &= \sin 3\theta + \frac{K^2}{5} \sin^5 \theta \\ f_4 &= \sin 4\theta + \frac{4K^2}{15} \sin^3 \theta \cos \theta \\ f_5 &= \sin 5\theta + \frac{K^2}{21} \sin^5 \theta (1 + 4 \cos^2 \theta) \end{aligned} \right\} (3')$$

(2) 12訂算してあげると、

$$f_n(x) = \frac{\cos 2n\theta}{n} - K \sigma_n(x) \quad (4)$$

12訂算してあげると、

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} (f_n - f_{n+2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2n\theta}{n} - \frac{\cos 2(n+2)\theta}{n+2} \right) - \frac{K}{2} (\sigma_n - \sigma_{n+2}) \quad (5)$$

12訂算して

$$C_L = \frac{\text{Lift}}{\frac{\rho}{2} V^2 L} = \int_{-1}^1 f_n dx = \begin{cases} \frac{\pi}{8} K^2 & \text{for } n=2 \\ 0 & \text{for } n>2 \end{cases} \quad (6)$$

12訂算して

$$\int_{-1}^1 f_{n+1} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{16} K^2 & \text{for } n=2 \\ 0 & \text{for } n>2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{2K^2}{15} \int_0^{\pi} \sin^6 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2K^2}{15} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi K^2}{96},$$

2. 変形

圧力分布を今基準化して次のようにとする。

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 1,$$

そうすると今度は p として $\hat{p}_3$ の形をとるから (7) により

$$p(x) = \frac{16}{\pi K^2} \hat{p}_3(x) \quad (8)$$

と採らなければならぬ $K \leq 1$ では大湾変動が大きい。

そこでまず

$$p(x) = \frac{2}{\pi} [\sin \theta + a \sin 3\theta] \quad (9)$$

と採り、造波折点を 0 にする。

$$H(K) = \int_{-1}^1 p(x) e^{iKx} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [\sin \theta + a \sin 3\theta] e^{iK \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{K} [J_1(K) - 3a J_3(K)] = 0,$$

これを満たす a を求める。

$$a = \frac{J_1(K)}{3J_3(K)} \quad (10)$$

この a も又 $K \leq 1$ なので大湾変動。

そこで (9) の $\sin 3\theta$ が消えるように

$\hat{p}_3$ も差引くと

新しい圧力分布は

波長	K	a	$K^2 a$
1.291	0.3	88.33	7.950
1	0.5	31.48	7.870
0.707	1.0	7.498	7.498

$$\frac{\pi}{2} p(x) = \sin \theta + a \sin 3\theta - a^3$$

$$= \sin \theta - \frac{K^2 a}{8} \sin^5 \theta$$

で掛水量は (7) により

$$A = \int p dx = 1 - \frac{K^2}{8} a \xrightarrow{K \rightarrow 0} 0(K^2)$$

と (4) の水も又小さくなる。

結局、送水抵抗を 0 に近づけるとうちも掛水量が小さくなりおさるので現実的には a を (10) よりもう少し小さくおさるを得た。

送水抵抗は

$$\frac{R_W}{\rho U^2 \frac{L}{2}} \leq K C_L |H(0)|^2, \quad C_L = \frac{\Delta}{\rho U^2 \frac{L}{2}} = \frac{2gV}{U^2 L} = \frac{2\delta}{H^2}$$

$$\varepsilon_W = \frac{R_W}{\Delta} = K C_L |H(0)|^2, \quad H(0) =$$

$$\frac{\varepsilon_W}{\delta} = 4K^2 |F(K)|^2 = \frac{16}{A^2} |J_1(K) - \beta a J_3(K)|^2, \quad (12)$$

$$A = 1 - \frac{K^2}{8} a$$

K	$J_1(K)$	$J_3(K)$
.3	.14832	5.597 $E(-4)$
.5	.24227	2.585 (-3)
1.0	.44005	1.956 (-2)

(11) の分布は 前後端で凹となっているので 実用上 凹の
 があるように見える。

これを 少なくする意に β_4 を選んで

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} p(x) &= \sin \theta - \frac{K^2 a}{5} \sin^5 \theta - \frac{\beta_4}{4} \\ &= \sin \theta - \frac{\sin^5 \theta}{4} - \frac{K^2 a}{5} \sin^5 \theta - \frac{K^2}{5} \sin^5 \theta \cos \theta \\ &= \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) - \frac{K^2}{5} \sin^5 \theta (a - \frac{\cos \theta}{3}), \quad (13) \\ \int_{-1}^1 p(x) dx &= A, \quad \int_{-1}^1 p(x) x dx = \frac{-K^2}{192} \end{aligned}$$

これで 前端 附近の凹みは 少なくなると思われる。

この p を A で 割って 基準化して 実際の 滑走面を
 a の値の他とつけて
 描いて 見る。

なお 重心位置は 今度は 原点 後ろ

$$\frac{K^2}{192A} \times \left(\frac{1}{2}\right)$$

の 割合にある。

例 β_3 を 介在 させなくともよく、その場合は $A=1$
 となる。

3. 付金

$$I = \int_a^b \int_{-b}^{b'} \frac{dx dy}{\sqrt{(x-y)^2 + (y-1)^2}}$$

$$\int_{-b}^b \frac{dy}{\sqrt{(x-y)^2 + (y-1)^2}} = + \int_{y-b}^{y+b} \frac{dt}{\sqrt{(x-t)^2 + t^2}} = \left. \log \left| t + \sqrt{(x-t)^2 + t^2} \right| \right|_{y-b}^{y+b}$$

$$= \log \left| \frac{y+b + \sqrt{(x-y)^2 + (y+b)^2}}{y-b + \sqrt{(x-y)^2 + (y-b)^2}} \right|$$

$$\int_{x-a}^{x+a} \log \left(t + \sqrt{(x-t)^2 + t^2} \right) dx = \int_{x-a}^{x+a} \log \left(t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2} \right) dx$$

$$= \left. \frac{1}{3} \log \left(t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2} \right) \right|_{x-a}^{x+a} - \int \frac{\frac{x^2 dx}{\sqrt{(t-x)^2 + t^2}}}{t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2}} \quad \frac{(t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2})^3 dx}{(t-x) + \sqrt{(t-x)^2 + t^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \log \left(t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2} \right) - \int dx \left(1 - \frac{t}{\sqrt{(t-x)^2 + t^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\log \left(t + \sqrt{(t-x)^2 + t^2} \right) - \frac{1}{3} \right] + t \log \left| \frac{t}{t-x + \sqrt{(t-x)^2 + t^2}} \right| \Big|_{x-a}^{x+a}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= (x+a) \left[\log \left(y+b + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} \right) - \frac{1}{3} \right] + (y+b) \log \left| \frac{x+a + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}} \right| \\ &\quad - (x-a) \left[\log \left(y+b + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} \right) - \frac{1}{3} \right] - (y+b) \log \left| \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}} \right| \\ &\quad - (x+a) \left[\log \left(y-b + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) - \frac{1}{3} \right] - (y-b) \log \left| \frac{x+a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right| \\ &\quad + (x-a) \left[\log \left(y-b + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) - \frac{1}{3} \right] + (y-b) \log \left| \frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right| \end{aligned}$$

$$I = (x+a) \ln \left| \frac{y+b + \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}}{y-b + \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}} \right| - (x-a) \ln \left| \frac{y+b + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{y-b + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right|$$

$$+ (y+b) \ln \left| \frac{x+a + \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}}{x-a + \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}} \right| - (y-b) \ln \left| \frac{x+a + \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}}{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \right|$$

At $x=y=0$

$$I = 2a \ln \left(\frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} \right) + 2b \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \right)$$